GEOMETRIA DELLE MASSE

Dispensa ad uso degli studenti del corso C di Statica
corso di laurea in Architettura

A.A. 2015-2016

Avvertenza:

La presente dispensa serve di supporto agli studenti per l'individuazione delle parti di programma essenziali a sostenere l'esame. È necessario l'uso parallelo di testi già riportati nella bibliografia generale del corso.

1. BARICENTRO E MOMENTI STATICI

Definizioni

Dato un sistema di masse concentrate (punti materiali) complanari, definiamo un versore $\underline{r}$ ortogonale al piano ed associamo ad ogni massa m_i, nel punto P_i, un vettore $\underline{v}_i$ di modulo m_i e versore $\underline{r}$. Si ottiene un sistema di vettori paralleli, ovvero un sistema di vettori ad invariante scalare nullo. L'asse centrale di questo sistema di vettori, anch'esso di versore $\underline{r}$, è quindi caratterizzato dal fatto che il momento risultante dei vettori rispetto a qualsiasi polo appartenente ad esso, è uguale a zero. Il baricentro del sistema di masse è la traccia dell'asse centrale sul piano delle masse.

Scriviamo quindi la definizione di baricentro: deve essere nullo il momento risultante $\underline{M}$ del sistema di vettori rispetto al baricentro G.

$$\underline{M}(G) = \sum_i (P_i - G) \wedge \underline{v}_i = \underline{0}$$

Ovvero, assunto un sistema di riferimento ortogonale con assi x e y sul piano delle masse, posto che P_i (x_i, y_i, 0) e G (x_G, y_G, 0):

$$\sum_i \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ (x_i - x_G) & (y_i - y_G) & 0 \\ 0 & 0 & m_i \end{vmatrix} = \underline{i} \sum_i m_i (y_i - y_G) - \underline{j} \sum_i m_i (x_i - x_G) = \underline{0}$$

Questa equazione vettoriale diviene le due equazioni scalari riportate sotto:

$$\sum_i m_i\, y_i - y_G \sum_i m_i = 0$$
$$\sum_i m_i\, x_i - x_G \sum_i m_i = 0$$

Dalle quali si ricava la definizione di baricentro di un sistema di masse concentrate:

$$x_G = \frac{\sum_i m_i\, x_i}{\sum_i m_i}$$
$$y_G = \frac{\sum_i m_i\, y_i}{\sum_i m_i}$$

Si definisce momento statico del sistema di masse rispetto alla retta x la quantità:

$$S_x = \sum_i m_i \, y_i$$

Equivalentemente, per la retta y:

$$S_y = \sum_i m_i \, x_i$$

Quindi le coordinate del baricentro si possono esprimere in termini di momenti statici:

$$x_G = \frac{S_y}{M_{tot}}$$
$$y_G = \frac{S_x}{M_{tot}}$$

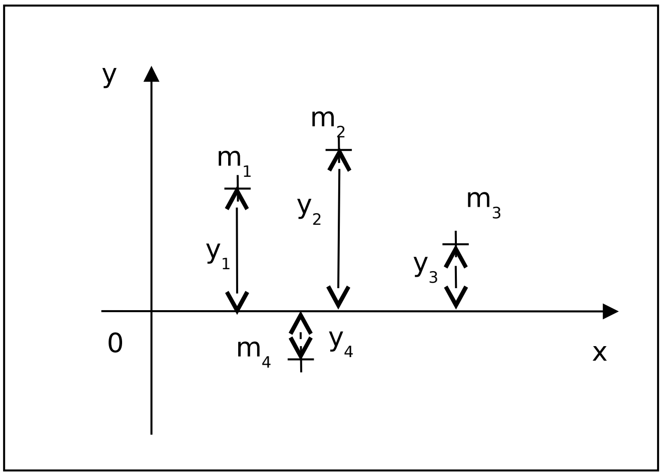
Proprietà

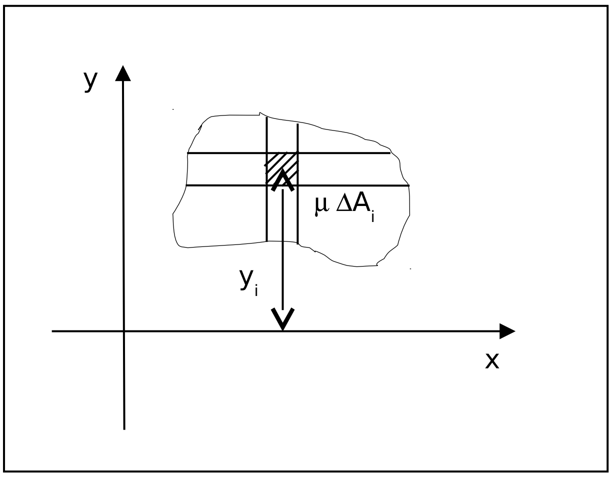
- Il baricentro è unico; infatti l'asse centrale di un sistema di vettori è unico.
- Il baricentro di due masse concentrate sta sulla retta che le congiunge.
- Il baricentro di due masse concentrate si colloca rispetto ad esse ad una distanza inversamente proporzionale alle messe stesse.
- Vale la proprietà "associativa", ovvero si possono valutare i baricentri per sottosistemi.
- Se esiste un asse di simmetria per il sistema di masse (simmetria ortogonale od obliqua) il baricentro sta su tale asse.

Come conseguenza del teorema di Varignon, la massa totale di un sistema di masse, concentrata nel baricentro del sistema, produce il momento statico del sistema stesso, rispetto a qualsiasi retta. Ovvero, se una retta passa per il baricentro del sistema di masse, allora il momento statico del sistema rispetto a quella retta è nullo.

$$S_y = x_G \cdot M_{tot}$$
$$S_x = y_G \cdot M_{tot}$$

Quanto definito sopra si può estendere a sistemi di masse distribuite su superfici piane.





