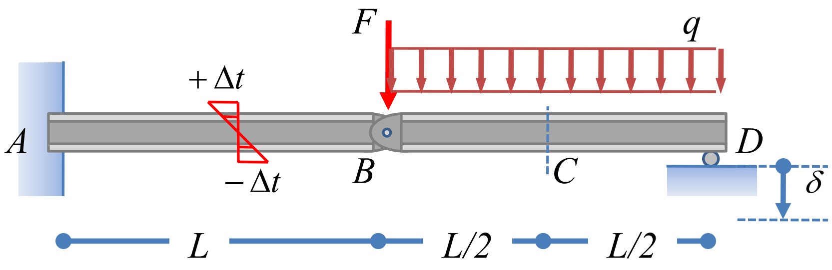
Sistemi di travi coassiali

Applicazione del metodo dell'integrazione della linea elastica

Esercizio



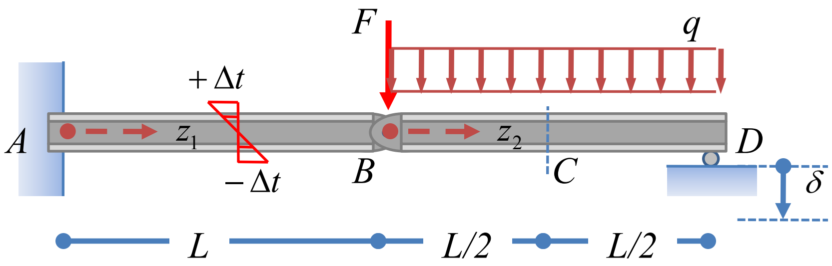
Per la struttura schematizzata in figura si calcoli lo spostamento verticale delle sezioni B, C e D utilizzando

1. il metodo dell'integrazione della linea elastica del quarto ordine
2. il metodo dell'integrazione della linea elastica del secondo ordine
3. il metodo della sovrapposizione degli effetti

Su tutto il tratto AB è presente la distorsione termica "a farfalla" indicata in figura.

Il vincolo D ha un cedimento verticale pari a δ.

Esercizio: linea elastica del quarto ordine



Tratto AB $(0 \leq z_1 \leq L)$

$$T_y^{(1)}(z_1) = -\int q(z_1)\,dz_1 + c_{1(1)}$$

$$M_x^{(1)}(z_1) = \int T_y^{(1)}(z_1)\,dz_1 + c_{2(1)}$$

$$\chi_x^{(1)}(z_1) = \frac{M_x^{(1)}(z_1)}{EI_x} + \chi_x^{(a)}(z_1)$$

$$\varphi_x^{(1)}(z_1) = \int \chi_x^{(1)}(z_1)\,dz_1 + c_{3(1)}$$

$$v_0^{(1)}(z_1) \cong -\int \varphi_x^{(1)}(z_1)\,dz_1 + c_{4(1)}$$

Tratto BD $(0 \leq z_2 \leq L)$

$$T_y^{(2)}(z_2) = -\int q(z_2)\,dz_2 + c_{1(2)}$$

$$M_x^{(2)}(z_2) = \int T_y^{(2)}(z_2)\,dz_2 + c_{2(2)}$$

$$\chi_x^{(2)}(z_2) = \frac{M_x^{(2)}(z_2)}{EI_x} + \chi_x^{(a)}(z_2)$$

$$\varphi_x^{(2)}(z_2) = \int \chi_x^{(2)}(z_2)\,dz_2 + c_{3(2)}$$

$$v_0^{(2)}(z_2) \cong -\int \varphi_x^{(2)}(z_2)\,dz_2 + c_{4(2)}$$

Iniziamo con il metodo dell'integrazione della linea elastica del quarto ordine.

