Strutture formate da travi snelle

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Scuola di Architettura
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.

Metodi dell'integrazione dell'equazione differenziale della linea elastica

Sommario

Utilizzando la teoria tecnica della trave, sono stati ottenuti dei risultati molto importanti per le loro implicazioni applicative nello studio dei telai piani. In particolare:

1. sono state definite tutte le variabili (statiche e cinematiche) e le equazioni (di equilibrio, di congruenza e di legame costitutivo) che governano il problema strutturale dei sistemi piani di travi (telai piani);
2. l'espressione generale dell'equazione dei lavori virtuali è stata particolarizzata al caso dei telai piani;
3. sono state descritte le equazioni che permettono di determinare le componenti di tensione presenti nei punti materiali di una generica sezione trasversale partendo dalle caratteristiche della sollecitazione.

Sommario

Le equazioni che governano il problema dei telai piani sono state determinate sotto le seguenti ipotesi:

- equazioni indefinite di equilibrio:
  sono valide per travi (o tratti di trave) ad asse rettilineo o a piccola curvatura (più altre ipotesi sulla tipologia di carico);
- equazioni di congruenza:
  sono valide sotto le ipotesi cinematiche della teoria tecnica della trave (ossia conservazione delle sezioni trasversali piane e sezioni trasversali rigide nel loro piano) e di piccole deformazioni;
- equazioni di legame costitutivo:
  valide per materiale omogeneo elastico lineare, il cui comportamento meccanico può essere modellato attraverso le seguenti relazioni:

$$\sigma_z = E(\varepsilon_z - \alpha \ \Delta t)$$
$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$$
$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

Sommario

Il problema così definito risulta rispettoso delle equazioni di equilibrio.

Le equazioni di congruenza sono invece soddisfatte in via approssimata (a causa delle ipotesi sul campo di spostamento).

Il materiale è stato ipotizzato elastico-lineare.

Per i teoremi di esistenza e unicità della soluzione del problema elastico lineare, la soluzione del problema strutturale così definito esiste ed è unica.

Nel seguito saranno descritti diversi metodi di soluzione del problema strutturale in esame.

Introduzione

Le equazioni che governano il problema strutturale dei telai piani è stato particolarizzato al caso di telai formati da travi snelle (v. 21). Si è visto che, in questo caso, gli scorrimenti tra le sezioni trasversali e l'asse della trave possono essere trascurati. Questo equivale a dire che le sezioni trasversali si mantengono sempre (pressoché) ortogonali all'asse della trave.

Le equazioni del problema strutturale in esame sono parzialmente disaccoppiate e possono essere suddivise in tre sottoproblemi:

- assiale
- torsionale
- flesso-tagliante (la flessione è accoppiata al taglio)

come schematizzato nella slide seguente.

Tali sotto-problemi, in quanto disaccoppiati fra loro, possono essere risolti separatamente.

Telai piani costituiti da travi snelle

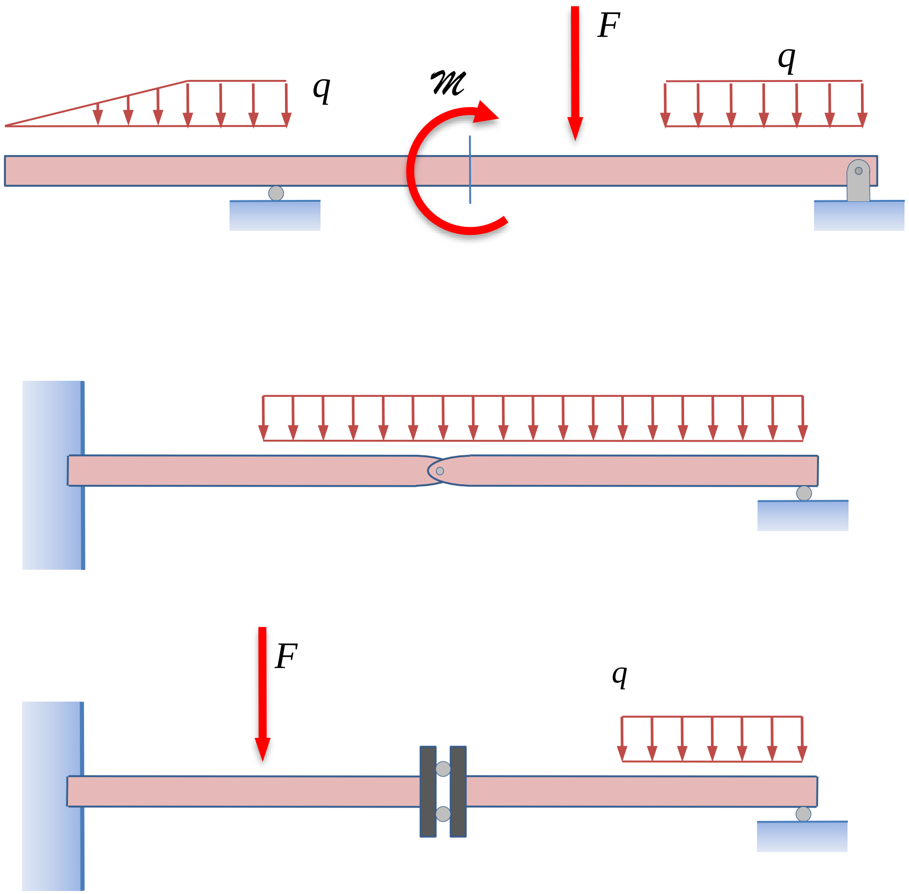
Le equazioni che governano il problema strutturale sono le seguenti:

<table>
<tr><th colspan="2">Equazioni \ sotto-problema</th><th>Assiale</th><th>Flesso-tagliante</th><th>Torsionale</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Equilibrio</td><td>Discontinuità</td><td>$\Delta N = -F_x$</td><td>$\Delta T_y = -F_y$
$\Delta M'_x = -F_y$
$\Delta M_x = -\mathcal{M}$</td><td>$\Delta M_t = -\mathcal{W}$</td></tr>
<tr><td>Equazioni indefinite</td><td>$N'(z) = -n(z)$</td><td>$T'_y(z) = -q(z)$
$M'_x(z) = T(z)$</td><td>$M_t'(z) = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Legame costitutivo</td><td>$\varepsilon_0(z) = \dfrac{N(z)}{EA} + \varepsilon_0^{(a)}(z)$</td><td>$\hat{\gamma} = \dfrac{T_y}{k_y G A}$
$\chi_x(z) = \dfrac{M_x(z)}{EI_x} + \chi_x^{(a)}(z)$</td><td>$\theta'(z) = \dfrac{M_z(z)}{G J}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Congruenza</td><td>$\varepsilon_0(z) = w'_0(z)$</td><td>$\varphi_x(z) \cong -v'_0(z)$
$\chi_x(z) = \varphi'_x(z)$</td><td>$\theta'(z) = \partial\theta(z)/\partial z$</td></tr>
</table>

(21)

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Sistemi di travi coassiali



Consideriamo, inizialmente, sistemi strutturali del tipo indicato in figura, costituiti da travi (snelle) coassiali caricate solo da azioni ortogonali all'asse della trave, da coppie (agenti sul piano yz) e da distorsioni termiche lineari rispetto a y, tali che inducano solo curvature anelastiche (v. 24 e 26). In pratica saranno considerati in questa fase dei sistemi strutturali caricati in maniera tale che

$$F_x = 0 \qquad n(z) = 0 \qquad \varepsilon_0^{(a)}(z) = 0 \qquad w = 0 \tag{27}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Sistemi di travi coassiali

Equazioni \ sotto-problema		Assiale	Torsionale
Equilibrio	Discontinuità	$\Delta N = 0$	$\Delta M_t = 0$
	Equazioni indefinite	$N'(z) = 0$	$M_t'(z) = 0$
Legame costitutivo		$\varepsilon_0(z) = \dfrac{N(z)}{EA}$	$\theta'(z) = \dfrac{M_z(z)}{G\,J}$
Congruenza		$\varepsilon_0(z) = w_0'(z)$	$\theta'(z) = \partial\theta(z)/\partial z$