Basterà sostituire alla sommatoria il segno di integrale. Ponendo per la densità di massa μ(x,y) il valore costante unitario, si avrà:

$$S_x = \lim_{n\to\infty} \sum_i y_i \, dA_i = \int_A y \, dA$$

Il momento statico riportato sopra si misura in unità di lunghezza alla terza potenza. Si dice anche momento del primo ordine, poiché la distanza dalla retta compare elevata alla prima potenza.

Applicazioni

- Determinare il momento statico rispetto alle rette x ed y del sistema dei seguenti punti dotati di massa:

  P_1 (-1; 1) di massa m

  P_2 (3; 3) di massa 3m

  P_3 (4; -1) di massa 2m

Svolgimento

Si può procedere direttamente a calcolare il momento statico oppure si può calcolare il baricentro e poi sostituire l'intera massa nel baricentro. In questo caso sarà:

$x_G = S_y/\Sigma m_i = [m\,(-1) + 3m\,(3) + 2m\,(4)]/6m = 8/3$

$y_G = S_x/\Sigma m_i = [m\,(1) + 3m\,(3) - 2m\,(1)]/6m = 4/3$

Quindi:

$S_x = 6m \;\; 4/3 = 8m$

S_y = 6m 8/3 = 16m

- Esercizi 3 e 4 a pag. 11 e 12 del libro di Bigoni, Di Tommaso, Gei, Laudiero, Zaccaria, "Geometria delle masse", Ed. Progetto Leonardo, Bologna.
- Determinare il baricentro di un triangolo rettangolo.

Svolgimento

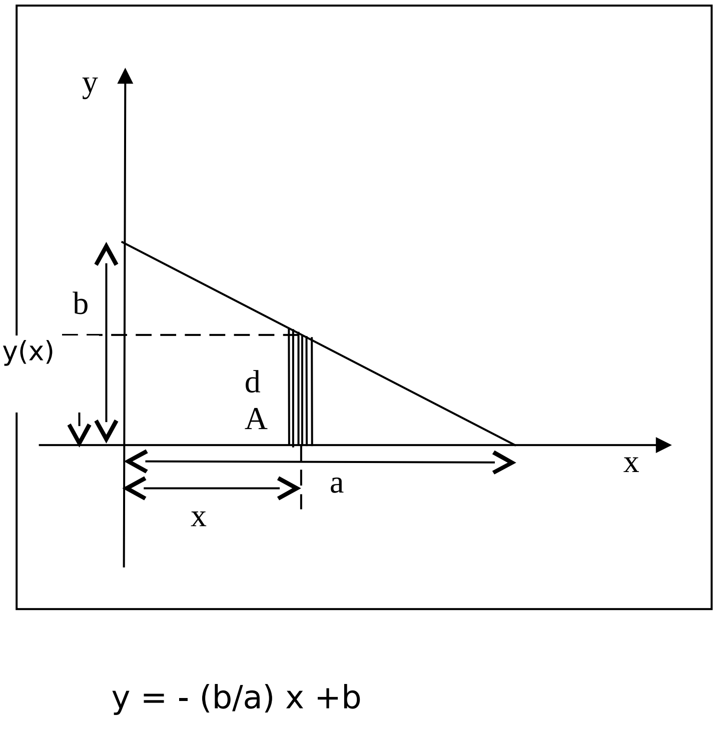
Per l'ascissa del baricentro vale la seguente formula:

$$x_G = \frac{S_y}{A}$$

Calcoliamo quindi il momento statico S_y:

$$S_y = \int_A x \, dA$$

Secondo lo schema riportato nel disegno, dA = y(x) dx. La funzione y(x) è l'equazione di una retta con coefficiente angolare –b/a e termine noto b:



$$y = -\,(b/a)\,x + b$$

$$dA = dx\,[-(b/a)\,x + b]$$

$$S_y = \int_0^a x \cdot \left(b - \frac{b}{a} x \right) dx = \frac{ba^2}{6}$$

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{ba^2}{6} \cdot \frac{2}{ba} = \frac{a}{3}$$

Allo stesso modo si procede per valutare y_G.

2. MOMENTI DEL SECONDO ORDINE

Definizioni

Momento di inerzia assiale

Sia dato un sistema di masse concentrate giacenti su di un piano, ed una retta x; assegniamo una seconda retta (ortogonale alla prima) per la valutazione delle distanze dalla prima. Si definisce momento di inerzia del sistema rispetto alla retta x:

$$I_x = \sum_i m_i \, y_i^{\,2}$$

Equivalentemente:

$$I_y = \sum_i m_i \, x_i^{\,2}$$

Nella definizione di momento di inerzia assiale la coordinata delle masse compare alla seconda potenza; per questo motivo I_x è rappresentato da un numero sempre positivo. Si chiama raggio giratore di inerzia il numero:

$$\rho_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}}$$

e rappresenta la distanza alla quale è necessario concentrare la massa totale del sistema per ottenere il valore di momento di inerzia assiale.

Per distribuzioni continue e di densità di massa unitaria si ha:

$$I_x = \int_A \mu \cdot dA \cdot y^2 = \int_A y^2 \, dA$$

$$I_y = \int_A \mu \cdot dA \cdot x^2 = \int_A x^2 \, dA$$

Momento di inerzia polare

Si dice momento di inerzia polare rispetto al polo O(0;0) la quantità:

$$I_p = \sum_i m_i \cdot d_i^2 = \sum_i m_i \cdot \left(x_i^2 + y_i^2\right) = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2 = I_y + I_x$$

Dove d rappresenta la distanza delle masse dal polo, punto di intersezione delle rette x e y. Per sistemi di masse distribuite di densità unitaria:

$$I_p = \int_A r^2 \, dA$$

Dove r è il vettore distanza del punto generico dal polo. Anche I_p è una quantità sempre positiva.