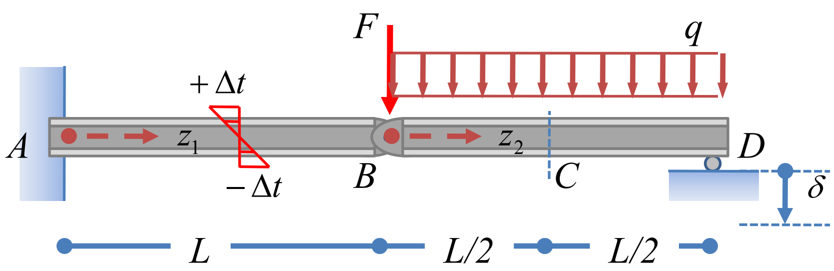
Si definiscono le funzioni delle caratteristiche della sollecitazione, della curvatura, della rotazione e dello spostamento verticale in entrambi i tratti omogenei della struttura.

Sul tratto AB non vi è carico ripartito, mentre sul tratto BD è presente un carico ripartito verticale costante.

Si osservi che la distorsione termina presente sul tratto AB induce curvature anelastiche "negative" (tende ad allungare le fibre longitudinali poste dal lato delle $y>0$).

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esercizio: linea elastica del quarto ordine



Integrando le equazioni differenziali di equilibrio e di congruenza si ottengono allora le funzioni indicate a fianco.

Tratto AB $(0 \le z_1 \le L)$

$$T_y^{(1)}(z_1) = c_{1(1)}$$

$$M_x^{(1)}(z_1) = c_{1(1)} z_1 + c_{2(1)}$$

$$\chi_x^{(1)}(z_1) = \frac{c_{1(1)} z_1 + c_{2(1)}}{EI_x} - \frac{2\alpha\Delta t}{h}$$

$$\varphi_x^{(1)}(z_1) = \frac{1}{EI_x}\left(c_{1(1)}\frac{z_1^2}{2} + c_{2(1)} z_1\right) + c_{3(1)} - \frac{2\alpha\Delta t}{h} z_1$$

$$v_0^{(1)}(z_1) \cong -\frac{1}{EI_x}\left(c_{1(1)}\frac{z_1^3}{6} + c_{2(1)}\frac{z_1^2}{2}\right) - c_{3(1)} z_1 + c_{4(1)} + \frac{\alpha\Delta t}{h} z_1^2$$

Tratto BD $(0 \le z_2 \le L)$

$$T_y^{(2)}(z_2) = c_{1(2)} - q z_2$$

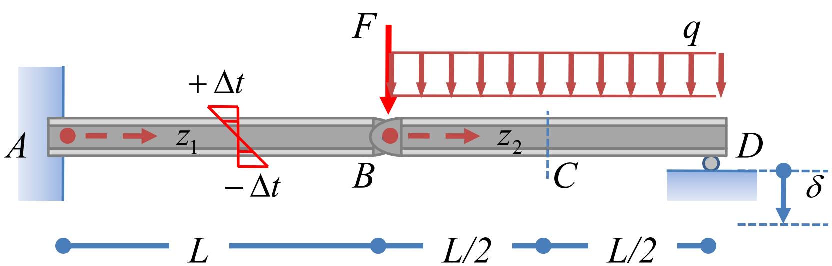
$$M_x^{(2)}(z_2) = c_{1(2)} z_2 + c_{2(2)} - q\frac{z_2^2}{2}$$

$$\chi_x^{(2)}(z_2) = \frac{1}{EI_x}\left(c_{1(2)} z_2 + c_{2(2)} - q\frac{z_2^2}{2}\right)$$

$$\varphi_x^{(2)}(z_2) = \frac{z_2}{6EI_x}\left(3c_{1(2)} z_2 + 6c_{2(2)} - q z_2^2\right) + c_{3(2)}$$

$$v_0^{(2)}(z_2) \cong -\frac{1}{EI_x}\left(c_{1(2)}\frac{z_2^3}{6} + c_{2(2)}\frac{z_2^2}{2}\right) - c_{3(2)} z_2 + c_{4(2)} + \frac{q z_2^4}{24 E I_x}$$

