



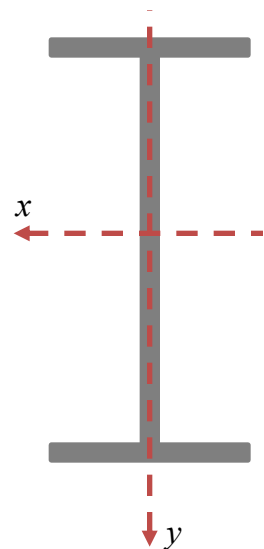
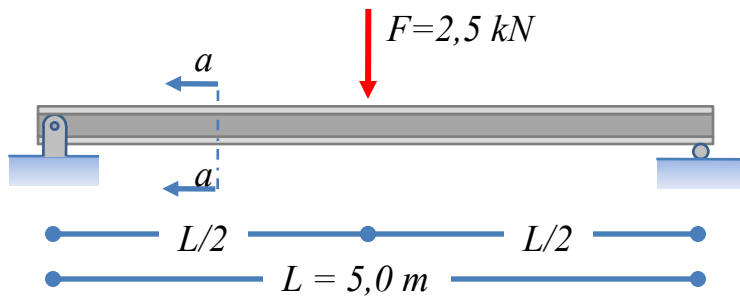
# Verifica di una trave appoggiata-appoggiata caricata da una forza concentrata in mezzzeria

---

Applicazione del metodo dell'integrazione della linea elastica



## Esempio



IPE 100

$$A = 1'035 \text{ mm}^2$$

$$I_x = 1'715'000 \text{ mm}^4$$

$$W_x = 34'300 \text{ mm}^3$$

$$S_x^{(A1)} = 18'703 \text{ mm}^3$$

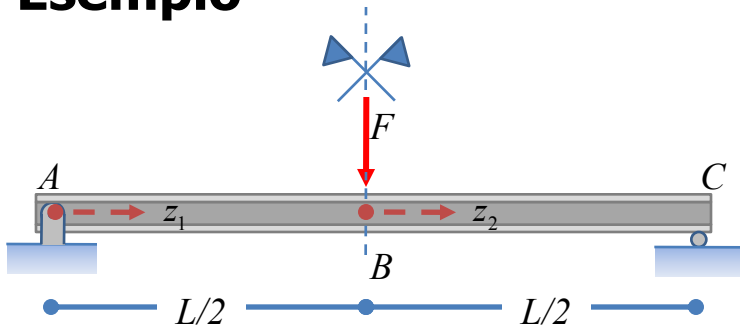
La trave in acciaio ( $E=210\text{GPa}$ ) schematizzata in figura ha sezione trasversale IPE 100, le cui caratteristiche principali sono indicate in figura.

Si verifichi:

1. che la massima tensione normale  $\sigma_z$  presente nella trave sia inferiore a  $\sigma_d=160\text{MPa}$  e la massima tensione tangenziale  $\tau_{zy}$  sia inferiore a  $\tau_d=92\text{MPa}$
2. che lo spostamento verticale massimo (freccia)  $f$  della linea d'asse sia inferiore a  $1/200$  della sua luce (verifica di deformabilità per travi secondarie).



## Esempio

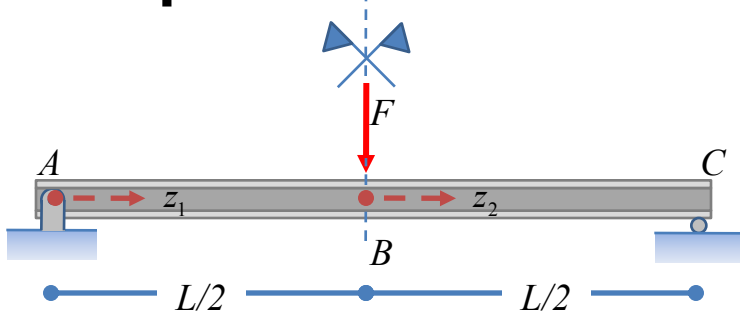


Le struttura è chiaramente composta da due tratti omogenei, per ognuno dei quali devono essere determinate le funzioni delle caratteristiche della sollecitazione, degli spostamenti verticali e della rotazione.

Di seguito applicheremo sia il metodo dell'integrazione della linea elastica del quarto ordine, sia quello dell'integrazione della linea elastica del secondo ordine.



## Esempio: linea elastica del quarto ordine



Tratto AB ( $0 \leq z_1 \leq L/2$ )