Momento centrifugo

Si dice momento centrifugo del sistema di masse rispetto alle rette x e y la quantità:

$$I_{xy} = \sum_i m_i \, x_i \, y_i$$

Per sistemi di masse distribuite di densità unitaria si ha:

$$I_{xy} = \int_A x \, y \, dA$$

Proprietà

Come si può intuire, il momento centrifugo può assumere valori tanto positivi che negativi, ad assume il valore nullo se una delle due rette rappresenta un asse di simmetria per il sistema di masse.

Teoremi di trasporto

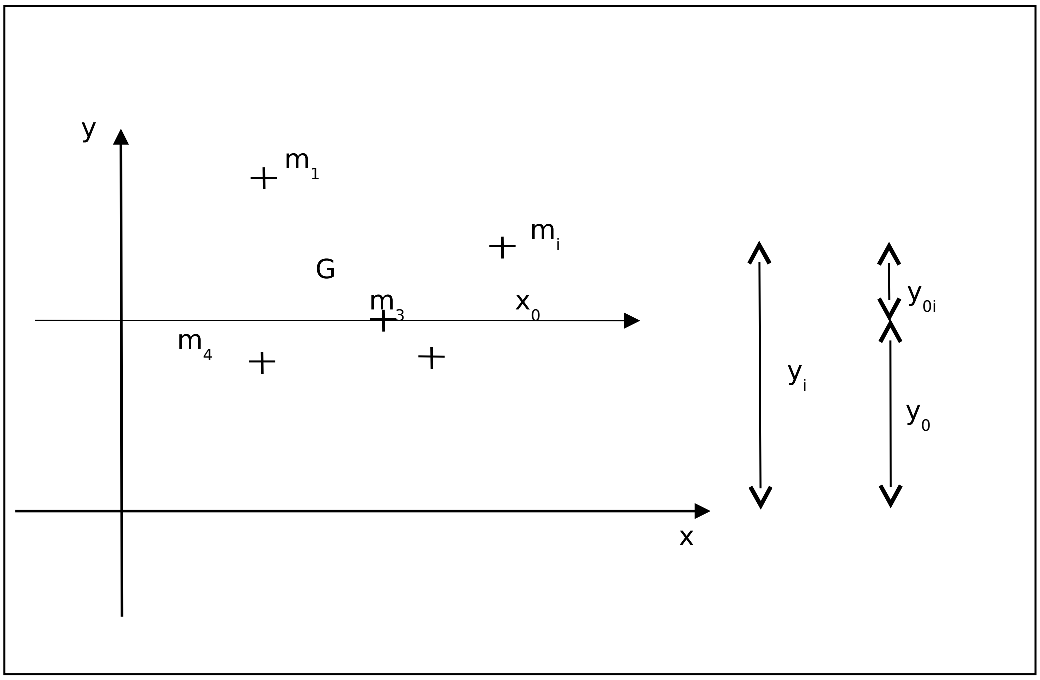
Vogliamo costruire la legge che associa al momento di inerzia rispetto alla retta x, il momento di inerzia rispetto alla retta x_0 baricentrica e parallela alla x.

Scriviamo il momento di inerzia rispetto alla retta x ed esprimiamo l'ordinata y_i rispetto al nuovo riferimento.

$$I_x = \sum_i m_i y_i^2 = \sum_i m_i (y_{0i} + y_G)^2 = \sum_i m_i y_{0i}^2 + y_G \sum_i m_i y_{0i} + y_G^2 \sum_i m_i$$

Il primo termine rappresenta il momento di inerzia rispetto alla retta x_0; il secondo termine è uguale a zero, perché è il prodotto della y_G per il momento statico rispetto alla retta x_0 (baricentrica); il terzo termine è il termine di trasporto.

$$I_x = I_{x0} + y_G^2\, M_{tot} \qquad (*)$$



Osservazione

Tra tutte le rette parallele, il momento di inerzia è minimo rispetto a quella baricentrica; infatti al momento di inerzia baricentrico si aggiunge una quantità sempre positiva.

Il teorema può essere formulato anche per altre grandezze inerziali.

Sostituendo nella (*) $I_x = M\,\rho_x^2$, si ottiene ad esempio:

$$\rho_x^2 = \rho_{x0}^2 + y_G^2$$

Usando il metodo già impiegato per dimostrare il primo teorema del trasporto, scriviamo I_{xy} in funzione delle coordinate rispetto al sistema baricentrico:

$$I_{xy} = \sum_i m_i x_i y_i = \sum_i m_i (x_{0i} + x_0) \cdot (y_{0i} + y_G) = I_{x0\,y0} + M \cdot y_G^2$$

dove i termini misti si annullano perché contengono i momenti statici S_{x0} e S_{y0}.

Scriviamo infine I_p in funzione di I_x e I_y ed esprimiamo questi ultimi tramite I_{x0} e I_{y0}:

$$I_p = I_x + I_y = I_{x0} + I_{y0} + M \cdot \left(y_G{}^2 + x_G{}^2 \right) = I_{p0} + M \cdot r_G{}^2$$