Esercizio: linea elastica del quarto ordine



Tratto AB $(0 \le z_1 \le L)$

$$T_y^{(1)}(z_1)=c_{1(1)}$$

$$M_x^{(1)}(z_1)=c_{1(1)}z_1+c_{2(1)}$$

$$\chi_x^{(1)}(z_1)=\frac{c_{1(1)}z_1+c_{2(1)}}{EI_x}-\frac{2\alpha\Delta t}{h}$$

$$\varphi_x^{(1)}(z_1)=\frac{1}{EI_x}\left(c_{1(1)}\frac{z_1^2}{2}+c_{2(1)}z_1\right)+c_{3(1)}-\frac{2\alpha\Delta t}{h}z_1$$

$$v_0^{(1)}(z_1)\cong-\frac{1}{EI_x}\left(c_{1(1)}\frac{z_1^3}{6}+c_{2(1)}\frac{z_1^2}{2}\right)-c_{3(1)}z_1+c_{4(1)}+\frac{\alpha\Delta t}{h}z_1^2$$

Tratto BD $(0 \le z_2 \le L)$

$$T_y^{(2)}(z_2)=c_{1(2)}-q\,z_2$$

$$M_x^{(2)}(z_2)=c_{1(2)}z_2+c_{2(2)}-q\frac{z_2^2}{2}$$

$$\chi_x^{(2)}(z_2)=\frac{1}{EI_x}\left(c_{1(2)}z_2+c_{2(2)}-q\frac{z_2^2}{2}\right)$$

$$\varphi_x^{(2)}(z_2)=\frac{z_2}{6EI_x}\left(3c_{1(2)}z_2+6c_{2(2)}-qz_2^2\right)+c_{3(2)}$$

$$v_0^{(2)}(z_2)\cong-\frac{1}{EI_x}\left(c_{1(2)}\frac{z_2^3}{6}+c_{2(2)}\frac{z_2^2}{2}\right)-c_{3(2)}z_2+c_{4(2)}+\frac{q\,z_2^4}{24\,E\,I_x}$$

Le condizioni al contorno per la struttura in esame sono le seguenti

NODO A

$v_0^{(1)}(z_1=0)=0$ ⟵ compatibilità con il vincolo

$\varphi_x^{(1)}(z_1=0)=0$ ⟵ compatibilità con il vincolo

NODO B

$v_0^{(1)}(z_1=L)=v_0^{(2)}(z_2=0)$ ⟵ continuità dello spostamento

$M_x^{(1)}(z_1=L)=0$ ⟵ equilibrio alla rotazione

$M_x^{(2)}(z_2=0)=0$ ⟵ equilibrio alla rotazione

$\Delta T_y=T_y^{(2)}(z_2=0)-T_y^{(1)}(z_1=L)=-F$ ⟵ equilibrio alla traslaz. vert.

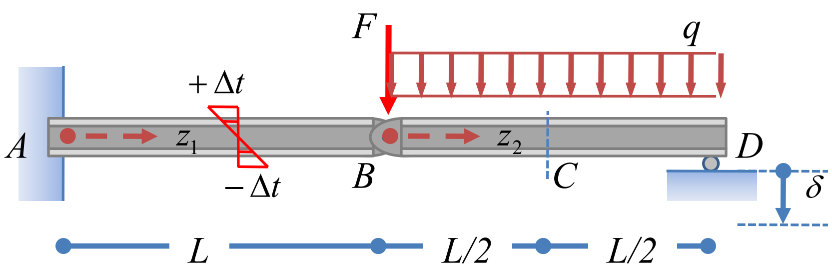
NODO D

$v_0^{(2)}(z_2=L)=\delta$ ⟵ compatibilità con il vincolo

$M_x^{(2)}(z_2=L)=0$ ⟵ equilibrio alla rotazione

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esercizio: linea elastica del quarto ordine