Tratto BC ( $0 \leq z_2 \leq L/2$ )

$$T_y^{(1)}(z_1) = -\int q(z_1) dz_1 + c_{1(1)}$$

$$T_y^{(2)}(z_2) = -\int q(z_2) dz_2 + c_{1(2)}$$

$$M_x^{(1)}(z_1) = \int T_y^{(1)}(z_1) dz_1 + c_{2(1)}$$

$$M_x^{(2)}(z_2) = \int T_y^{(2)}(z_2) dz_2 + c_{2(2)}$$

$$\chi_x^{(1)}(z_1) = \frac{M_x^{(1)}(z_1)}{EI_x} + \chi_x^{(a)}(z_1)$$

$$\chi_x^{(2)}(z_2) = \frac{M_x^{(2)}(z_2)}{EI_x} + \chi_x^{(a)}(z_2)$$

$$\varphi_x^{(1)}(z_1) = \int \chi_x^{(1)}(z_1) dz_1 + c_{3(1)}$$

$$\varphi_x^{(2)}(z_2) = \int \chi_x^{(2)}(z_2) dz_2 + c_{3(2)}$$

$$v_0^{(1)}(z_1) \cong -\int \varphi_x^{(1)}(z_1) dz_1 + c_{4(1)}$$

$$v_0^{(2)}(z_2) \cong -\int \varphi_x^{(2)}(z_2) dz_2 + c_{4(2)}$$

Iniziamo con il metodo dell'integrazione della linea elastica del quarto ordine. È necessario definire le funzioni delle caratteristiche della sollecitazione, della rotazione e dello spostamento verticale in entrambi i tratti omogenei della struttura. Le costanti di integrazione presenti nelle funzioni relative ai due tratti sono ovviamente differenti tra loro.

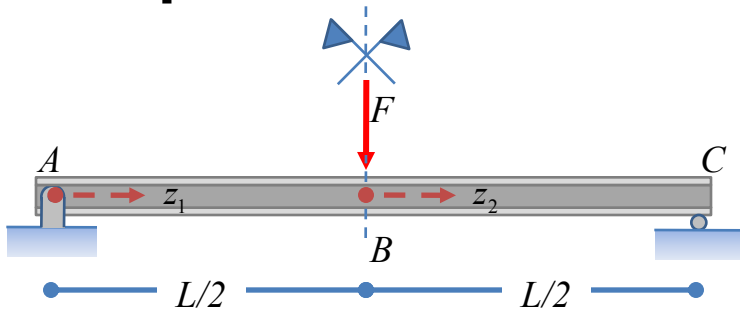
Sulla struttura non è presente un carico distribuito e quindi si ha

$$q(z_1) = q(z_2) = 0$$

Inoltre non sono presenti distorsioni termiche.



## Esempio: linea elastica del quarto ordine



Tratto AB ( $0 \leq z_1 \leq L/2$ )

Tratto BC ( $0 \leq z_2 \leq L/2$ )

$$T_y^{(1)}(z_1) = c_{1(1)}$$

$$T_y^{(2)}(z_2) = c_{1(2)}$$

$$M_x^{(1)}(z_1) = c_{1(1)}z_1 + c_{2(1)}$$

$$M_x^{(2)}(z_2) = c_{1(2)}z_2 + c_{2(2)}$$

$$\chi_x^{(1)}(z_1) = \frac{c_{1(1)}z_1 + c_{2(1)}}{EI_x}$$

$$\chi_x^{(2)}(z_2) = \frac{c_{1(2)}z_2 + c_{2(2)}}{EI_x}$$

$$\varphi_x^{(1)}(z_1) = \frac{1}{EI_x} \left( c_{1(1)} \frac{z_1^2}{2} + c_{2(1)}z_1 \right) + c_{3(1)}$$

$$\varphi_x^{(2)}(z_2) = \frac{1}{EI_x} \left( c_{1(2)} \frac{z_2^2}{2} + c_{2(2)}z_2 \right) + c_{3(2)}$$

$$v_0^{(1)}(z_1) \cong -\frac{1}{EI_x} \left( c_{1(1)} \frac{z_1^3}{6} + c_{2(1)} \frac{z_1^2}{2} \right) - c_{3(1)}z_1 + c_{4(1)}$$

$$v_0^{(2)}(z_2) \cong -\frac{1}{EI_x} \left( c_{1(2)} \frac{z_2^3}{6} + c_{2(2)} \frac{z_2^2}{2} \right) - c_{3(2)}z_2 + c_{4(2)}$$

Integrando le equazioni differenziali di equilibrio e di congruenza si ottengono allora le funzioni indicate a fianco.

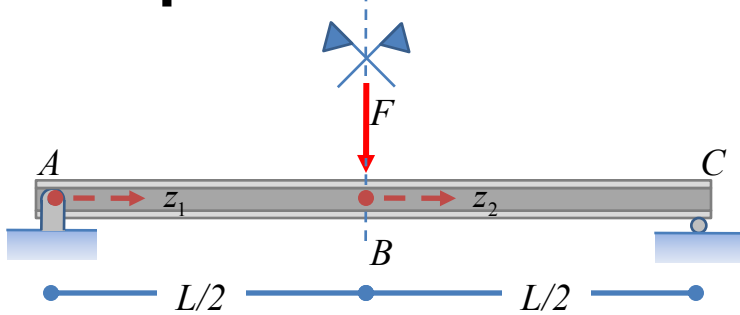
Per poter calcolare le costanti di integrazione devono essere imposte le condizioni al contorno (ossia agli estremi del dominio di definizione delle funzioni in esame e quindi in corrispondenza degli estremi *A* e *C* e della sezione intermedia *B*).

