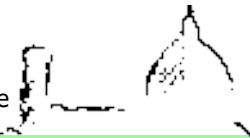


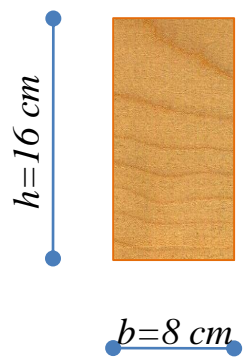
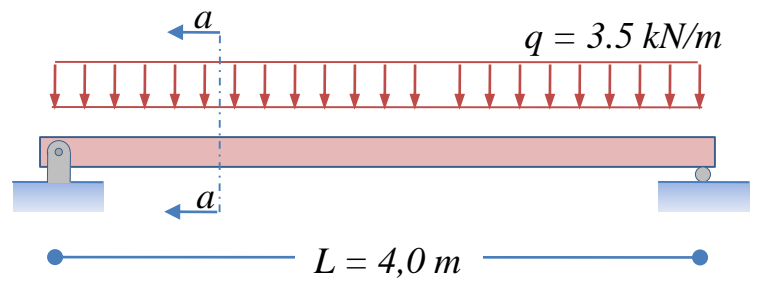


Verifica di una trave appoggiata-appoggiata

Applicazione del metodo dell'integrazione della linea elastica del secondo ordine



Verifica di una trave appoggiata-appoggiata



Sezione a-a

La trave appoggiata-appoggiata schematizzata in figura è realizzata in legno di abete ($E=10GPa$) ed è caricata da un carico uniformemente ripartito come indicato in figura. La sezione trasversale è rettangolare ed ha dimensioni di 8×16 cm. Si verifichi:

1. che la massima tensione normale σ_z presente nella trave sia inferiore a $\sigma_d=10MPa$ e la massima tensione tangenziale τ_{zy} sia inferiore a $\tau_d=0.9MPa$.
2. che lo spostamento verticale massimo (freccia) f della linea d'asse sia inferiore a $1/200$ della sua luce.



OSSERVAZIONE

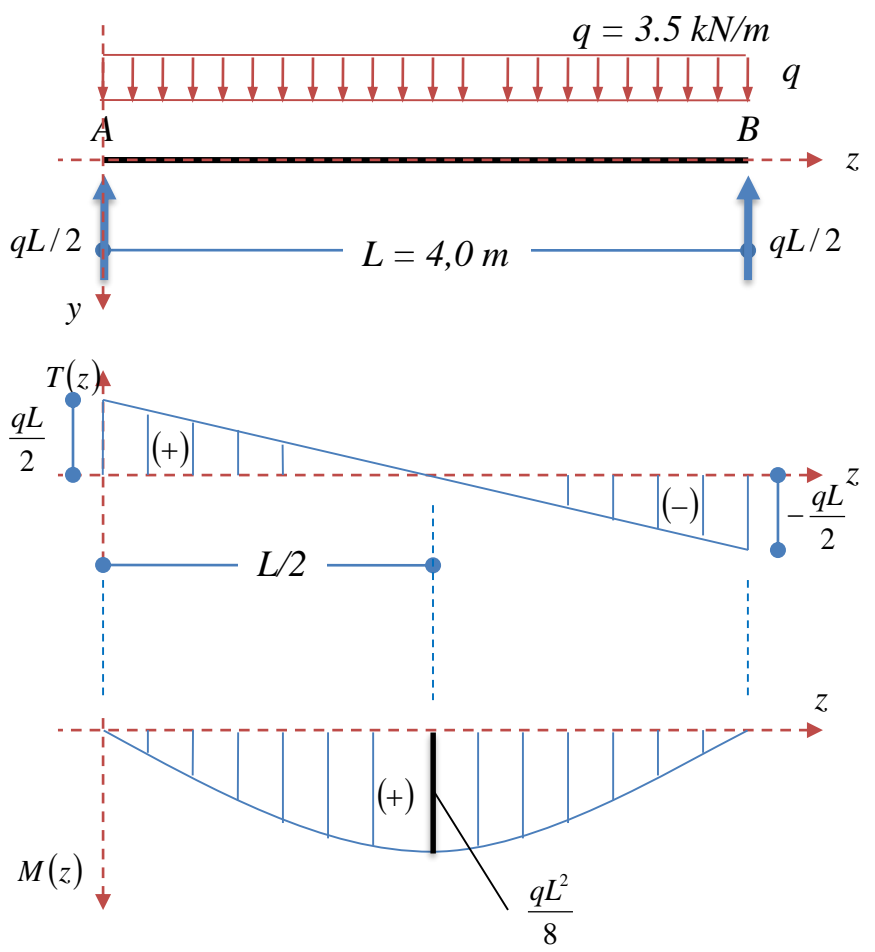
Si osservi che il presente problema strutturale è contemporaneamente un problema di resistenza (verifica di cui al punto 1) e di rigidezza (verifica di cui al punto 2 del testo). Nelle applicazioni pratiche è infatti molto frequente che alle strutture venga richiesto (in funzione del particolare utilizzo o perché prescritto dalle norme) contemporaneamente di resistere a certe azioni e di avere spostamenti limitati.