Tratto AB $(0 \le z_1 \le L)$

$$T_y^{(1)}(z_1) = c_{1(1)}$$

$$M_x^{(1)}(z_1) = c_{1(1)} z_1 + c_{2(1)}$$

$$\chi_x^{(1)}(z_1) = \frac{c_{1(1)} z_1 + c_{2(1)}}{EI_x} - \frac{2\alpha\Delta t}{h}$$

$$\varphi_x^{(1)}(z_1) = \frac{1}{EI_x}\left(c_{1(1)}\frac{z_1^2}{2} + c_{2(1)} z_1\right) + c_{3(1)} - \frac{2\alpha\Delta t}{h} z_1$$

$$v_0^{(1)}(z_1) \cong -\frac{1}{EI_x}\left(c_{1(1)}\frac{z_1^3}{6} + c_{2(1)}\frac{z_1^2}{2}\right) - c_{3(1)} z_1 + c_{4(1)} + \frac{\alpha\Delta t}{h} z_1^2$$

Tratto BD $(0 \le z_2 \le L)$

$$T_y^{(2)}(z_2) = c_{1(2)} - q z_2$$

$$M_x^{(2)}(z_2) = c_{1(2)} z_2 + c_{2(2)} - q\frac{z_2^2}{2}$$

$$\chi_x^{(2)}(z_2) = \frac{1}{EI_x}\left(c_{1(2)} z_2 + c_{2(2)} - q\frac{z_2^2}{2}\right)$$

$$\varphi_x^{(2)}(z_2) = \frac{z_2}{6EI_x}\left(3c_{1(2)} z_2 + 6c_{2(2)} - q z_2^2\right) + c_{3(2)}$$

$$v_0^{(2)}(z_2) \cong -\frac{1}{EI_x}\left(c_{1(2)}\frac{z_2^3}{6} + c_{2(2)}\frac{z_2^2}{2}\right) - c_{3(2)} z_2 + c_{4(2)} + \frac{q z_2^4}{24 E I_x}$$

Esplicitando le precedenti condizioni al contorno si ottiene un sistema di otto equazioni lineari in otto incognite la cui soluzione è la seguente:

$$c_{1(1)} = F + \frac{qL}{2}$$

$$c_{2(1)} = -\frac{(2F + qL)L}{2}$$

$$c_{3(1)} = 0$$

$$c_{4(1)} = 0$$

$$c_{1(2)} = \frac{qL}{2}$$

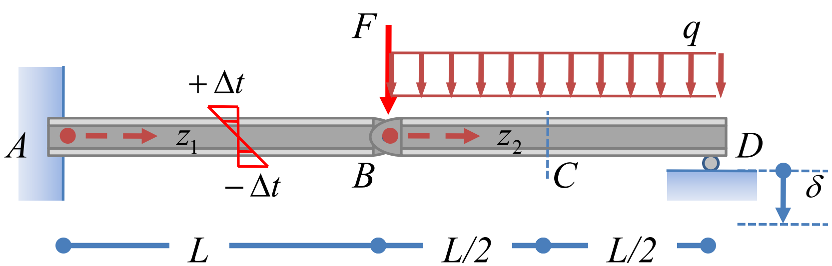
$$c_{2(2)} = 0$$

$$c_{3(2)} = \frac{(8F + 3qL)L^2}{24 E I_x} - \frac{\delta}{L} + \frac{\alpha\Delta t}{h} L$$

$$c_{4(2)} = \frac{\left(2FhL + hL^2 q + 6EI_x\alpha\Delta t\right)L^2}{6EI_x h}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esercizio: linea elastica del quarto ordine