### IMPORTANTE

Nel metodo dell'integrazione della linea elastica del quarto ordine è sempre possibile scrivere due C.C. linearmente indipendenti in corrispondenza degli estremi della struttura e quattro C.C. linearmente indipendenti in corrispondenza dei nodi intermedi.



## Esempio: linea elastica del quarto ordine



Tratto AB ( $0 \leq z_1 \leq L/2$ )

$$T_y^{(1)}(z_1) = c_{1(1)}$$

$$M_x^{(1)}(z_1) = c_{1(1)}z_1 + c_{2(1)}$$

$$\chi_x^{(1)}(z_1) = \frac{c_{1(1)}z_1 + c_{2(1)}}{EI_x}$$

$$\varphi_x^{(1)}(z_1) = \frac{1}{EI_x} \left( c_{1(1)} \frac{z_1^2}{2} + c_{2(1)}z_1 \right) + c_{3(1)}$$

$$v_0^{(1)}(z_1) \cong -\frac{1}{EI_x} \left( c_{1(1)} \frac{z_1^3}{6} + c_{2(1)} \frac{z_1^2}{2} \right) - c_{3(1)}z_1 + c_{4(1)}$$

Tratto BC ( $0 \leq z_2 \leq L/2$ )

$$T_y^{(2)}(z_2) = c_{1(2)}$$

$$M_x^{(2)}(z_2) = c_{1(2)}z_2 + c_{2(2)}$$

$$\chi_x^{(2)}(z_2) = \frac{c_{1(2)}z_2 + c_{2(2)}}{EI_x}$$

$$\varphi_x^{(2)}(z_2) = \frac{1}{EI_x} \left( c_{1(2)} \frac{z_2^2}{2} + c_{2(2)}z_2 \right) + c_{3(2)}$$

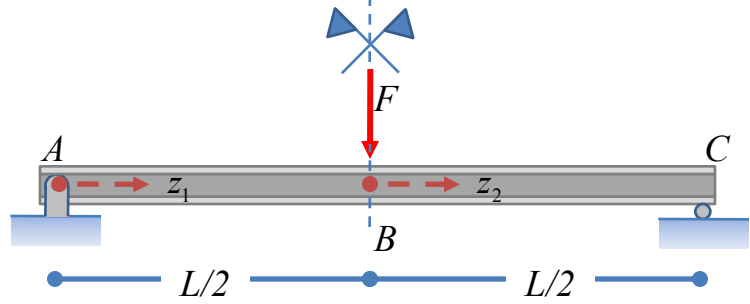
$$v_0^{(2)}(z_2) \cong -\frac{1}{EI_x} \left( c_{1(2)} \frac{z_2^3}{6} + c_{2(2)} \frac{z_2^2}{2} \right) - c_{3(2)}z_2 + c_{4(2)}$$

Le condizioni al contorno possono essere statiche (ossia basate su condizioni di equilibrio tra le azioni esterne e le caratteristiche della sollecitazione) o cinematiche (ossia di continuità e di compatibilità con i vincoli delle funzioni di rotazione e di spostamento). Esse devono comunque rappresentare valori certi e noti a-priori e possono essere determinate mediante "ispezione diretta" dei nodi della struttura.

Le condizioni al contorno per la struttura in esame sono indicate nella slide seguente.



# Esempio: linea elastica del quarto ordine



## Nodo A

$$v_0^{(1)}(z_1 = 0) = 0$$

$$M_x^{(1)}(z_1 = 0) = 0$$

- ← compatibilità con il vincolo
- ← equilibrio alla rotazione

## Nodo B

$$v_0^{(1)}(z_1 = L/2) = v_0^{(2)}(z_2 = 0)$$

$$\varphi_x^{(1)}(z_1 = L/2) = \varphi_x^{(2)}(z_2 = 0)$$

$$\Delta T_y = T_y^{(2)}(z_2 = 0) - T_y^{(1)}(z_1 = L/2) = -F$$

$$\Delta M_x = M_x^{(2)}(z_2 = 0) - M_x^{(1)}(z_1 = L/2) = 0$$

- ← continuità della traslaz. vert.
- ← continuità della rotazione
- ← equil. alla traslazione vert.
- ← equilibrio alla rotazione

## Nodo C

$$v_0^{(2)}(z_2 = L/2) = 0$$

$$M_x^{(2)}(z_2 = L/2) = 0$$

- ← compatibilità con il vincolo
- ← equilibrio alla rotazione

Tratto AB ( $0 \leq z_1 \leq L/2$ )

Tratto BC ( $0 \leq z_2 \leq L/2$ )

$$T_y^{(1)}(z_1) = c_{1(1)}$$

$$M_x^{(1)}(z_1) = c_{1(1)}z_1 + c_{2(1)}$$

$$\chi_x^{(1)}(z_1) = \frac{c_{1(1)}z_1 + c_{2(1)}}{EI_x}$$

$$T_y^{(2)}(z_2) = c_{1(2)}$$

$$M_x^{(2)}(z_2) = c_{1(2)}z_2 + c_{2(2)}$$

$$\chi_x^{(2)}(z_2) = \frac{c_{1(2)}z_2 + c_{2(2)}}{EI_x}$$

$$\varphi_x^{(1)}(z_1) = \frac{1}{EI_x} \left( c_{1(1)} \frac{z_1^2}{2} + c_{2(1)} z_1 \right) + c_{3(1)}$$