In sintesi le proprietà inerziali di un sistema di masse in un assegnato sistema di riferimento possono essere rappresentate mediante il tensore d'inerzia:

$$\mathbf{J} \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix}$$

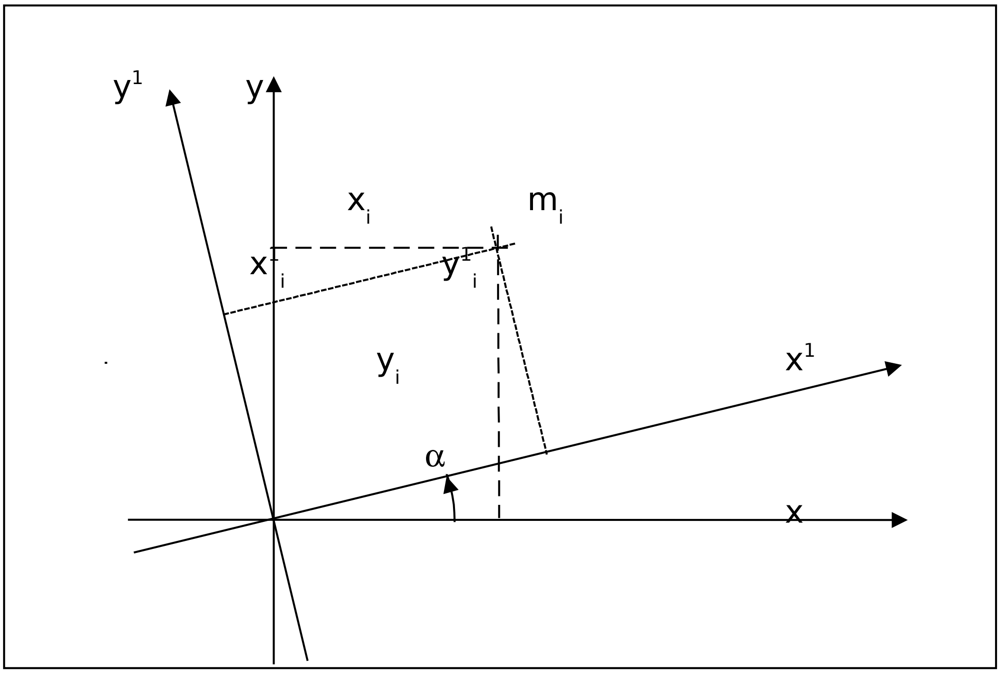
la cui traccia è appunto il momento d'inerzia polare.

Applicazioni

- Esercizio 9 a pag. 26 del libro di Bigoni, Di Tommaso, Gei, Laudiero, Zaccaria, “Geometria delle masse”, Ed. Progetto Leonardo, Bologna.
- Esercizio 13 a pag. 32 del libro di cui al punto precedente.

3. LEGGI DI VARIAZIONE DEI MOMENTI DEL SECONDO ORDINE AL RUOTARE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO

Una volta noti i momenti di inerzia assiali e centrifugo di un dato sistema di masse rispetto ad un assegnato sistema di riferimento, ci si chiede se sia possibile valutare in modo diretto i valori dei momenti del secondo ordine rispetto ad un sistema di riferimento avente la stessa origine ma che sia orientato diversamente. Affrontiamo questo problema in relazione ad un sistema di masse discreto.



Supponiamo che il nuovo sistema di riferimento x^1 y^1 sia ruotato di un angolo positivo a rispetto al vecchio. Ricordiamo che le nuove coordinate del punto si esprimono rispetto alle vecchie come segue:

$$x^1_i = x_i \cos\alpha + y_i \operatorname{sen}\alpha$$

$$y^1_i = -x_i \operatorname{sen}\alpha + y_i \cos\alpha$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} x^1_i \\ y^1_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$$

Scriviamo adesso la definizione di momento di inerzia assiale e centrifugo per un sistema discreto di masse.

$$I_{x^1} = \sum_i m_i(-x_i \operatorname{sen}\alpha + y_i \cos\alpha)^2 = \sum_i m_i x_i^2 \operatorname{sen}^2\alpha + \sum_i m_i y_i^2 \cos^2\alpha - 2\cdot\sum_i m_i x_i y_i \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha =$$
$$= I_y \operatorname{sen}^2\alpha + I_x \cos^2\alpha - 2\, I_{xy} \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$
$$I_{y^1} = \sum_i m_i(x_i \cos\alpha + y_i \operatorname{sen}\alpha)^2 = \sum_i m_i x_i^2 \cos^2\alpha + \sum_i m_i y_i^2 \operatorname{sen}^2\alpha + 2\cdot\sum_i m_i x_i y_i \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha =$$
$$= I_y \cos^2\alpha + I_x \operatorname{sen}^2\alpha + 2\, I_{xy} \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$
$$I_{xy^1} = \sum_i m_i(-x_i \operatorname{sen}\alpha + y_i \cos\alpha)(x_i \cos\alpha + y_i \operatorname{sen}\alpha) = -\sum_i m_i x_i^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha +$$
$$+\sum_i m_i y_i^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \sum_i m_i x_i y_i \operatorname{sen}^2\alpha + \sum_i m_i x_i y_i \cos^2\alpha =$$
$$= (I_x - I_y)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + I_{xy}\left(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\right)$$

Le formule ora scritte rappresentano le leggi di variazione, quadratiche nei coseni direttori di α, dei momenti del secondo ordine al variare dell'orientamento del sistema di riferimento. È evidente che il momento di inerzia polare, essendo definito come prodotto delle masse per il quadrato del modulo del vettore posizione rispetto all'origine del sistema di riferimento, non varia al variare di questo (traccia della matrice di inerzia).

Se voglio valutare l'esistenza di un sistema di riferimento privilegiato, tra tutti quelli che hanno la stessa origine, rispetto al quale i momenti di inerzia attingono valori massimi o minimi, devo derivare le leggi di variazione ora ottenuta rispetto alla variabile α ed eguagliare a zero tale derivata (condizione di stazionarietà). Ad esempio per I_x si ha:

$$\frac{dI_{x^1}}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\left(I_y \operatorname{sen}^2\alpha + I_x \cos^2\alpha - 2\, I_{xy} \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right) = 2\, I_y \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - 2\, I_x \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha +$$
$$+ 2\, I_{xy}\left(\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha\right)$$

Questa espressione è identica alla legge di variazione del momento centrifugo che abbiamo scritto sopra, a meno di un fattore -2. Se si calcola la derivata di I_y rispetto alla variabile α, si otterrà lo stesso risultato, ma di segno opposto.