Tratto AB ($0 \le z_1 \le L$)

$$T_y^{(1)}(z_1) = F + \frac{qL}{2}$$

$$M_x^{(1)}(z_1) = (2F + qL)\frac{z_1 - L}{2}$$

$$\chi_x^{(1)}(z_1) = \left(F + \frac{qL}{2}\right)\frac{z_1 - L}{EI_x} - \frac{2\alpha\Delta t}{h}$$

$$\varphi_x^{(1)}(z_1) = \left(F + \frac{qL}{2}\right)\frac{(z_1 - 2L)z_1}{2EI_x} - \frac{2\alpha\Delta t}{h} z_1$$

$$v_0^{(1)}(z_1) \cong \frac{F + \frac{qL}{2}}{6EI_x}(3L - z_1)z_1^2 + \frac{\alpha\Delta t}{h} z_1^2$$

Tratto BD ($0 \le z_2 \le L$)

$$T_y^{(2)}(z_2) = q\left(\frac{L}{2} - z_2\right)$$

$$M_x^{(2)}(z_2) = \frac{q}{2}(L - z_2)z_2$$

$$\chi_x^{(2)}(z_2) = \frac{q}{2EI_x}(L - z_2)z_2$$

$$\varphi_x^{(2)}(z_2) = \left(\frac{FL^3}{3EI_x} + \frac{\alpha\Delta t}{h}L^2 - \delta\right)\frac{1}{L} + \frac{q\left(3L^3 + 6Lz_2^2 - 4z_2^3\right)}{24EI_x}$$

$$v_0^{(2)}(z_2) \cong \left(\frac{FL^3}{3EI_x} + \frac{\alpha\Delta t}{h}L^2\right)\left(1 - \frac{z_2}{L}\right) + \frac{\delta}{L}z_2 + \frac{q}{24EI_x}\left(4L^4 - 3L^3 z_2 - 2Lz_2^3 + z_2^4\right)$$

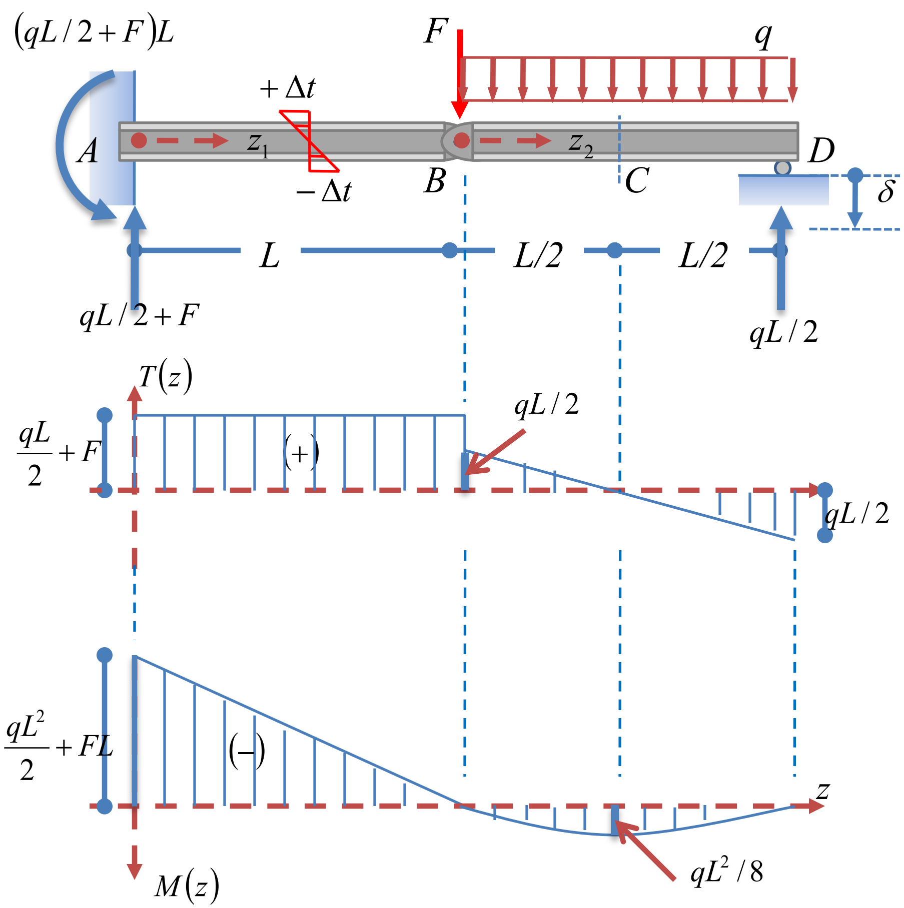
Sostituendo le equazioni così determinate nelle funzioni delle entità statiche e cinematiche dei singoli tratti della struttura si ottengono le espressioni indicate a fianco.