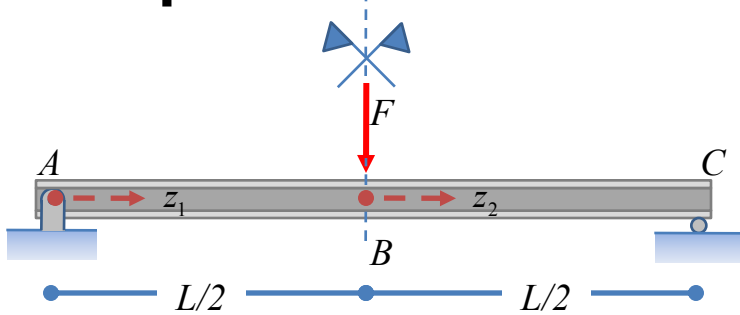
$$\varphi_x^{(2)}(z_2) = \frac{1}{EI_x} \left( c_{1(2)} \frac{z_2^2}{2} + c_{2(2)} z_2 \right) + c_{3(2)}$$

$$v_0^{(1)}(z_1) \cong -\frac{1}{EI_x} \left( c_{1(1)} \frac{z_1^3}{6} + c_{2(1)} \frac{z_1^2}{2} \right) - c_{3(1)} z_1 + c_{4(1)}$$

$$v_0^{(2)}(z_2) \cong -\frac{1}{EI_x} \left( c_{1(2)} \frac{z_2^3}{6} + c_{2(2)} \frac{z_2^2}{2} \right) - c_{3(2)} z_2 + c_{4(2)}$$



## Esempio: linea elastica del quarto ordine



Esplicitando le precedenti condizioni al contorno si ottiene un sistema di otto equazioni lineari in otto incognite la cui soluzione è la seguente:

Tratto AB ( $0 \leq z_1 \leq L/2$ )

Tratto BC ( $0 \leq z_2 \leq L/2$ )

$$T_y^{(1)}(z_1) = c_{1(1)}$$

$$T_y^{(2)}(z_2) = c_{1(2)}$$

$$M_x^{(1)}(z_1) = c_{1(1)}z_1 + c_{2(1)}$$

$$M_x^{(2)}(z_2) = c_{1(2)}z_2 + c_{2(2)}$$

$$\chi_x^{(1)}(z_1) = \frac{c_{1(1)}z_1 + c_{2(1)}}{EI_x}$$

$$\chi_x^{(2)}(z_2) = \frac{c_{1(2)}z_2 + c_{2(2)}}{EI_x}$$

$$\varphi_x^{(1)}(z_1) = \frac{1}{EI_x} \left( c_{1(1)} \frac{z_1^2}{2} + c_{2(1)}z_1 \right) + c_{3(1)}$$

$$\varphi_x^{(2)}(z_2) = \frac{1}{EI_x} \left( c_{1(2)} \frac{z_2^2}{2} + c_{2(2)}z_2 \right) + c_{3(2)}$$

$$v_0^{(1)}(z_1) \cong -\frac{1}{EI_x} \left( c_{1(1)} \frac{z_1^3}{6} + c_{2(1)} \frac{z_1^2}{2} \right) - c_{3(1)}z_1 + c_{4(1)}$$

$$v_0^{(2)}(z_2) \cong -\frac{1}{EI_x} \left( c_{1(2)} \frac{z_2^3}{6} + c_{2(2)} \frac{z_2^2}{2} \right) - c_{3(2)}z_2 + c_{4(2)}$$

$$c_{1(1)} = \frac{F}{2}$$

$$c_{1(2)} = -\frac{F}{2}$$

$$c_{2(1)} = 0$$

$$c_{2(2)} = \frac{FL}{4}$$

$$c_{3(1)} = -\frac{FL^3}{16EI_x}$$

$$c_{3(2)} = 0$$

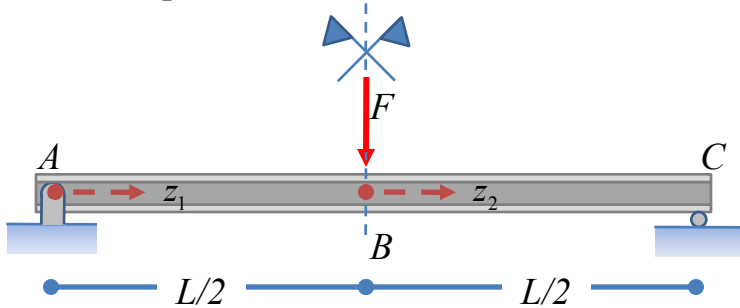
$$c_{4(1)} = 0$$

$$c_{4(2)} = \frac{FL^3}{48EI_x}$$





## Esempio: linea elastica del quarto ordine



Sostituendo le equazioni così determinate nelle funzioni delle entità statiche e cinematiche dei singoli tratti della struttura si ottengono le espressioni indicate a fianco.

