Cedimenti vincolari e distorsioni termiche

Applicazione del metodo dell'integrazione della linea elastica

Introduzione

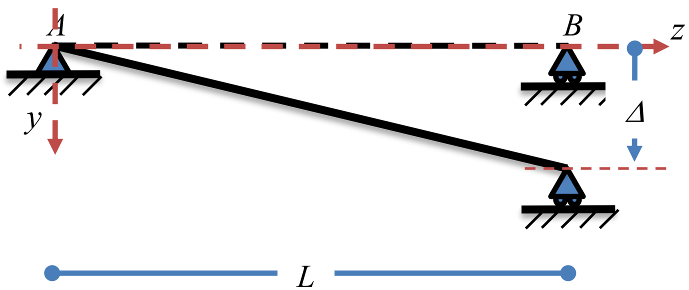
Nella presente lezione inizieremo ad analizzare dei sistemi strutturali sollecitati (anche) da particolari azioni quali:

- i cedimenti vincolari;
- le distorsioni termiche che inducono curvatura anelastica.

Si è detto più volte nel presente corso che:

- nei sistemi isostatici tali azioni hanno effetto solo sul campo di spostamento e non inducono sollecitazioni;
- nei sistemi iperstatici esse possono indurre anche sollecitazioni;

Esempio 1



Si determini il campo di spostamento presente nella struttura schematizzata in figura.

SOLUZIONE

Le reazioni vincolari per la struttura in figura sono nulle e pertanto sono nulle anche le caratteristiche della sollecitazione. Pertanto si ha:

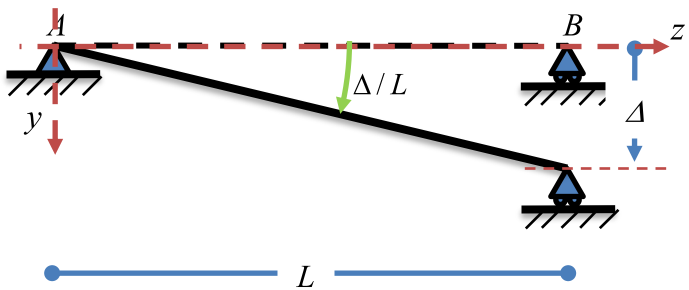
$$\chi_x(z) = \frac{M_x(z)}{EI_x} + \chi_x^{(a)}(z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \varphi_x(z) &= \int \chi_x(z)dz + a_1 = a_1 \\ v_0(z) &\cong -\int \varphi_x(z)dz + a_2 = -a_1 z + a_2 \end{aligned}$$

Le costanti di integrazione si calcolano dalle seguenti condizioni al contorno

$$\begin{cases} v_0(z=0) = 0 \rightarrow a_2 = 0 \\ v_0(z=L) = \Delta \rightarrow -a_1 L + a_2 = \Delta \end{cases} \qquad \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_1 = -\dfrac{\Delta}{L} \end{cases}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio 1



Sostituendo le precedenti costanti nelle funzioni della rotazione e della linea elastica si ottiene

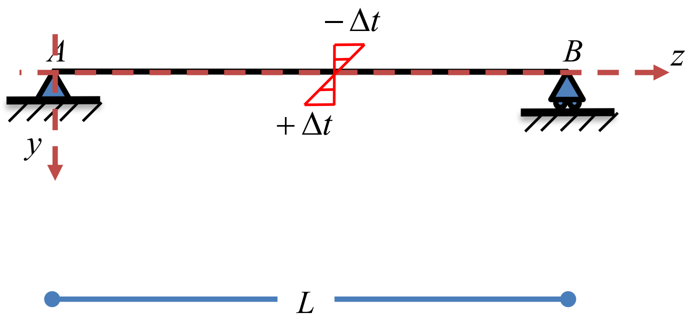
$$\varphi_x(z) = -\frac{\Delta}{L}$$

$$v_0(z) \cong \frac{\Delta}{L} z$$

Pertanto l'asse della struttura in esame ruota rigidamente attorno al nodo A mantenendosi rettilineo.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio 2



Si determini il campo di spostamento presente nella struttura schematizzata in figura. Si calcoli lo spostamento verticale della sezione di mezzeria e la rotazione delle sezioni di estremità.

La variazione termica "a farfalla" è presente su tutta la trave.

SOLUZIONE

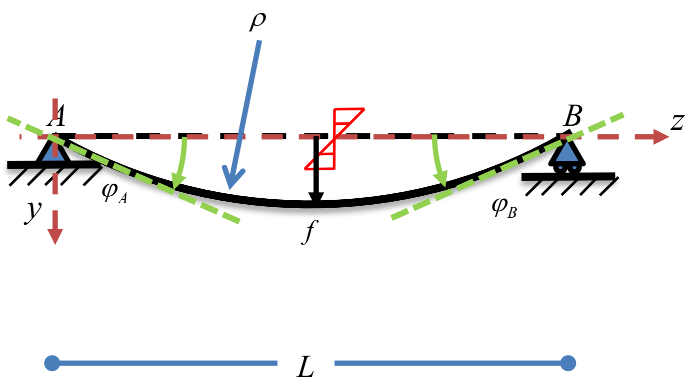
Le caratteristiche della sollecitazione sono nulle. Pertanto si ha:

$$\chi_x(z) = \frac{M_x(z)}{EI_x} + \chi_x^{(a)}(z) = \frac{2\alpha\,\Delta t}{h} \Longrightarrow \begin{cases} \varphi_x(z) = \dfrac{2\alpha\,\Delta t}{h} z + a_1 \\ v_0(z) \cong -\dfrac{2\alpha\,\Delta t}{h}\dfrac{z^2}{2} - a_1 z + a_2 \end{cases}$$