Possiamo concludere che i momenti di inerzia assiali attingono valori estremanti per quei valori di α che annullano il momento centrifugo. Se ricordiamo che la somma dei due momenti di inerzia assiali rispetto ad assi ortogonali rappresenta il momento di inerzia polare, che non varia al ruotare del sistema di riferimento, è evidente che quando l'angolo α individua un sistema di riferimento rispetto al quale il momento centrifugo è nullo, allora i due momenti di inerzia assiali rispetto agli assi ortogonali saranno uno massimo e l'altro minimo.

4. RICERCA DEGLI ASSI E DEI MOMENTI PRINCIPALI DI INERZIA

Dato un sistema di masse, si dicono assi principali d'inerzia quella coppia di assi ortogonali baricentrici (anche detti riferimento principale d'inerzia) rispetto ai quali il momento d'inerzia centrifugo risulta nullo mentre i momenti d'inerzia assiali sono uno massimo e l'altro minimo. Una volta individuato il riferimento principale d'inerzia $\xi\,\eta$, il tensore d'inerzia sarà rappresentabile in forma diagonale:

$$\mathbf{J}\begin{bmatrix} \mathrm{I}_x & -\mathrm{I}_{xy} \\ -\mathrm{I}_{xy} & \mathrm{I}_y \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{J}\begin{bmatrix} \mathrm{I}_\xi & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_\eta \end{bmatrix}$$

La ricerca degli assi principali d'inerzia e dei momenti principali d'inerzia si può fare mediante il metodo degli autovalori ed autovettori applicato al tensore d'inerzia $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$.

Si dice autovettore del tensore $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$ il vettore $\underline{v}$ tale che

$$\underline{\underline{\mathbf{J}}}\ \underline{v} = \lambda\ \underline{v}$$

In questa scrittura λ si dice autovalore di $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$ e la direzione di $\underline{v}$ è una direzione principale di $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$, ovvero un asse principale di inerzia. Con un semplice passaggio algebrico si ottiene:

$$\left(\underline{\underline{\mathbf{J}}} - \lambda\,\underline{\underline{\mathbf{I}}}\right)\ \underline{v} = \underline{\mathbf{0}} \qquad \text{ovvero} \quad \begin{bmatrix} (\mathrm{I}_x - \lambda) & -\mathrm{I}_{xy} \\ -\mathrm{I}_{xy} & (\mathrm{I}_y - \lambda) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (\S)$$

che rappresenta un sistema di equazioni lineari omogenee nell'incognita $\underline{v}$. La soluzione (non banale) è garantita se il determinante dei coefficienti è uguale a zero. Questa condizione consiste in una equazione di secondo grado in λ, detta equazione secolare:

$$\lambda^2 - \left(\mathrm{I}_x + \mathrm{I}_y\right)\lambda + \left(\mathrm{I}_x \mathrm{I}_y - {\mathrm{I}_{xy}}^2\right) = 0$$

i cui coefficienti coincidono con la traccia e il determinante di $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$. Le due radici dell'equazione secolare rappresentano i due autovalori di $\underline{\underline{\mathbf{J}}}$ ovvero i due momenti di inerzia principali. Si può dimostrare che l'equazione secolare ha due radici reali poiché il tensore di inerzia è simmetrico. Esse saranno inoltre maggiori o uguali a zero a causa della definitezza positiva del tensore di inerzia (sono positivi traccia e determinante). Convenzionalmente si attribuisce il simbolo I_ξ a λ_1 ovvero al momento principale massimo, e I_η a λ_2, ovvero al momento principale minimo. Sostituendo uno degli autovalori nel sistema (§) si otterrà un sistema di due equazioni linearmente dipendenti, che individuano una infinità di soluzioni, rappresentanti la direzione principale corrispondente all'autovalore sostituito. Ad esempio:

$$\begin{bmatrix} I_x - I_\xi & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y - I_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se mettiamo a sistema una delle equazioni precedenti con la definizione di versore, otteniamo le componenti del versore della direzione ξ.

$$\begin{cases} \left(I_x - I_\xi\right) v_x - I_{xy} v_y = 0 \\ v_x^{\,2} + v_y^{\,2} = 1 \end{cases}$$

Sostituendo, invece, il valore dell'autovalore I_η, otterremo due equazioni, ognuna delle quali individuerà la direzione η.

A causa della simmetria del tensore di inerzia, le due direzioni principali ξ ed η sono mutuamente ortogonali.

Applicazioni

- Esercizio n. 14 a pag. 43 del libro di Bigoni, Di Tommaso, Gei, Laudiero, Zaccaria, "Geometria delle masse", Ed. Progetto Leonardo, Bologna. La ricerca degli assi principali d'inerzia può essere effettuata mediante la ricerca degli autovalori ed autovettori della matrice d'inerzia.

5. CENTRO RELATIVO DI UN SISTEMA DI MASSE RISPETTO AD UNA RETTA

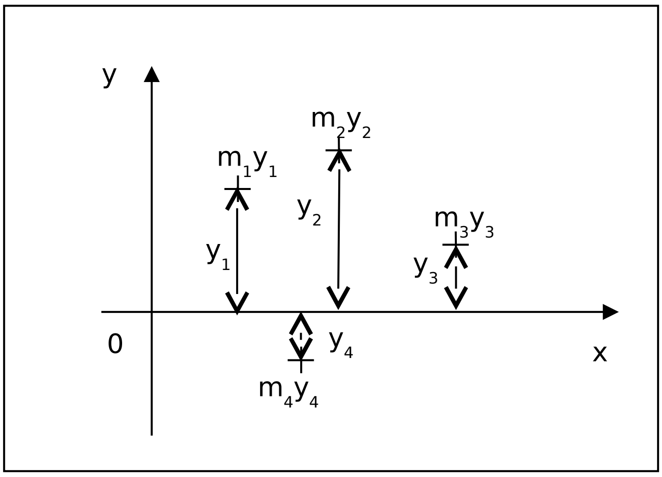
Definizione

Dato un sistema di masse concentrate ed una retta x, si definisce centro relativo X del sistema di masse rispetto alla retta, il baricentro del sistema di masse ottenuto sostituendo ad esse il loro momento statico.