Si osservi che, al fine di impostare tali problemi, è stato necessario definire un criterio di resistenza ed un criterio di rigidezza. In particolare stiamo implicitamente utilizzando i seguenti criteri:

- criterio di resistenza: le componenti massime di tensione devono essere inferiori a certi valori "di progetto" per il materiale (metodo delle tensioni ammissibili). Tale criterio (delle tensioni ammissibili appunto), ormai praticamente superato dalle Nuove Norme Tecniche, è qui utilizzato in quanto, vista la sua semplicità di applicazione, può essere agevolmente applicato in questa fase del corso.
- criterio di rigidezza: è richiesto che la freccia sia inferiore ad un duecentesimo della luce della trave. Tale verifica è richiesta dalle norme per le travi appartenenti a sistemi strutturali secondari (es. arcarecci di copertura).



Verifica di una trave appoggiata-appoggiata



È ben noto che per la trave in esame le uniche caratteristiche della sollecitazione non nulle sono quelle diagrammate in figura. Le sollecitazioni massime hanno i seguenti valori:

$$T_{\max} = \frac{qL}{2} = 7 \text{ kN}$$

$$M_{\max} = \frac{qL^2}{8} = 7 \text{ kN m}$$

Utilizzando la formula di Jourawsky e di Navier si calcolano le tensioni tangenziali e normali massime come segue

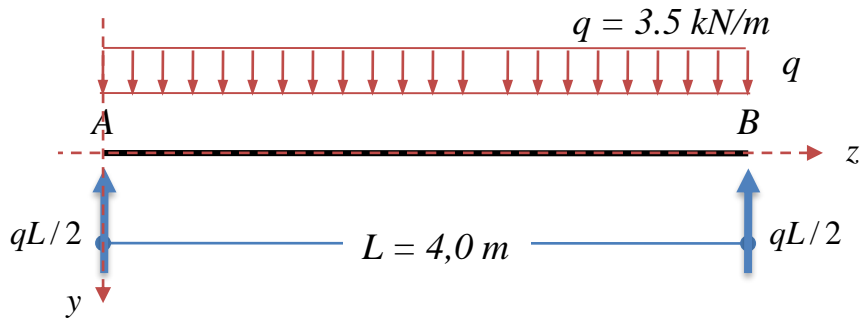
$$\bar{\tau}_{zy\max} = \frac{T_y(z) \cdot S_x^{(A_2)}}{b \cdot I_x} = \frac{3}{2} \frac{T_{\max}}{A} = 0,8 \text{ MPa} < \tau_{amm}$$

$$\sigma_{z\max} = \frac{M_{\max}}{I_x} \frac{h}{2} = 20,5 \text{ MPa} < \sigma_{amm}$$

Tali verifiche sono entrambe soddisfatte.



Verifica di una trave appoggiata-appoggiata



Per effettuare la verifica di rigidità della struttura è necessario calcolare lo spostamento verticale massimo dell'asse della trave. A tal fine procediamo come segue:

- nota la legge del momento flettente, calcoliamo la curvatura flessionale attraverso i legami costitutivi;
- calcoliamo la funzione delle rotazioni φ_x integrando la legge della curvatura
- calcoliamo la funzione degli spostamenti verticali (detta linea elastica) integrando la funzione rotazione φ_x .