NOTA.

Le equazioni così ottenute possono essere difficili da gestire manualmente per l'allievo. In questi casi, in sede d'esame è richiesto di svolgere l'applicazione del metodo almeno fino alla corretta scrittura delle condizioni al contorno (senza ricavare le espressioni esplicite delle funzioni indicate a fianco).

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esercizio: linea elastica del secondo ordine



Procediamo adesso con il metodo dell'integrazione della linea elastica del secondo ordine. Le reazioni vincolari, le leggi ed i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione sono quelli indicati in figura e di seguito.

Tratto AB $(0 \le z_1 \le L)$

$$T_y^{(1)}(z_1) = F + \frac{qL}{2}$$

$$M_x^{(1)}(z_1) = (2F + qL)\frac{z_1 - L}{2}$$

Tratto BD $(0 \le z_2 \le L)$

$$T_y^{(2)}(z_2) = q\left(\frac{L}{2} - z_2\right)$$

$$M_x^{(2)}(z_2) = \frac{q}{2}(L - z_2)z_2$$

Utilizzando la relazione costitutiva tra momento e curvatura ed integrando si ha

$$\chi_x^{(1)}(z_1) = \left(F + \frac{qL}{2}\right)\frac{z_1 - L}{EI_x} - \frac{2\alpha\Delta t}{h}$$

$$\varphi_x^{(1)}(z_1) = \int \chi_x^{(1)}(z_1)\,dz_1 + a_{1(1)}$$

$$v_0^{(1)}(z_1) \cong -\int \varphi_x^{(1)}(z_1)\,dz_1 + a_{2(1)}$$

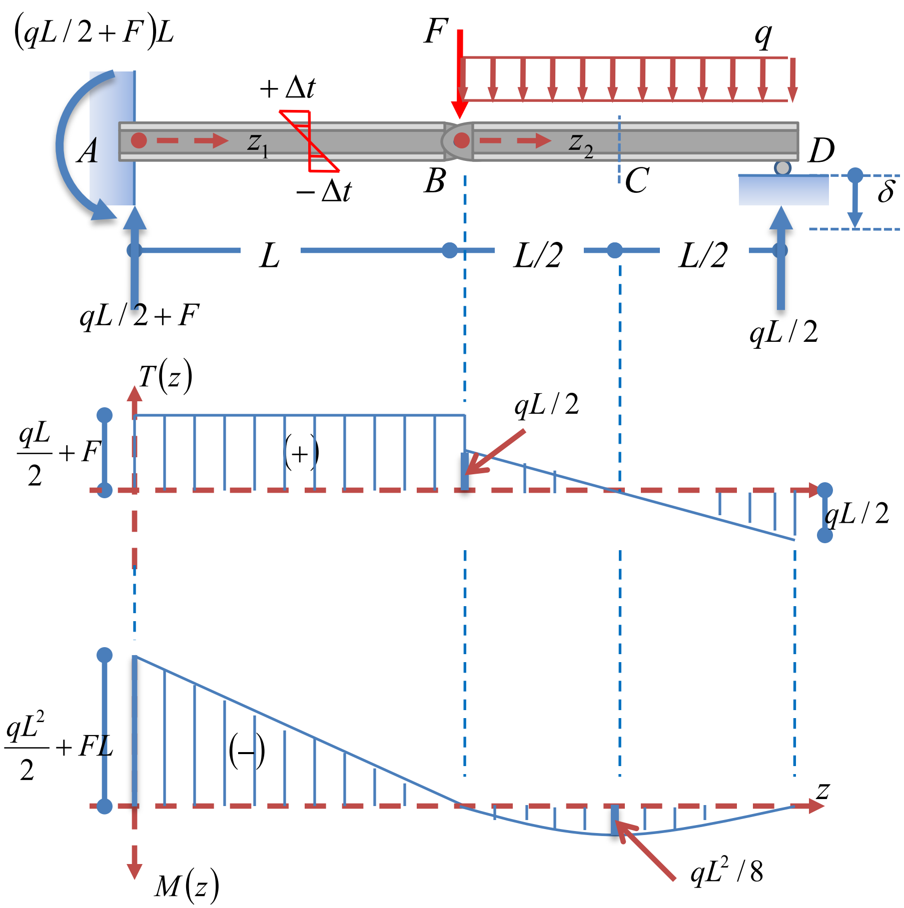
$$\chi_x^{(2)}(z_2) = \frac{q}{2EI_x}(L - z_2)z_2$$