Le costanti di integrazione si calcolano dalle seguenti condizioni al contorno

$$\begin{cases} v_0(z=0) = 0 \rightarrow a_2 = 0 \\ v_0(z=L) = 0 \rightarrow -\dfrac{2\alpha\,\Delta t}{h}\dfrac{L^2}{2} - a_1 L + a_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_1 = -\dfrac{\alpha\,\Delta t}{h} L \end{cases}$$

Esempio 2



Sostituendo le precedenti costanti nelle funzioni della rotazione e della linea elastica si ottiene

$$\varphi_x(z) = \frac{\alpha\,\Delta t}{h}(2z - L)$$

$$v_0(z) \cong \frac{\alpha\,\Delta t}{h}(L - z)z$$

Da cui si ricava

$$\varphi_A = \varphi_B = |\varphi_x(0)| = \frac{\alpha\,\Delta t}{h} L$$

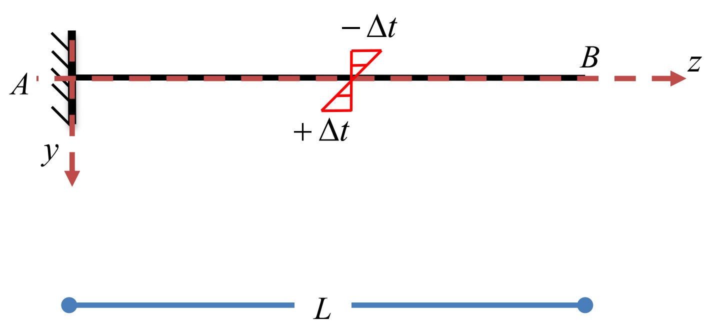
$$f = v_0(z = L/2) = \frac{\alpha\,\Delta t}{h}\frac{L^2}{4}$$

La trave in esame si deforma secondo un arco di circonferenza avente raggio pari a

$$\rho = \frac{1}{\chi_x(z)} = \frac{h}{2\,\alpha\,\Delta t}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio 3



Si determini il campo di spostamento presente nella struttura schematizzata in figura. Si calcoli lo spostamento verticale e la rotazione della sezione B.

La variazione termica "a farfalla" è presente su tutta la trave.

SOLUZIONE

Le caratteristiche della sollecitazione sono nulle. Pertanto anche in questo caso si ha:

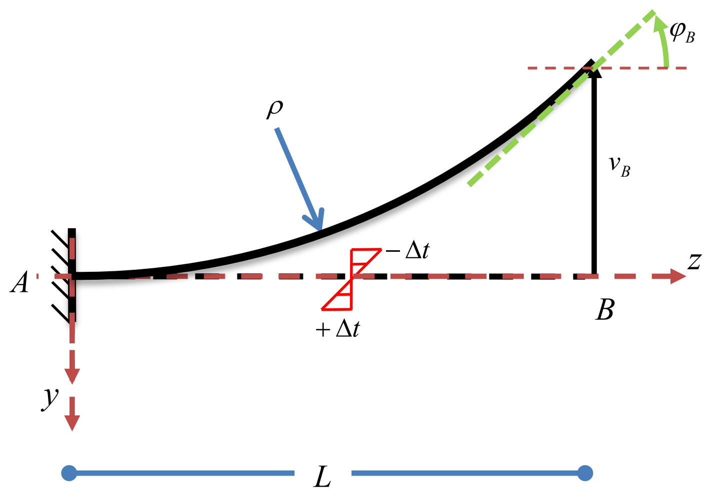
$$\chi_x(z)=\frac{M_x(z)}{EI_x}+\chi_x^{(a)}(z)=\frac{2\alpha\,\Delta t}{h} \Longrightarrow \begin{aligned}\varphi_x(z)&=\frac{2\alpha\,\Delta t}{h}z+a_1\\ v_0(z)&\cong-\frac{2\alpha\,\Delta t}{h}\frac{z^2}{2}-a_1 z+a_2\end{aligned}$$

Le costanti di integrazione si calcolano dalle seguenti condizioni al contorno

$$\begin{cases} v_0(z=0)=0 \rightarrow a_2=0 \\ \varphi_x(z=0)=0 \rightarrow a_1=0 \end{cases}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio 3



Sostituendo le precedenti costanti nelle funzioni della rotazione e della linea elastica si ottiene

$$\varphi_x(z) = \frac{2\,\alpha\,\Delta t}{h} z$$

$$v_0(z) \cong \frac{\alpha\,\Delta t}{h} z^2$$

Da cui si ricava

$$\varphi_B = \frac{2\alpha\,\Delta t}{h} L$$

$$v_B = |v_0(z = L/2)| = \frac{\alpha\,\Delta t}{h} L^2$$

Anche in questo caso la trave si deforma secondo un arco di circonferenza avente raggio pari a

$$\rho = \frac{1}{\chi_x(z)} = \frac{h}{2\,\alpha\,\Delta t}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831