Tratto AB ( $0 \leq z_1 \leq L/2$ )

Tratto BC ( $0 \leq z_2 \leq L/2$ )

$$T_y^{(1)}(z_1) = \frac{F}{2}$$

$$T_y^{(2)}(z_2) = -\frac{F}{2}$$

$$M_x^{(1)}(z_1) = \frac{F}{2} z_1$$

$$M_x^{(2)}(z_2) = \frac{F}{4} (L - 2z_2)$$

$$\chi_x^{(1)}(z_1) = \frac{F z_1}{2EI_x}$$

$$\chi_x^{(2)}(z_2) = \frac{F}{4EI_x} (L - 2z_2)$$

$$\varphi_x^{(1)}(z_1) = \frac{F}{16EI_x} (4z_1^2 - L^2)$$

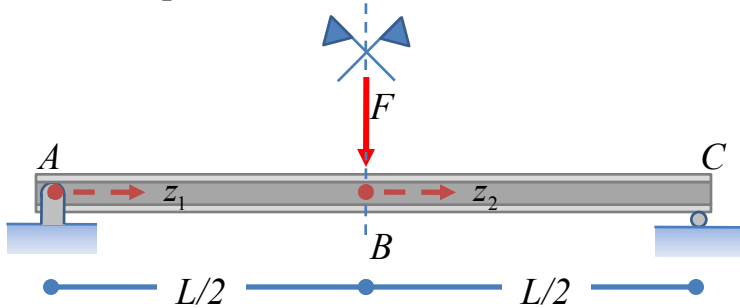
$$\varphi_x^{(2)}(z_2) = \frac{F z_2}{4EI_x} (L - z_2)$$

$$v_0^{(1)}(z_1) \cong \frac{F z_1}{48EI_x} (3L^2 - 4z_1^2)$$

$$v_0^{(2)}(z_2) \cong \frac{F}{48EI_x} (L^3 - 6Lz_2^2 + 4z_2^3)$$



## Esempio: linea elastica del secondo ordine



Tratto AB ( $0 \leq z_1 \leq L/2$ )

Tratto BC ( $0 \leq z_2 \leq L/2$ )