La freccia può poi essere calcolata come il valore massimo della linea elastica.

$$M_x(z)$$

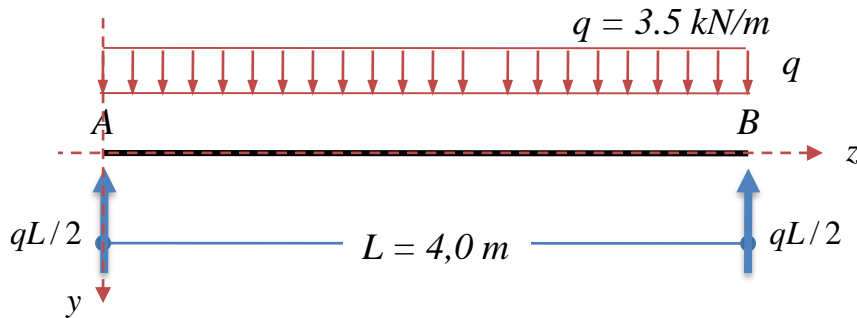
$$\chi_x(z) = \frac{M_x(z)}{EI_x} + \chi_x^{(a)}(z)$$

$$\chi_x(z) = \varphi_x'(z) \rightarrow \varphi_x(z) = \int \chi_x(z) dz + a_1$$

$$\varphi_x(z) \cong -v_0'(z) \rightarrow v_0(z) = -\int \varphi_x(z) dz + a_2$$



Verifica di una trave appoggiata-appoggiata



Le costanti di integrazione a_1 e a_2 presenti nelle espressioni riportate a fianco si calcolano dalle condizioni al contorno di compatibilità delle funzioni della rotazione e della linea elastica con i vincoli presenti nella struttura.

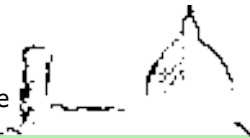
$$M_x(z)$$

$$\chi_x(z) = \frac{M_x(z)}{EI_x} + \chi_x^{(a)}(z)$$

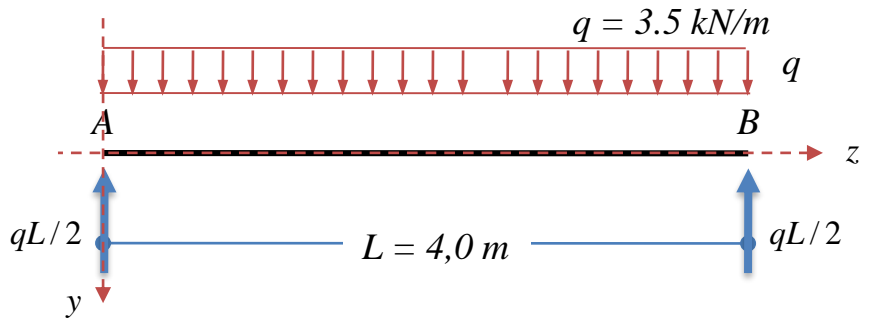
$$\chi_x(z) = \varphi_x'(z) \rightarrow \varphi_x(z) = \int \chi_x(z) dz + a_1$$

$$\varphi_x(z) \cong -v_0'(z) \rightarrow v_0(z) = -\int \varphi_x(z) dz + a_2$$

Il metodo descritto, detto dell'integrazione della linea elastica, nella forma qui indicata è sempre utilizzabile per i sistemi isostatici per i quali è possibile determinare la legge del momento flettente attraverso sole condizioni di equilibrio.