Per esprimere il momento statico abbiamo bisogno di una seconda retta, che sceglieremo ortogonale, per valutare la distanza dalla retta x. Quindi, in formule:

$$x_G = \frac{\sum_i m_i\, x_i}{\sum_i m_i} \quad \Rightarrow \quad x_X = \frac{\sum_i (m_i y_i)\, x_i}{\sum_i m_i y_i}$$

$$y_G = \frac{\sum_i m_i\, y_i}{\sum_i m_i} \quad \Rightarrow \quad y_X = \frac{\sum_i (m_i y_i)\, y_i}{\sum_i m_i y_i}$$



Se si ricorda che:

$$I_x = \sum_i m_i\, y_i^{\,2}; \qquad I_{xy} = \sum_i m_i\, x_i\, y_i \qquad \text{e} \qquad S_x = \sum_i m_i\, y_i$$

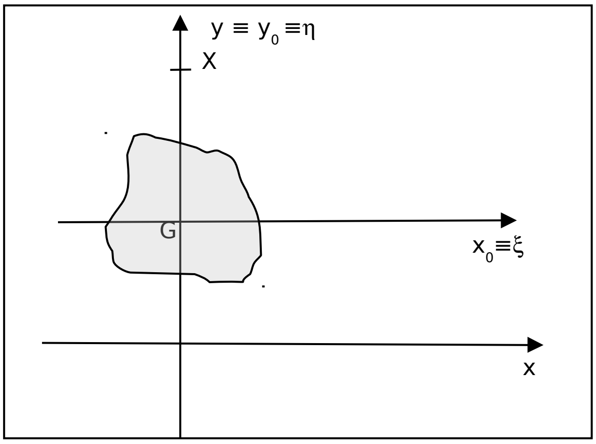
si può anche scrivere:

$$x_X = \frac{I_{xy}}{S_x}$$
$$y_X = \frac{I_x}{S_x} \qquad (**)$$

Osservazioni

Si vede che se la retta x si avvicina al baricentro, il momento statico del sistema diminuisce fino ad annullarsi quando essa passa per il baricentro. In questo caso il centro relativo si allontana indefinitamente, poiché il momento statico compare a denominatore nelle due espressioni delle coordinate del centro relativo. Queste formule si possono estendere ai sistemi di masse uniformemente distribuite.

Dalla prima di esse si vede che l'ascissa del centro relativo sarà nulla (ovvero il centro relativo X si troverà sulla retta y) se I_{xy} è uguale a zero. Questa evenienza si verifica se uno degli assi (ad esempio y) è asse principale di inerzia, cioè se il sistema xy è la traslazione verticale di un sistema principale. Infatti, applicando il teorema del trasporto a partire dagli assi paralleli baricentrici il termine I_{x0y0} è nullo, ed il termine di trasporto è anch'esso nullo poiché $x_G = 0$. In pratica questo avviene se la retta x rispetto alla quale si vuole calcolare il centro relativo è parallela ad uno degli assi principali di inerzia, purché si scelga la retta y passante per il baricentro, cioè coincidente con l'altro asse principale di inerzia.



In questo caso il momento di inerzia centrifugo I_{xy} si annulla perché la retta x è parallela all'asse principale di inerzia ξ. Infatti basta prendere la retta y passante per G ed ortogonale a x che sarà anch'essa asse principale di inerzia (η). Sarà così garantito che il centro relativo X sta proprio sull'altro asse principale di inerzia η.

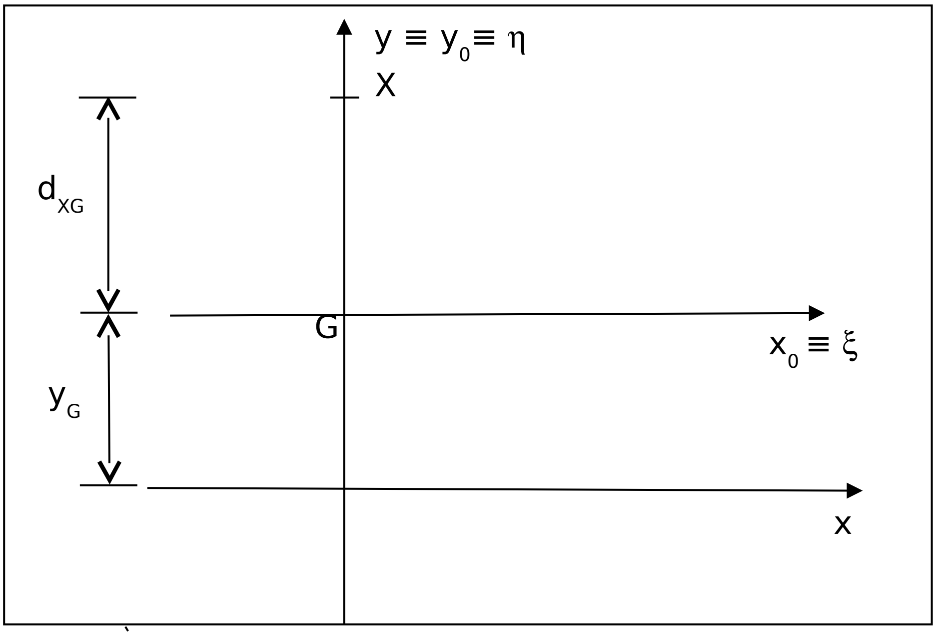
La seconda delle formule riportate sopra si può elaborare ricordando la definizione di raggio giratore d'inerzia, la formula che esprime le coordinate del baricentro mediante il momento statico per un sistema di masse distribuite, ed infine il teorema del trasporto espresso per i raggi giratori di inerzia:

$$y_X = \frac{I_x}{S_x} = \frac{A\,\rho_x^2}{A\,y_G} = \frac{\rho_{x0}^2 + y_G^2}{y_G} = \frac{\rho_{x0}^2}{y_G} + y_G$$

da cui (#)

$$d_{XG} = y_X - y_G = \frac{\rho_{x0}^2}{y_G}$$

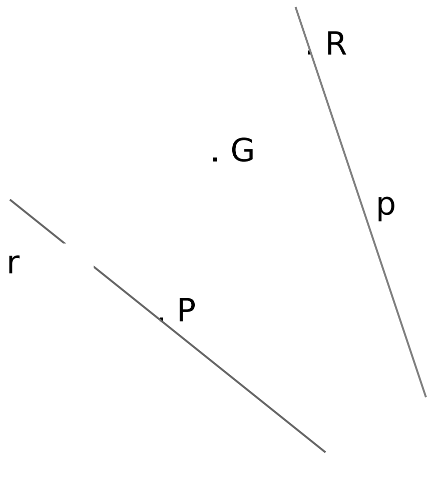
Se la retta x è parallela ad uno degli assi principali di inerzia, questa formula sarà sufficiente da sola ad individuarne il centro relativo, facendo uso soltanto del raggio giratore di inerzia baricentrico.



Teorema di reciprocità

Enunciato:

dato un sistema di masse nel piano ed assegnate due rette, se una contiene il centro relativo dell'altra, allora l'altra contiene il centro relativo della prima.



Applicazioni

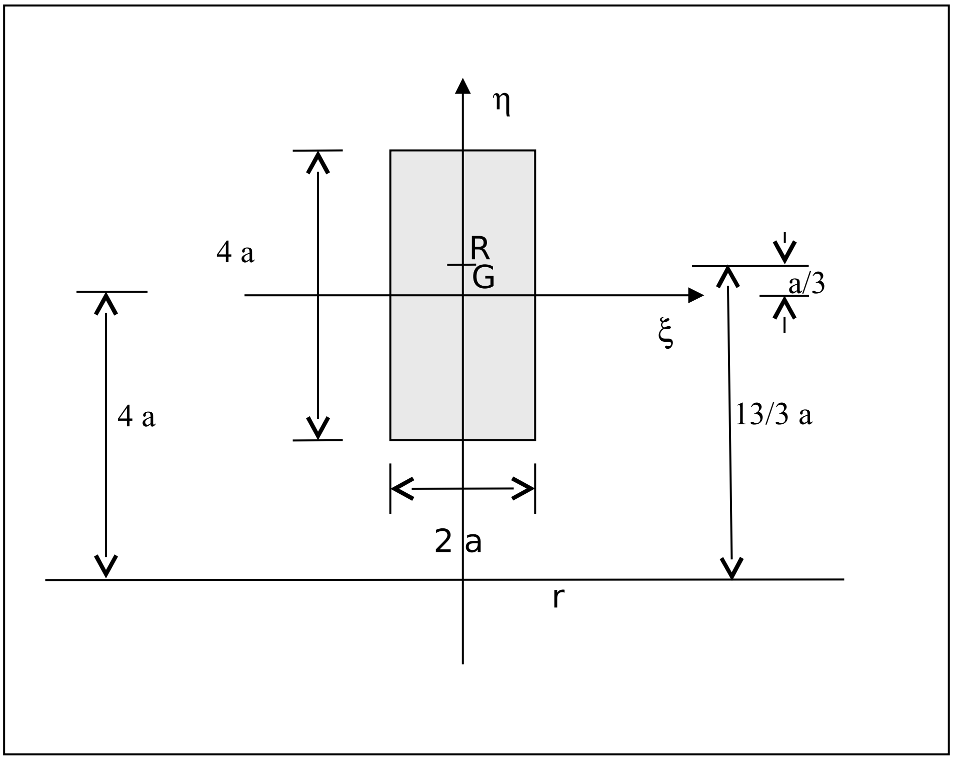
- Determinare il centro relativo R della retta r per il rettangolo dato in figura.

Sono noti la posizione del baricentro e l'orientamento del riferimento principale di inerzia per il rettangolo; infatti sappiamo che esso è dotato di due assi di simmetria ortogonale che rappresentano gli assi principali di inerzia. La retta r è parallela alle basi del rettangolo. Usando le (**) sarà necessario calcolare I_r S_r *e* I_{rs}. *Scegliendo opportunamente l'asse s coincidente con* η, *si vede che* $I_{r\eta} = 0$. *Infatti, dal teorema di trasporto si ha:*

$$I_{r\eta} = I_{\xi\eta} + A \cdot r_G \cdot s_G = 0 + A \cdot 0 \cdot 4a = 0$$

Sarà sufficiente calcolare l'ordinata di R rispetto alla retta r. Questo si può fare impiegando la (**) oppure la (#). Nel primo caso si avrà:

$$s_R = \frac{I_r}{S_r} = \frac{I_\xi + A \cdot s_G^2}{A \cdot s_G} = \frac{\frac{32}{3}a^4 + 8a^4 \cdot (4a)^2}{8a^4 \cdot (4a)} = \frac{416}{3}a^4 \frac{1}{32} = \frac{13}{3}a^4$$