$$T_y^{(1)}(z_1) = \text{costante}$$

$$T_y^{(2)}(z_2) = \text{costante}$$

$$M_x^{(1)}(z_1) = \text{lineare}$$

$$M_x^{(2)}(z_2) = \text{lineare}$$

$$\chi_x^{(1)}(z_1) = \text{lineare}$$

$$\chi_x^{(2)}(z_2) = \text{lineare}$$

$$\varphi_x^{(1)}(z_1) = \text{parabolico}$$

$$\varphi_x^{(2)}(z_2) = \text{parabolico}$$

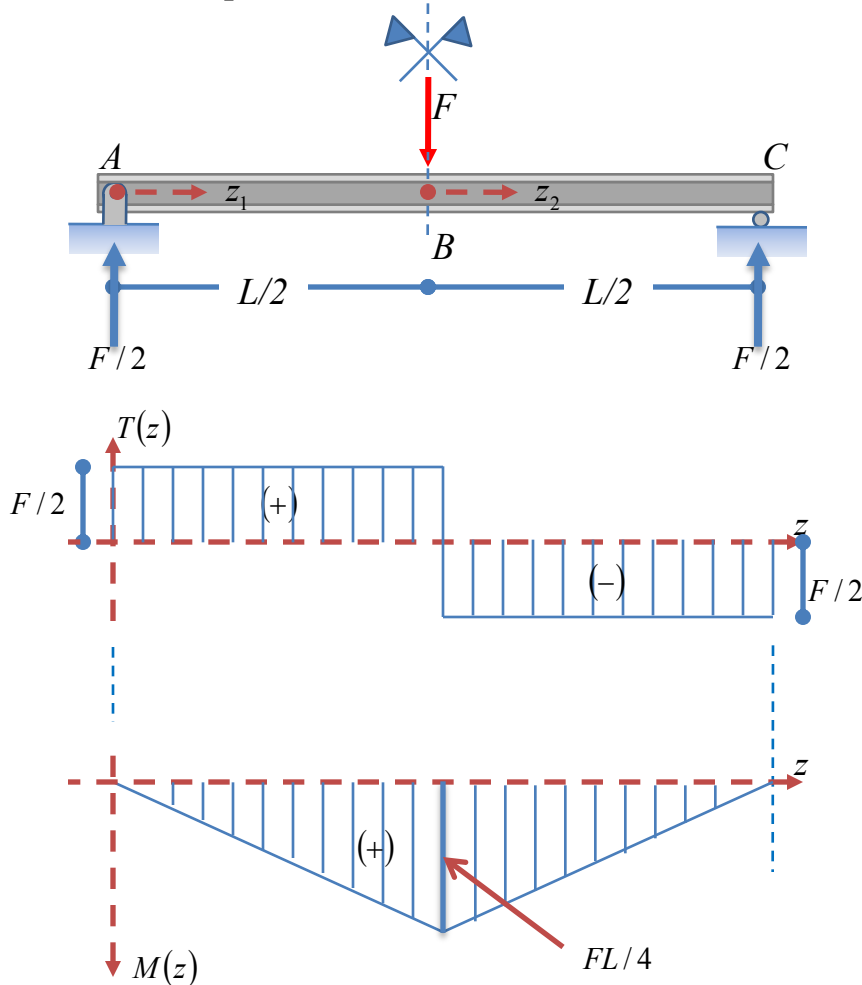
$$v_0^{(1)}(z_1) \equiv \text{cubico}$$

$$v_0^{(2)}(z_2) \equiv \text{cubico}$$

Procediamo adesso alla risoluzione della struttura in esame utilizzando il metodo dell'integrazione della linea elastica del secondo ordine. Determiniamo le caratteristiche della sollecitazione presenti nella struttura. Visto che il carico ripartito è nullo, ci aspettiamo per il taglio un andamento costante e per il momento un andamento lineare. Il momento flettente è direttamente proporzionale alla curvatura (nella struttura in esame non si hanno distorsioni termiche) e quindi anch'essa sarà lineare. Inoltre, per integrazioni successive, ci aspettiamo per la rotazione un andamento parabolico e per la linea elastica un andamento cubico. In B ci aspettiamo un salto del taglio ed una cuspidine nel momento flettente.



## Esempio: linea elastica del secondo ordine



È facile verificare che le reazioni vincolari, le leggi ed i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione sono quelli indicati in figura e di seguito.

Tratto AB ( $0 \leq z_1 \leq L/2$ )

$$T_y^{(1)}(z_1) = \frac{F}{2}$$

$$M_x^{(1)}(z_1) = \frac{F}{2} z_1$$

Tratto BC ( $0 \leq z_2 \leq L/2$ )

$$T_y^{(2)}(z_2) = -\frac{F}{2}$$

$$M_x^{(2)}(z_2) = \frac{F}{4} (L - 2z_2)$$

Utilizzando la relazione costitutiva tra momento e curvatura ed integrando si ha

$$\chi_x^{(1)}(z_1) = \frac{F}{2EI_x} z_1$$

$$\chi_x^{(2)}(z_2) = \frac{F}{4EI_x} (L - 2z_2)$$

$$\varphi_x^{(1)}(z_1) = \frac{F}{4EI_x} z_1^2 + a_{1(1)}$$

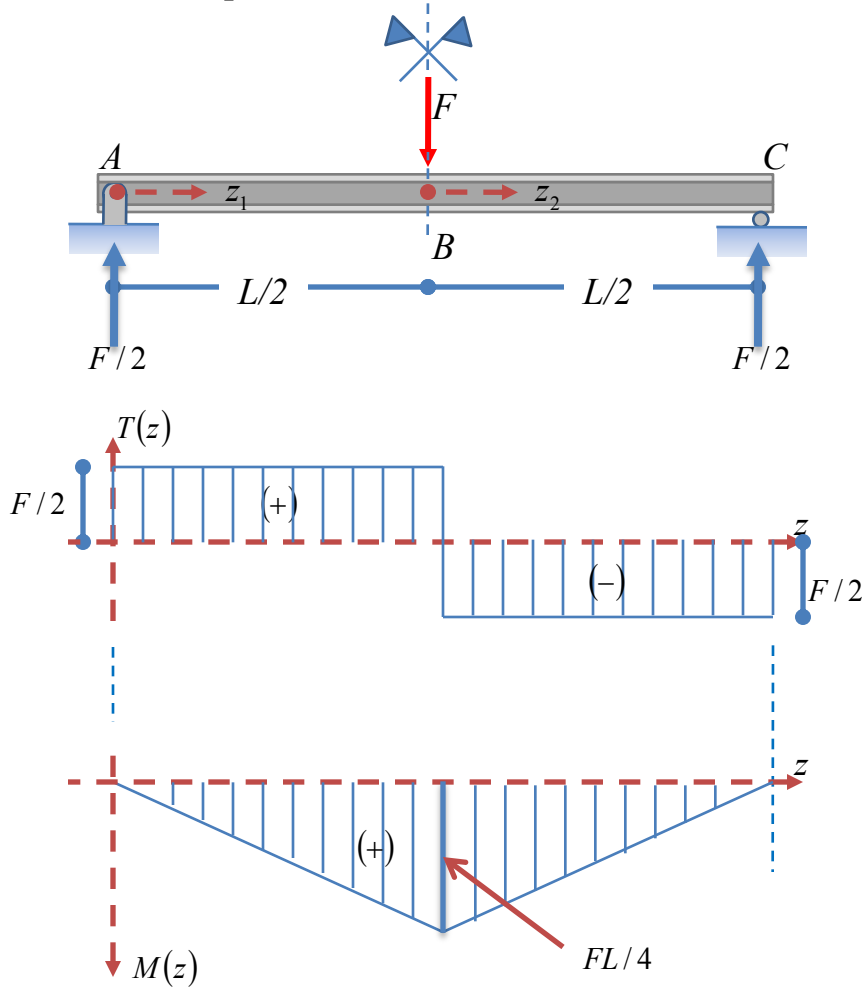
$$\varphi_x^{(1)}(z_1) = \frac{F z_2}{4EI_x} (L - z_2) + a_{1(2)}$$

$$v_0^{(1)}(z_1) \cong -\frac{F}{12EI_x} z_1^3 - a_{1(1)} z_1 + a_{2(1)}$$

$$v_0^{(1)}(z_1) \cong -\frac{F z_2^2}{4EI_x} \left( \frac{L}{2} - \frac{z_2}{3} \right) - a_{1(2)} z_2 + a_{2(2)}$$