$$\varphi_x^{(2)}(z_2) = \int \chi_x^{(2)}(z_2)\,dz_2 + a_{1(2)}$$

$$v_0^{(2)}(z_2) \cong -\int \varphi_x^{(2)}(z_2)\,dz_2 + a_{2(2)}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esercizio: linea elastica del secondo ordine



Imponendo le seguenti condizioni al contorno

Nodo A

$v_0^{(1)}(z_1 = 0) = 0$ ⟸ compatibilità con il vincolo

$\varphi_x^{(1)}(z_1 = 0) = 0$ ⟸ compatibilità con il vincolo

Nodo B

$v_0^{(1)}(z_1 = L) = v_0^{(2)}(z_2 = 0)$ ⟸ continuità dello spostamento

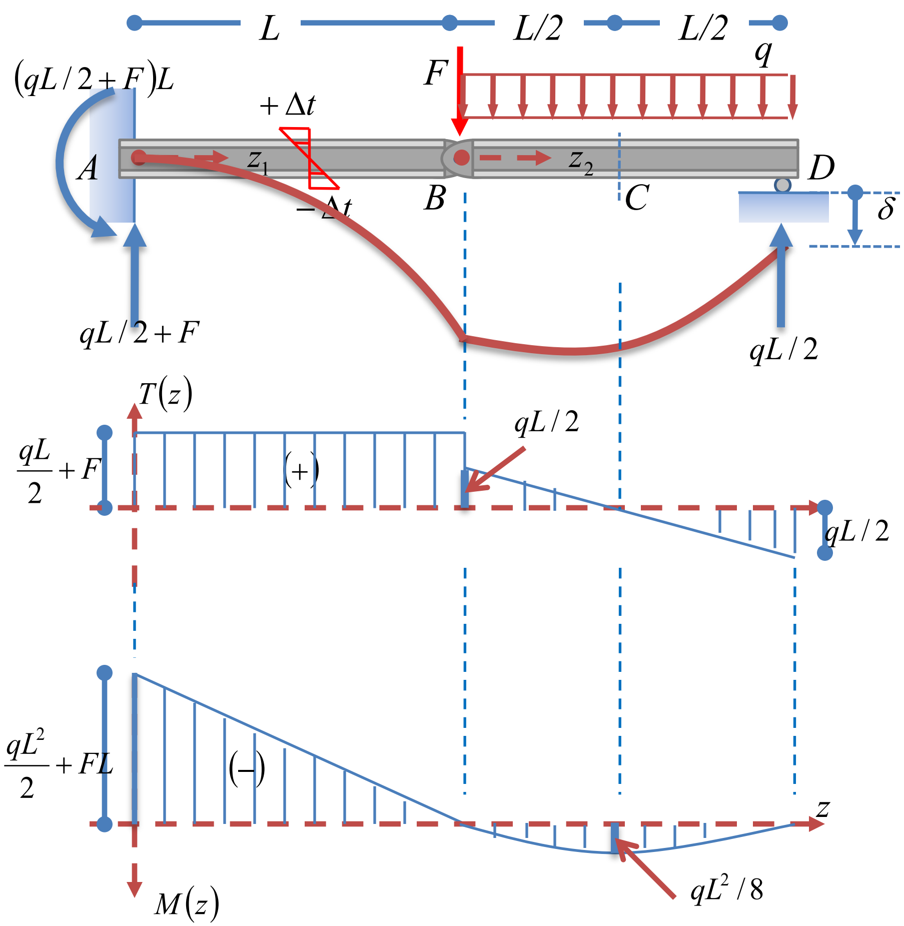
Nodo C

$v_0^{(2)}(z_2 = L) = \delta$ ⟸ compatibilità con il vincolo

risolvendo rispetto alle costanti di integrazione e sostituendo nelle espressioni dello spostamento verticale e della rotazione si ottengono le stesse funzioni di spostamento e di rotazione determinate utilizzando il metodo di integrazione della linea elastica del quarto ordine.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esercizio: linea elastica