Per questo tipo di strutture le equazioni dei problemi assiale e torsionale si modificano come indicato in tabella. Si verifica facilmente che le seguenti funzioni

$$\begin{aligned} N(z) &= 0 & M_t(z) &= 0 \\ \varepsilon_0(z) &= 0 & \theta'(z) &= 0 \\ w_0(z) &= 0 & \theta(z) &= 0 \end{aligned} \qquad (28)$$

soddisfano tutte le equazioni indicate nella tabella a fianco e quindi, per il teorema di unicità della soluzione del problema elastico, la (28) è, per la tipologia di strutture che stiamo analizzando, <u>LA</u> soluzione dei sotto-problemi assiale e torsionale. In pratica nelle tipo di strutture di cui alla precedente slide non sono presenti né sforzo normale né momento torcente e non si hanno allungamenti della linea d'asse né rotazioni torsionali.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Sistemi di travi coassiali

Equilibrio nei punti di discontinuità	$\Delta T = -F_y$ $\Delta M' = -F_y$ $\Delta M = -\mathcal{M}$
Equazioni indefinite di equilibrio	$T'(z) = -q(z)$ $M'(z) = T(z)$
Legame costitutivo	$\chi_x(z) = \dfrac{M_x(z)}{EI_x} + \chi_x^{(a)}(z)$
Congruenza	$\varphi_x'(z) = \chi_x(z)$ $v_0'(z) \cong -\varphi_x(z)$

Pertanto, per le strutture costituite da travi snelle coassiali caricate in maniera tale che siano verificate le (27), le uniche equazioni significative del problema strutturale sono quelle relative al problema flesso-tagliante indicate in tabella.

La completa risoluzione del problema strutturale, che implica il contemporaneo soddisfacimento di tutte queste relazioni, può essere affrontata utilizzando diversi metodi.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Metodo 1: integrazione della linea elastica del secondo ordine

Equilibrio nei punti di discontinuità

$$\begin{aligned} \Delta T &= -F_y \\ \Delta M' &= -F_y \\ \Delta M &= -\mathcal{M} \end{aligned}$$

1

Equazioni indefinite di equilibrio

$$\begin{aligned} T'(z) &= -q(z) \\ M'(z) &= T(z) \end{aligned}$$

Legame costitutivo

2

$$\chi_x(z) = \frac{M_x(z)}{EI_x} + \chi_x^{(a)}(z)$$

Congruenza

3

$$\begin{aligned} \varphi_x'(z) &= \chi_x(z) \\ v_0'(z) &\cong -\varphi_x(z) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \varphi_x(z) &= \int \chi_x(z)\,dz + a_1 \\ v_0(z) &\cong -\int \varphi_x(z)\,dz + a_2 \end{aligned}$$

1. <u>si determinano le caratteristiche della sollecitazione</u>; ovviamente queste devono essere tali da soddisfare le equazioni di equilibrio in corrispondenza dei punti di discontinuità e le equazioni indefinite di equilibrio;
2. <u>nota la legge del momento flettente</u>, si calcola la curvatura della linea d'asse della/e trave/i mediante le equazioni di legame costitutivo;
3. si calcolano le componenti di spostamento integrando l'espressione della curvatura. Le costanti di integrazione possono essere determinare imponendo che le funzioni di spostamento e di rotazione siano compatibili con i vincoli.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Metodo 1: integrazione della linea elastica del secondo ordine

Equilibrio nei punti di discontinuità

$$\Delta T = -F_y \qquad \Delta M' = -F_y \qquad \Delta M = -\mathcal{M}$$

1

Equazioni indefinite di equilibrio

$$T'(z) = -q(z) \qquad M'(z) = T(z)$$

Legame costitutivo 2

$$\chi_x(z) = \frac{M_x(z)}{EI_x} + \chi_x^{(a)}(z)$$

Congruenza 3

$$\varphi_x'(z) = \chi_x(z) \qquad v_0'(z) \cong -\varphi_x(z)$$

$$\varphi_x(z) = \int \chi_x(z)\,dz + a_1 \qquad v_0(z) \cong -\int \varphi_x(z)\,dz + a_2$$

È evidente che questo metodo si applica direttamente per sistemi isostatici, per i quali le equazioni di equilibrio sono sufficienti per la determinazione univoca delle caratteristiche della sollecitazione presenti nella struttura. Pertanto, per i sistemi isostatici è possibile risolvere tutte le equazioni del problema strutturale in maniera sequenziale.