## Esempio: linea elastica del secondo ordine



Le costanti di integrazione si determinano imponendo le condizioni al contorno cinematiche che possono essere ottenute per "ispezione" dei nodi della struttura. Tali condizioni sono rappresentative della continuità e della compatibilità con i vincoli delle funzioni di spostamento e di rotazione. Per la struttura in esame si ha

**Nodo A**  
 $v_0^{(1)}(z_1 = 0) = 0$

← compatibilità con il vincolo

**Nodo B**  
 $v_0^{(1)}(z_1 = L/2) = v_0^{(2)}(z_2 = 0)$

← continuità della traslaz. vert.

$\varphi_x^{(1)}(z_1 = L/2) = \varphi_x^{(2)}(z_2 = 0)$

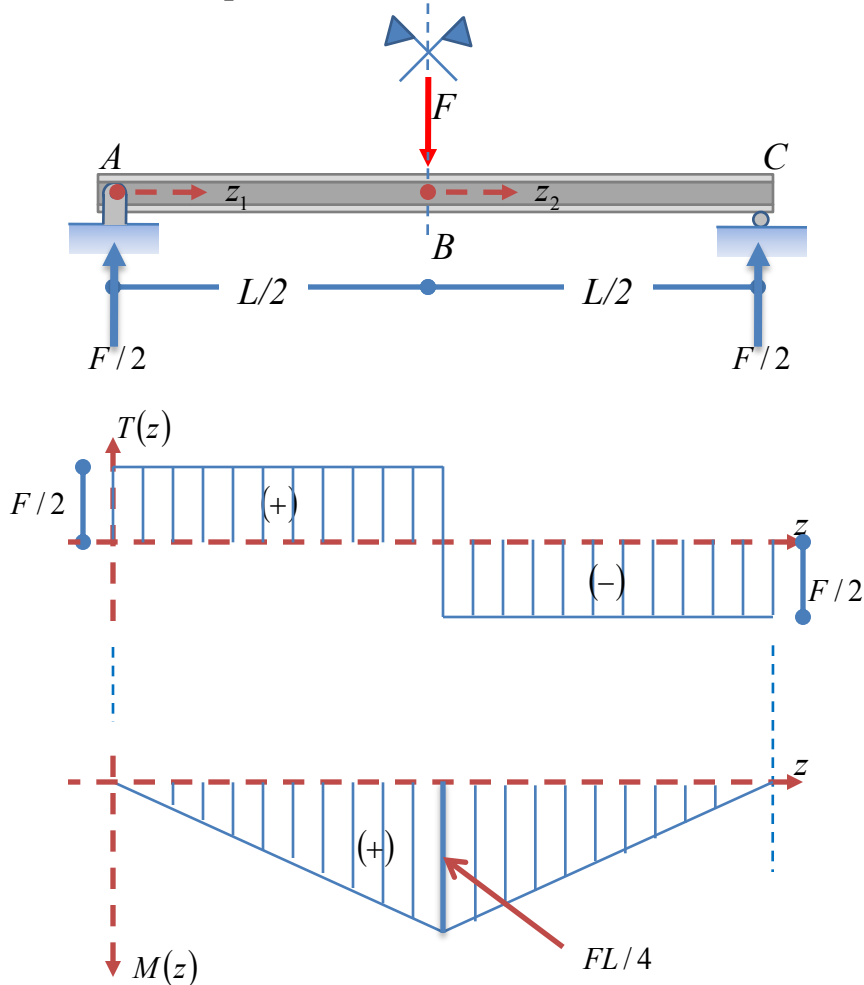
← continuità della rotazione

**Nodo C**  
 $v_0^{(2)}(z_2 = L/2) = 0$

← compatibilità con il vincolo



## Esempio: linea elastica del secondo ordine



Esplicitando le precedenti condizioni al contorno si ottiene un sistema di quattro equazioni linearmente indipendenti in quattro incognite da cui si ottengono i seguenti valori

$$a_{1(1)} = -\frac{FL^2}{16EI_x} \quad a_{1(2)} = 0$$

$$a_{2(1)} = 0 \quad a_{2(2)} = \frac{FL^3}{48EI_x}$$

che, sostituiti nelle espressioni della rotazione e dello spostamento verticale forniscono le seguenti espressioni:

Tratto AB ( $0 \leq z_1 \leq L/2$ )

$$\varphi_x^{(1)}(z_1) = \frac{F}{16EI_x} (4z_1^2 - L^2)$$

$$v_0^{(1)}(z_1) \cong \frac{Fz_1}{48EI_x} (3L^2 - 4z_1^2)$$

Tratto BC ( $0 \leq z_2 \leq L/2$ )