Verifica di una trave appoggiata-appoggiata



La legge del momento per la struttura in esame è la seguente:

$$M_x(z) = \frac{qL}{2}z - \frac{qz^2}{2}$$

Nel sistema in esame non sono presenti gradienti termici e quindi la curvatura totale è pari alla sola aliquota elastica come segue

$$\chi_x(z) = \frac{M_x(z)}{EI_x} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{qL}{2}z - \frac{qz^2}{2} \right)$$

La funzione rotazione si calcola come segue

$$\varphi_x(z) = \int \chi_x(z) dz + a_1 = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{qL}{4}z^2 - \frac{qz^3}{6} \right) + a_1$$

e la linea elastica è la seguente

$$v_0(z) = -\int \varphi_x(z) dz + a_2 = -\frac{1}{EI_x} \left(\frac{qL}{12}z^3 - \frac{qz^4}{24} \right) - a_1z + a_2$$

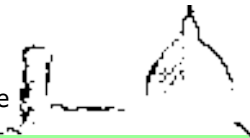


$$M_x(z)$$

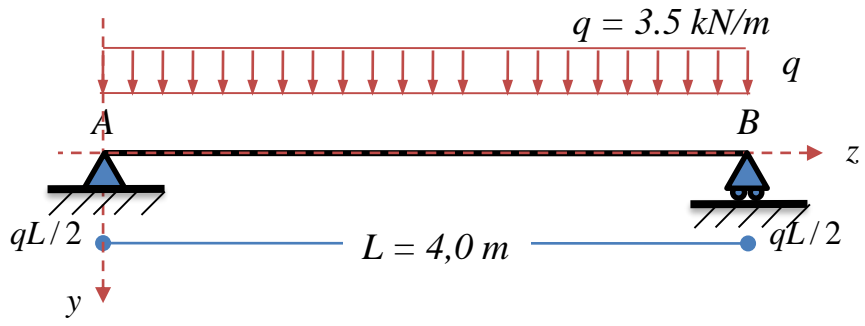
$$\chi_x(z) = \frac{M_x(z)}{EI_x} + \chi_x^{(a)}(z)$$

$$\chi_x(z) = \varphi'_x(z) \rightarrow \varphi_x(z) = \int \chi_x(z) dz + a_1$$

$$\varphi_x(z) \cong -v'_0(z) \rightarrow v_0(z) = -\int \varphi_x(z) dz + a_2$$



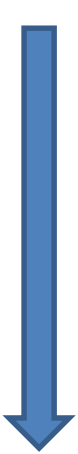
Verifica di una trave appoggiata-appoggiata



Le costanti di integrazione presenti nelle funzioni di spostamento verticale e di rotazione possono essere determinate attraverso le condizioni al contorno, ossia delle condizioni che impongono che tali funzioni rispettino i vincoli presenti nella struttura. In pratica, fra le infinite funzioni definite dalle due costanti di integrazione, si determinano le uniche (per il teorema di unicità della soluzione del problema elastico) compatibili con i vincoli.

Affinché siano rispettati i vincoli presenti nella struttura, lo spostamento verticale deve essere tal2 che

$$\begin{cases} v_0(z=0) = 0 \rightarrow a_2 = 0 \\ v_0(z=L) = 0 \rightarrow a_1 = -\frac{qL^3}{24EI_x} \end{cases}$$



$$M_x(z)$$

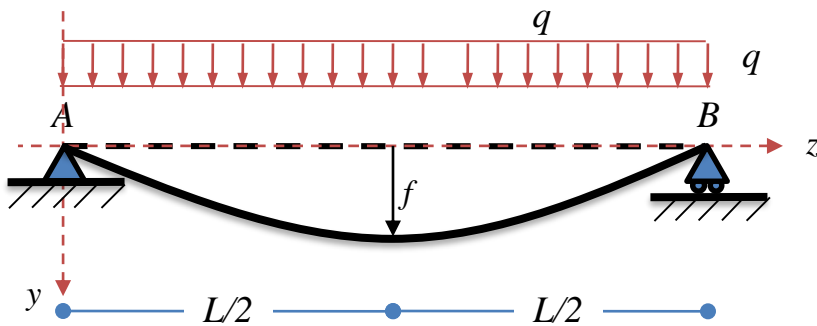
$$\chi_x(z) = \frac{M_x(z)}{EI_x} + \chi_x^{(a)}(z)$$

$$\chi_x(z) = \varphi_x'(z) \rightarrow \varphi_x(z) = \int \chi_x(z) dz + c_1$$

$$\varphi_x(z) \cong -v_0'(z) \rightarrow v_0(z) = -\int \varphi_x(z) dz + c_2$$



Verifica di una trave appoggiata-appoggiata



Utilizzando i precedenti valori si ottengono le seguenti espressioni

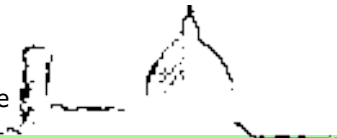
$$\varphi_x(z) = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{qL^3}{24} + \frac{qL}{4} z^2 - \frac{qz^3}{6} \right)$$

$$v_0(z) = \frac{q}{12EI_x} \left(\frac{L^3}{2} z - Lz^3 + \frac{z^4}{2} \right)$$