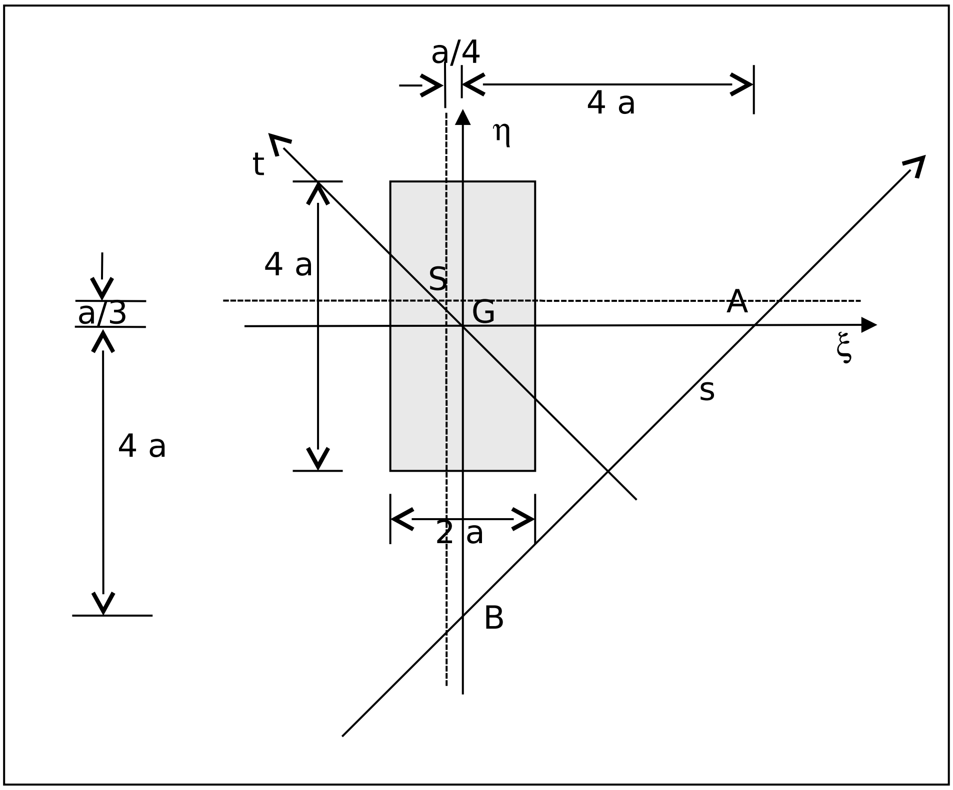
Nel secondo caso si dovrà calcolare ρ_ξ:

$$\rho_\xi^{\,2} = \frac{I_\xi}{A} = \frac{32}{3} a^4 \cdot \frac{1}{8a^4} = \frac{4}{3} a^2$$

e poi:

$$d_{RG} = \frac{\rho_\xi^{\,2}}{s_G} = \frac{4}{3} a^2 \frac{1}{4a} = \frac{1}{3} a$$

- Determinare il centro relativo S della retta s per il rettangolo dato in figura.



In questo caso si dovrebbero individuare entrambe le coordinate del centro relativo S, poiché in generale S non si trova sulla retta t perpendicolare as s e baricentrica, e quindi studiare le caratteristiche inerziali I_s, I_t e I_{st}. Si può applicare il teorema di reciprocità, andando ad individuare le rette a e b di cui i punti A e B, intersezioni della s con ξ e η, sono centri relativi. Dalla (#) sarà:

$$d_{AG} \cdot d_{aG} = \rho_\eta^{\ 2} \quad \Rightarrow \quad d_{aG} = \frac{\rho_\eta^{\ 2}}{d_{AG}} = \frac{a^2}{4a} = \frac{a}{4}$$

$$d_{BG} \cdot d_{bG} = \rho_\xi^{\ 2} \quad \Rightarrow \quad d_{bG} = \frac{\rho_\xi^{\ 2}}{d_{BG}} = \frac{4a^2}{3} \cdot \frac{1}{4a} = \frac{a}{3}$$

La retta a contiene i centri relativi di tutte le rette per A, mentre la retta b contiene i centri relativi di tutte le rette per B. Quindi il punto S, intersezione di a e di b, sarà centro relativo dell'unica retta (la retta s) che passa sia per A che per B. Quindi le distanze d_{aG} e d_{bG} rappresentano, a meno del segno, le coordinate del punto S.

6. NOCCIOLO CENTRALE D'INERZIA

Definizione

Il nocciolo centrale di inerzia di una figura piana è il luogo dei centri relativi delle rette che non tagliano la figura.

Osservazioni

Dato che il centro relativo di una retta si avvicina al baricentro quando questa si allontana dalla figura, il nocciolo centrale di inerzia sarà una figura monoconnessa comprendente il baricentro stesso. Per individuarla sarà sufficiente tracciarne il contorno determinando i centri relativi delle "rette limite" che costituiscono l'inviluppo convesso della figura (insieme delle rette tangenti).

Il nocciolo centrale di inerzia presenta gli stessi assi di simmetria della figura cui si riferisce (se ci sono).

Se il centro relativo della r costituente l'inviluppo convesso è R ed il centro relativo della successiva retta s dell'inviluppo convesso è S, tutte le rette per P ($r \cap s$) avranno centro relativo sulla RS. Per motivi di continuità le rette per P tangenti e non secanti non potranno che avere il centro relativo all'interno del segmento RS. Allora il nocciolo centrale di inerzia ha tanti vertici quanti sono il lati dell'inviluppo convesso e tanti lati quanti sono i vertici di questo.

Applicazioni

- Esercizio 29 a pag. 81 del libro di Bigoni, Di Tommaso, Gei, Laudiero, Zaccaria, "Geometria delle masse", Ed. Progetto Leonardo, Bologna (da svolgere solo relativamente al nocciolo centrale di inerzia).
- Esercizio 30 a pag. 83 del libro di cui al punto precedente (da svolgere solo relativamente al nocciolo centrale di inerzia).
- Esercizio n. 32 a pag.85 del libro di cui ai punti precedenti.