Si noti comunque che il metodo della integrazione della linea elastica del secondo ordine può essere applicato anche per la risoluzione di sistemi iperstatici.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Metodo 1: integrazione della linea elastica del secondo ordine

Equilibrio nei punti di discontinuità

$$\Delta T = -F_y \qquad \Delta M' = -F_y \qquad \Delta M = -\mathcal{M}$$

1

Equazioni indefinite di equilibrio

$$T'(z) = -q(z) \qquad M'(z) = T(z)$$

Legame costitutivo **2**

$$\chi_x(z) = \frac{M_x(z)}{EI_x} + \chi_x^{(a)}(z)$$

Congruenza **3**

$$\varphi_x'(z) = \chi_x(z) \qquad v_0'(z) \cong -\varphi_x(z)$$

$$\varphi_x(z) = \int \chi_x(z)\,dz + a_1 \qquad v_0(z) \cong -\int \varphi_x(z)\,dz + a_2$$

Si osservi che le equazioni di congruenza e di legame costitutivo possono essere sintetizzate in una unica equazione. Dalle equazioni di congruenza si ha

$$v_0''(z) = -\varphi_x'(z) = -\chi_x(z) \tag{29}$$

Sostituendo la precedente nell'equazione di legame costitutivo si ottiene

$$v_0''(z) = -\frac{M_x(z)}{EI_x} - \chi_x^{(a)}(z) \tag{30}$$

La precedente relazione differenziale <u>del secondo ordine</u> "sintetizza" le equazioni di congruenza e di legame costitutivo e premette di calcolare la funzione della linea elastica integrando due volte la (30) mediante la procedura schematizzata nella slide seguente.

Metodo 1: integrazione della linea elastica del secondo ordine

Equilibrio nei punti di discontinuità

$$\Delta T = -F_y$$
$$\Delta M' = -F_y$$
$$\Delta M = -\mathcal{M}$$

1

Equazioni indefinite di equilibrio

$$T'(z) = -q(z)$$
$$M'(z) = T(z)$$

Legame costitutivo 2

$$\chi_x(z) = \frac{M_x(z)}{EI_x} + \chi_x^{(a)}(z)$$

Congruenza 3

$$\varphi_x'(z) = \chi_x(z)$$
$$v_0'(z) \cong -\varphi_x(z)$$

$$\varphi_x(z) = \int \chi_x(z)dz + a_1$$
$$v_0(z) \cong -\int \varphi_x(z)dz + a_2$$

$$v_0''(z) = -\chi_x(z) = -\frac{M_x(z)}{EI_x} - \chi_x^{(a)}(z) \qquad (30)$$

$$\varphi_x(z) = -v_0'(z) = \int \frac{M_x(z)}{EI_x} + \chi_x^{(a)}(z)\, dz + a_1$$

$$v_0(z) \cong -\int \varphi_x(z)dz + a_2$$

Metodo 1: integrazione della linea elastica del secondo ordine

Equilibrio nei punti di discontinuità

$$\Delta T = -F_y$$
$$\Delta M' = -F_y$$
$$\Delta M = -\mathcal{M}$$

1

Equazioni indefinite di equilibrio

$$T'(z) = -q(z)$$
$$M'(z) = T(z)$$

Legame costitutivo

2

$$\chi_x(z) = \frac{M_x(z)}{EI_x} + \chi_x^{(a)}(z)$$

Congruenza

3

$$\varphi_x'(z) = \chi_x(z)$$
$$v_0'(z) \cong -\varphi_x(z)$$

$$\varphi_x(z) = \int \chi_x(z)\,dz + a_1$$
$$v_0(z) \cong -\int \varphi_x(z)\,dz + a_2$$

N.B. Per la risoluzione dei sistemi strutturali attraverso il metodo qui descritto, è necessario suddividere la struttura in tratti "omogenei" (delimitati da punti di discontinuità delle caratteristiche della sollecitazione o dello spostamento/rotazione).

Per ogni equazione della linea elastica (relativa, cioè, ad ogni tratto "omogeneo") è necessario determinare due costanti di integrazione, mediante delle condizioni al contorno sugli spostamenti o sulle rotazioni (condizioni al contorno cinematiche).