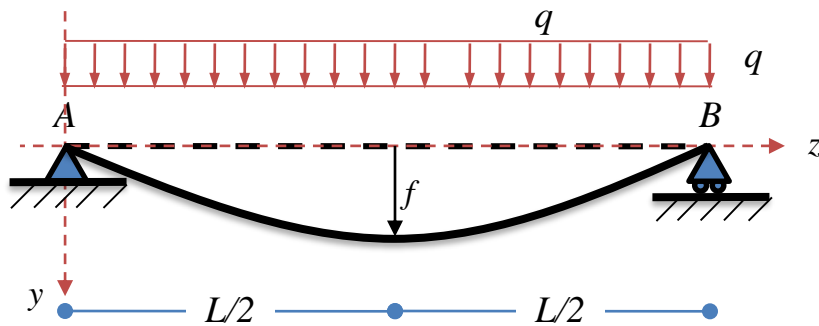
Per la simmetria del problema in esame, lo spostamento verticale massimo si ha in corrispondenza della mezzeria della trave e vale

$$f = v_0(z = L/2) = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI_x} = 42\text{mm}$$

Il precedente valore è maggiore di $L/200 = 20\text{mm}$ e pertanto la verifica di rigidità non è soddisfatta.



Verifica di una trave appoggiata-appoggiata



Affinché la verifica di rigidezza sia soddisfatta è necessario aumentare la rigidezza flessionale della sezione trasversale. A tal fine è possibile:

1. utilizzare un materiale che abbia modulo elastico maggiore;
2. incrementare il momento d'inerzia della sezione trasversale.

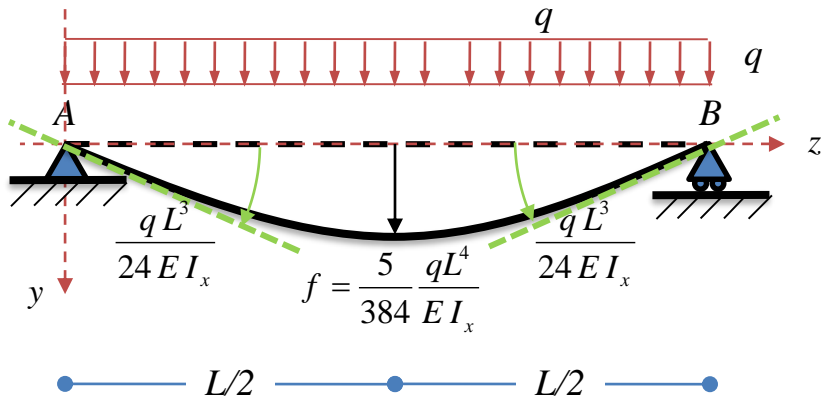
Così come si fa di norma nella pratica professionale, imponiamo il soddisfacimento della verifica di rigidezza incrementando il momento d'inerzia della sezione trasversale. Utilizzando il criterio di rigidezza che abbiamo considerato si calcola:

$$f \leq \frac{L}{200} \rightarrow \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI_x} \leq \frac{L}{200} \rightarrow I_x \geq \frac{5 \cdot 200}{384} \frac{qL^3}{E} \rightarrow I_x \geq 5.8 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$

Può allora essere utilizzata ad esempio una sezione trasversale rettangolare di dimensioni $10 \times 20 \text{ cm}$. È facile verificare che, utilizzando tale sezione trasversale, anche la verifica di resistenza è soddisfatta.



Verifica di una trave appoggiata-appoggiata



In figura si riportano alcuni valori notevoli di spostamento e rotazione calcolati attraverso le funzioni spostamento verticale e rotazione precedentemente determinate.