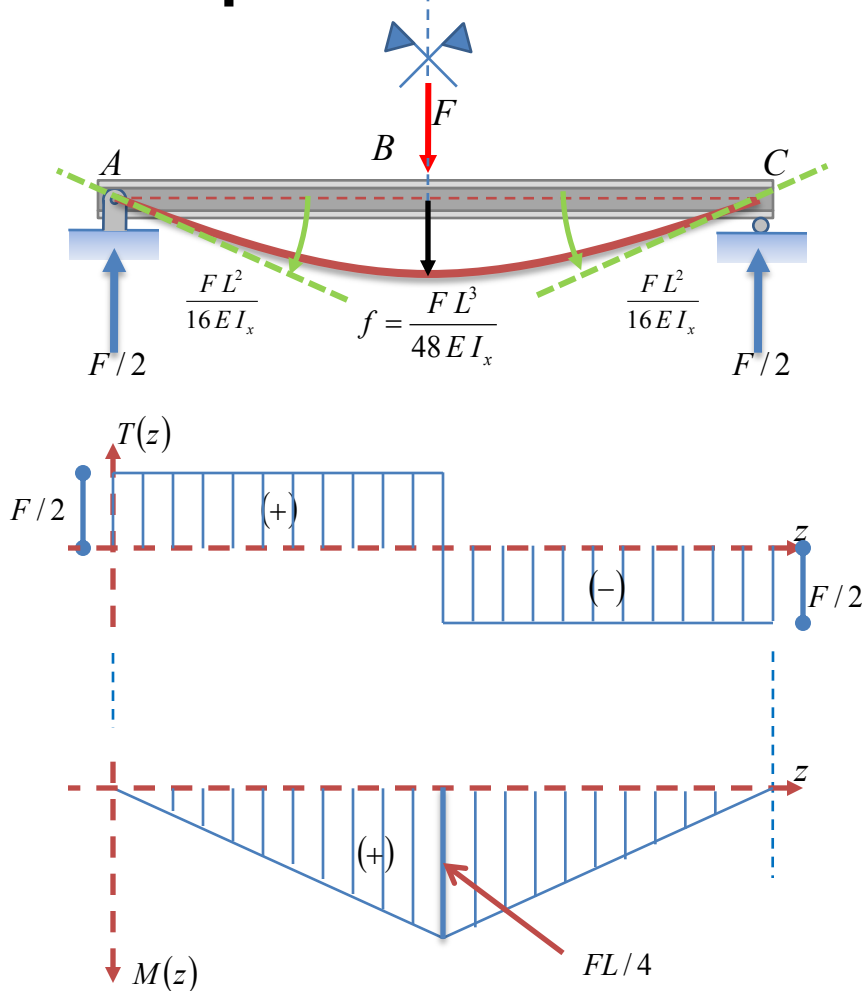
$$\varphi_x^{(2)}(z_2) = \frac{Fz_2}{4EI_x} (L - z_2)$$

$$v_0^{(2)}(z_2) \cong \frac{F}{48EI_x} (L^3 - 6Lz_2^2 + 4z_2^3)$$

le quali coincidono con quanto determinato utilizzando il metodo della linea elastica del quarto ordine.



## Esempio: linea elastica



In definitiva, allora, l'asse della trave si deforma secondo una legge cubica il cui grafico è schematizzato in figura. Per la simmetria del problema, lo spostamento verticale massimo si ha in mezzeria e vale

$$f = \frac{FL^3}{48EI_x}$$

Mentre le rotazioni delle sezioni di estremità sono uguali ed opposte e valgono

$$-\varphi_A = \varphi_B = \frac{FL^2}{16EI_x}$$

### NOTA

Si osservi che il grafico della linea elastica deve essere tracciato in maniera congruente con il diagramma del momento (o meglio della curvatura): il raggio di curvatura di tale grafico deve essere tanto minore quanto maggiore è il valore del momento flettente.



## Esempio: verifica

A questo punto abbiamo tutti i dati necessari per poter effettuare le verifiche di resistenza e di rigidezza richieste nell'esercitazione.

### Verifica di resistenza:

le sollecitazioni massime presenti nella trave sono le seguenti:

$$M_{x\max} = \frac{FL}{4} = 3,1 \text{ kNm}$$

$$T_{y\max} = \frac{F}{2} = 1,3 \text{ kN}$$

alle quali corrispondono le seguenti componenti di tensione

$$\sigma_{z\max} = \frac{M_{x\max}}{W_x} = 91,1 \text{ MPa}$$

$$\bar{\tau}_{zy\max} = \frac{\frac{F}{2} S_x^{(A)}}{I_x \delta} = 3,3 \text{ MPa}$$

I precedenti valori sono minori dei valori di tensione di progetto e pertanto la verifica di resistenza risulta soddisfatta.

### Verifica di rigidezza:

La freccia massima è pari a

$$f = \frac{FL^3}{48EI_x} = 18,1 \text{ mm}$$

Essa è inferiore a  $L/200 = 25 \text{ mm}$  e quindi anche la verifica di rigidezza risulta soddisfatta.