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Metodo 2: integrazione della linea elastica del quarto ordine

Equilibrio nei punti di discontinuità	$\Delta T = -F_y$ $\Delta M' = -F_y$ $\Delta M = -\mathcal{M}$

Equazioni indefinite di equilibrio	$T'(z) = -q(z)$ $M'(z) = T(z)$
Legame costitutivo	$\chi_x(z) = \frac{M_x(z)}{EI_x} + \chi_x^{(a)}(z)$
Congruenza	$\varphi_x'(z) = \chi_x(z)$ $v_0'(z) \cong -\varphi_x(z)$

Sostituendo le equazioni di congruenza nelle equazioni di legame costitutivo, e quindi queste ultime nelle equazioni di equilibrio, si ottiene la seguente equazione differenziale del quarto ordine:

$$\left(E\,I_x\left(v_0''(z) + \chi_x^{(a)}(z)\right)\right)'' = q(z) \qquad (31)$$

che nel caso di travi in materiale omogeneo e sezione trasversale costante si semplifica come segue:

$$E\,I_x v_0^{iv}(z) = q(z) - \chi_x''^{(a)}(z) \qquad (32)$$

La (32) può essere integrata per calcolare tutte le incognite del problema in esame.

Visto che la (32) è una equazione differenziale del quarto ordine, il metodo che ne deriva è detto della "integrazione della equazione differenziale della linea elastica del quarto ordine".

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Metodo 2: integrazione della linea elastica del quarto ordine

Equilibrio nei punti di discontinuità	$\Delta T = -F_y$ $\Delta M' = -F_y$ $\Delta M = -\mathcal{M}$

Equazioni indefinite di equilibrio	$T'(z) = -q(z)$ $M'(z) = T(z)$
Legame costitutivo	$\chi_x(z) = \dfrac{M_x(z)}{EI_x} + \chi_x^{(a)}(z)$
Congruenza	$\varphi_x'(z) = \chi_x(z)$ $v_0'(z) \cong -\varphi_x(z)$

Oss.

1. le equazioni del quarto ordine così determinate

$$\left(E\,I_x\left(v_0''(z) + \chi_x^{(a)}(z)\right)\right)'' = q(z) \qquad (31)$$

$$E\,I_x v_0^{iv}(z) = q(z) - \chi_x''^{(a)}(z) \qquad (32)$$

dipendono solo dal carico applicato alla struttura e quindi non richiedono la preventiva determinazione del momento flettente e del taglio:

2. la curvatura anelastica è assimilata ad un carico esterno

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Metodo 2: integrazione della linea elastica del quarto ordine

Equilibrio nei punti di discontinuità	$\Delta T = -F_y$ $\Delta M' = -F_y$ $\Delta M = -\mathcal{M}$	
Equazioni indefinite di equilibrio	$T'(z) = -q(z)$ $M'(z) = T(z)$	$T_y(z) = -\int q(z)\,dz + c_1$ $M_x(z) = \int T_y(z)\,dz + c_2$
Legame costitutivo	$\chi_x(z) = \frac{M_x(z)}{EI_x} + \chi_x^{(a)}(z)$	
Congruenza	$\varphi_x'(z) = \chi_x(z)$ $v_0'(z) \cong -\varphi_x(z)$	$\varphi_x(z) = \int \chi_x(z)\,dz + c_3$ $v_0(z) \cong -\int \varphi_x(z)\,dz + c_4$

Oss.

$$\left(E\,I_x\left(v_0''(z) + \chi_x^{(a)}(z)\right)\right)'' = q(z) \qquad (31)$$

$$E\,I_x v_0^{iv}(z) = q(z) - \chi_x''^{(a)}(z) \qquad (32)$$

3. integrando la (32) (o la (31)), per ogni tratto omogeneo della struttura si può determinare la funzione $v_0(z)$ a meno di quattro constanti di integrazione, le quali possono essere determinate imponendo delle condizioni al contorno statiche (relative alle caratteristiche della sollecitazione) o cinematiche (relative allo spostamento verticale o alla rotazione).

Le costanti di integrazione possono essere determinate come indicato a fianco, o come descritto nella slide seguente.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Metodo 2: integrazione della linea elastica del quarto ordine

Equilibrio nei punti di discontinuità	$\Delta T = -F_y$ $\Delta M' = -F_y$ $\Delta M = -\mathcal{M}$	
Equazioni indefinite di equilibrio	$T'(z) = -q(z)$ $M'(z) = T(z)$	$T_y(z) = -\int q(z)dz + c_1$ $M_x(z) = \int T_y(z)dz + c_2$
Legame costitutivo	$\chi_x(z) = \frac{M_x(z)}{EI_x} + \chi_x^{(a)}(z)$	
Congruenza	$\varphi_x'(z) = \chi_x(z)$ $v_0'(z) \cong -\varphi_x(z)$	$\varphi_x(z) = \int \chi_x(z)dz + c_3$ $v_0(z) \cong -\int \varphi_x(z)dz + c_4$

$$\left(E\,I_x\left(v_0''(z) + \chi_x^{(a)}(z)\right)\right)'' = q(z) \quad (31)$$

$$E\,I_x v_0^{iv}(z) = q(z) - \chi_x''^{(a)}(z) \quad (32)$$

Cost. di integr.

$v_0(z)$ — c_1, c_2, c_3, c_4

$\varphi_x(z) = -v_0'(z)$ — c_1, c_2, c_3

$M_x(z) = -EI_x\left(v_0''(z) + \chi_x^{(a)}(z)\right)$ — c_1, c_2

Ip. $EI_x = cost$

$T_y(z) = -EI_x\left(v_0'''(z) + \chi_x^{(a)\prime}(z)\right)$ — c_1

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Integrazione della linea elastica: confronti

Equilibrio nei punti di discontinuità	$\Delta T = -F_y$ $\Delta M' = -F_y$ $\Delta M = -\mathcal{M}$

Equazioni indefinite di equilibrio	$T'(z) = -q(z)$ $M'(z) = T(z)$
Legame costitutivo	$\chi_x(z) = \dfrac{M_x(z)}{EI_x} + \chi_x^{(a)}(z)$
Congruenza	$\varphi_x'(z) = \chi_x(z)$ $v_0'(z) \cong -\varphi_x(z)$

Le differenze operative rispetto al metodo dell'integrazione della linea elastica del secondo ordine sono le seguenti:

- vantaggi: si presuppone solo la conoscenza del carico esterno applicato alle travi e non è quindi necessaria la preventiva risoluzione delle equazioni di equilibrio (il metodo è <u>direttamente</u> applicabile anche per sistemi iperstatici);
- svantaggi: per ogni equazione della linea elastica è necessario determinare quattro costanti di integrazione attraverso condizioni al contorno sia cinematiche (sugli spostamenti) che statiche (sulle caratteristiche della sollecitazione.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Metodo dell'integrazione della linea elastica

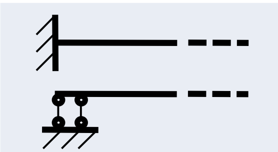
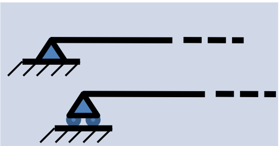
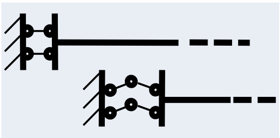
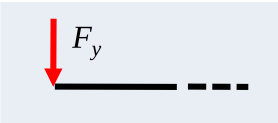
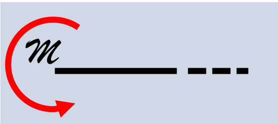
Dagli schemi precedenti è evidente che, a parte la soluzione delle equazioni differenziali, il punto operativamente più impegnativo per l'applicazione del metodo dell'integrazione della linea elastica è la definizione delle corrette condizioni al contorno corrispondenti ai particolari vincoli ed alle particolari condizioni dei nodi (punti di discontinuità) della struttura in esame. La corretta imposizione delle condizioni al contorno è necessaria per la determinazione delle costanti di integrazione.

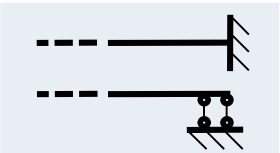
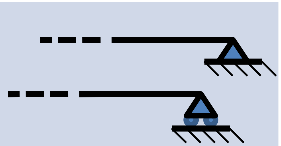
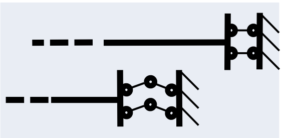
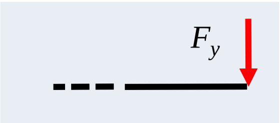
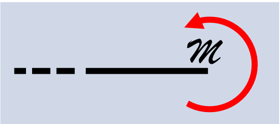
Tali condizioni possono essere imposte per "ispezione", ossia analizzando criticamente, la particolare situazione in esame.

Nelle seguenti slide si riportano le condizioni al contorno corrispondenti ad alcune frequenti condizioni di vincolo e di carico.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

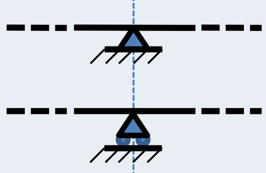
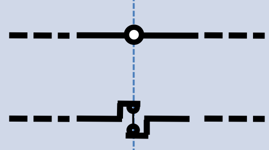
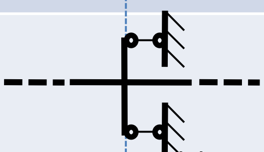
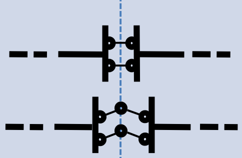
Condizioni al contorno per il metodo della linea elastica

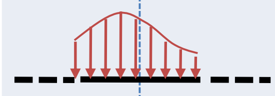
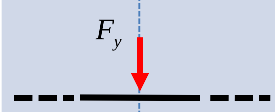
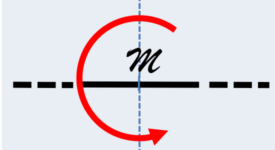
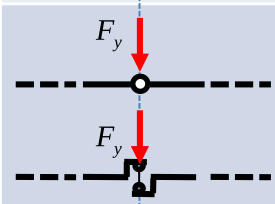
	2° ordine C.C. cinem.	4° ordine	
		C.C. statiche	C.C. cinematiche
	$v = 0$ $\varphi = 0$	$v = 0$ $\varphi = 0$	/
	$v = 0$	$v = 0$	$M_x=0$
	$\varphi = 0$	$\varphi = 0$	$T_y = 0$
	/	/	$M_x=0$ $T_y = 0$
	/	/	$M_x=0$ $T_y = -F_y$
	/	/	$M_x = -\mathcal{M}$ $T_y = 0$

	2° ordine C.C. cinem.	4° ordine	
		C.C. statiche	C.C. cinematiche
	$v = 0$ $\varphi = 0$	$v = 0$ $\varphi = 0$	/
	$v = 0$	$v = 0$	$M_x=0$
	$\varphi = 0$	$\varphi = 0$	$T_y = 0$
	/	/	$M_x=0$ $T_y = 0$
	/	/	$M_x=0$ $T_y = F_y$
	/	/	$M_x = \mathcal{M}$ $T_y = 0$

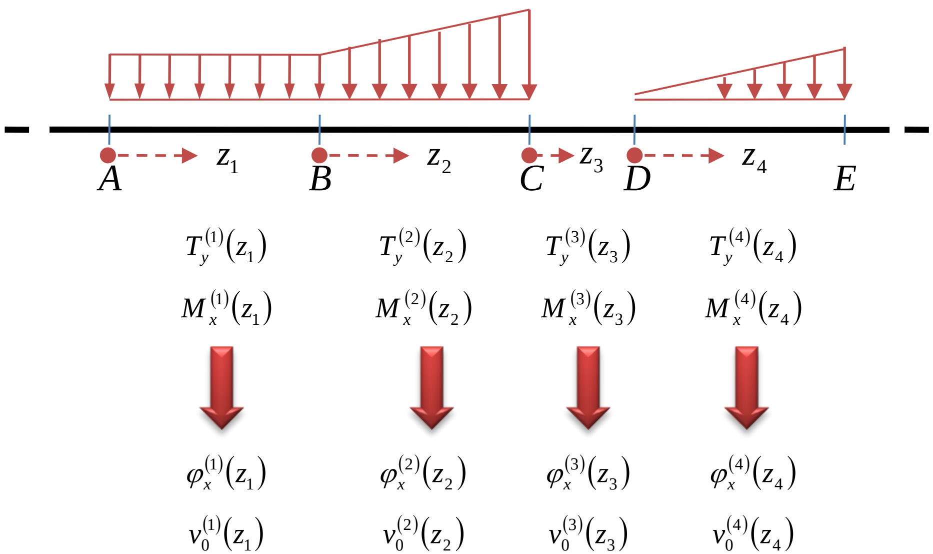
Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Condizioni al contorno per il metodo della linea elastica

$(s)\rightarrow\mid\leftarrow(d)$	2° ordine C.C. cinem.	4° ordine	
		C.C. statiche	C.C. cinematiche
	$v^{(s)} = 0$ $v^{(d)} = 0$ $\varphi^{(d)} = \varphi^{(s)}$	$v^{(s)} = 0$ $v^{(d)} = 0$ $\varphi^{(d)} = \varphi^{(s)}$	$M^{(d)}-M^{(s)}=0$
	$v^{(d)}=v^{(s)}$	$v^{(d)}=v^{(s)}$	$M^{(s)} = 0$ $M^{(d)} = 0$ $T^{(d)}-T^{(s)}=0$
 Doppiopendolo intermedio esterno	$\varphi^{(s)}=0$ $\varphi^{(d)}=0$ $v^{(d)}=v^{(s)}$	$\varphi^{(s)}=0$ $\varphi^{(d)}=0$ $v^{(d)}=v^{(s)}$	$T^{(d)}-T^{(s)}=0$
	$\varphi^{(d)} = \varphi^{(s)}$	$\varphi^{(d)} = \varphi^{(s)}$	$T^{(d)}=0$ $T^{(s)}=0$ $M^{(d)}-M^{(s)}=0$

$(s)\rightarrow\mid\leftarrow(d)$	2° ordine C.C. cinem.	4° ordine	
		C.C. statiche	C.C. cinematiche
	$v^{(d)}=v^{(s)}$ $\varphi^{(d)} = \varphi^{(s)}$	$v^{(d)}=v^{(s)}$ $\varphi^{(d)} = \varphi^{(s)}$	$T^{(d)}-T^{(s)}=0$ $M^{(d)}-M^{(s)}=0$
	$v^{(d)}=v^{(s)}$ $\varphi^{(d)} = \varphi^{(s)}$	$v^{(d)}=v^{(s)}$ $\varphi^{(d)} = \varphi^{(s)}$	$T^{(d)}-T^{(s)}=-F_y$ $M^{(d)}-M^{(s)}=0$
	$v^{(d)}=v^{(s)}$ $\varphi^{(d)} = \varphi^{(s)}$	$v^{(d)}=v^{(s)}$ $\varphi^{(d)} = \varphi^{(s)}$	$T^{(d)}-T^{(s)}=0$ $M^{(d)}-M^{(s)}=-\mathcal{M}$
	$v^{(d)}=v^{(s)}$	$v^{(d)}=v^{(s)}$	$M^{(s)} = 0$ $M^{(d)} = 0$ $T^{(d)}-T^{(s)}=-F_y$

Metodo dell'integrazione della linea elastica



Si osservi che le funzioni delle caratteristiche della sollecitazione sono legate, attraverso le equazioni di legame costitutivo e di equilibrio, alle derivate delle funzioni di rotazione e di spostamento verticale. Pertanto eventuali discontinuità nelle funzioni delle caratteristiche della sollecitazione implicano anche discontinuità in quelle della rotazione e dello spostamento e quindi, nell'applicazione dei metodi dell'integrazione della linea elastica, è necessario definire tali funzioni per ogni tratto omogeneo della struttura. Queste saranno poi legate da eventuali condizioni di continuità (o di discontinuità) in corrispondenza dei nodi della struttura.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Metodo dell'integrazione della linea elastica

Viste le relazioni che intercorrono tra il carico esterno q e le incognite del problema strutturale (caratteristiche della sollecitazione, spostamento verticale e rotazione flessionale)

$$T_y(z) = -\int q(z)dz + c_1 \qquad \varphi_x(z) = \int \chi_x(z)dz + c_3$$

$$M_x(z) = \int T_y(z)dz + c_2 \qquad v_0(z) \cong -\int \varphi_x(z)dz + c_4$$

considerando travi in materiale omogeneo ed a sezione trasversale costante sulle quali è applicata al più una distorsione termica costante rispetto a z, è possibile definire a priori la relazione tra la tipologia di carico esterno e la tipologia delle funzioni che descrivono le caratteristiche della sollecitazione e le grandezze cinematiche che stiamo considerando, come descritto in tabella.

q(z)	T(z)	M(z)	χ(z)	φ(z)	v_0(z)
costante=0	costante=0	costante	costante	lineare	parabolico
	costante≠0	lineare	lineare	parabolico	cubico
costante≠0	lineare	parabolico	parabolico	cubico	4° grado
lineare	parabolico	cubico	cubico	4° grado	5° grado
…	…	…	…	…	…

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831