In figura si riporta il grafico (amplificato) della linea elastica. Si osservi che la curvatura ha segno opposto nei due tratti di trave.

Gli spostamenti dei nodi B, C e D si ottengono sostituendo la loro ascissa nelle leggi della linea elastica come indicato di seguito:

$$v_B = v_0^{(1)}(z_1 = L) = v_0^{(2)}(z_2 = 0) = \frac{\left(F + \frac{qL}{2}\right)L^3}{3\,E\,I_x} + \frac{\alpha\,\Delta t}{h}L^2$$

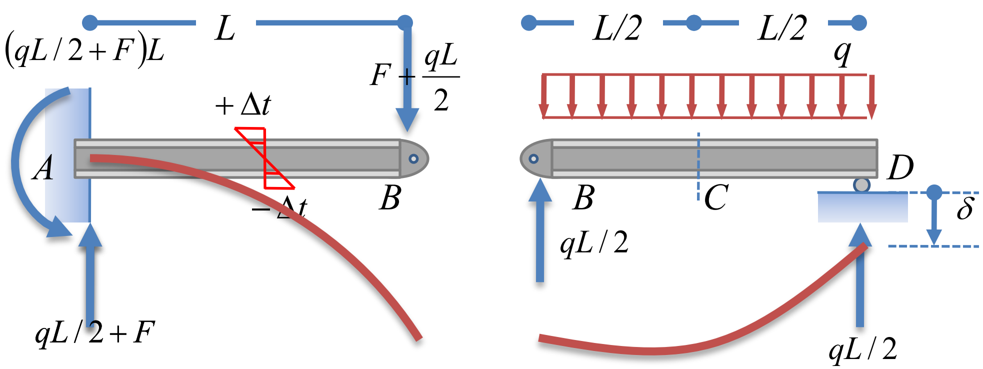
$$v_C = v_0^{(2)}\left(z_2 = \frac{L}{2}\right) = \frac{5}{384}\frac{q\,L^4}{E\,I_x} + \left(\frac{\left(F + \frac{qL}{2}\right)L^3}{3\,E\,I_x} + \frac{\alpha\,\Delta t}{h}L^2 + \delta\right)/2 =$$

$$= \frac{5}{384}\frac{q\,L^4}{E\,I_x} + \frac{v_B + \delta}{2}$$

$$v_D = v_0^2(z_2 = L) = \delta$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esercizio: metodo della sovrapposizione degli effetti

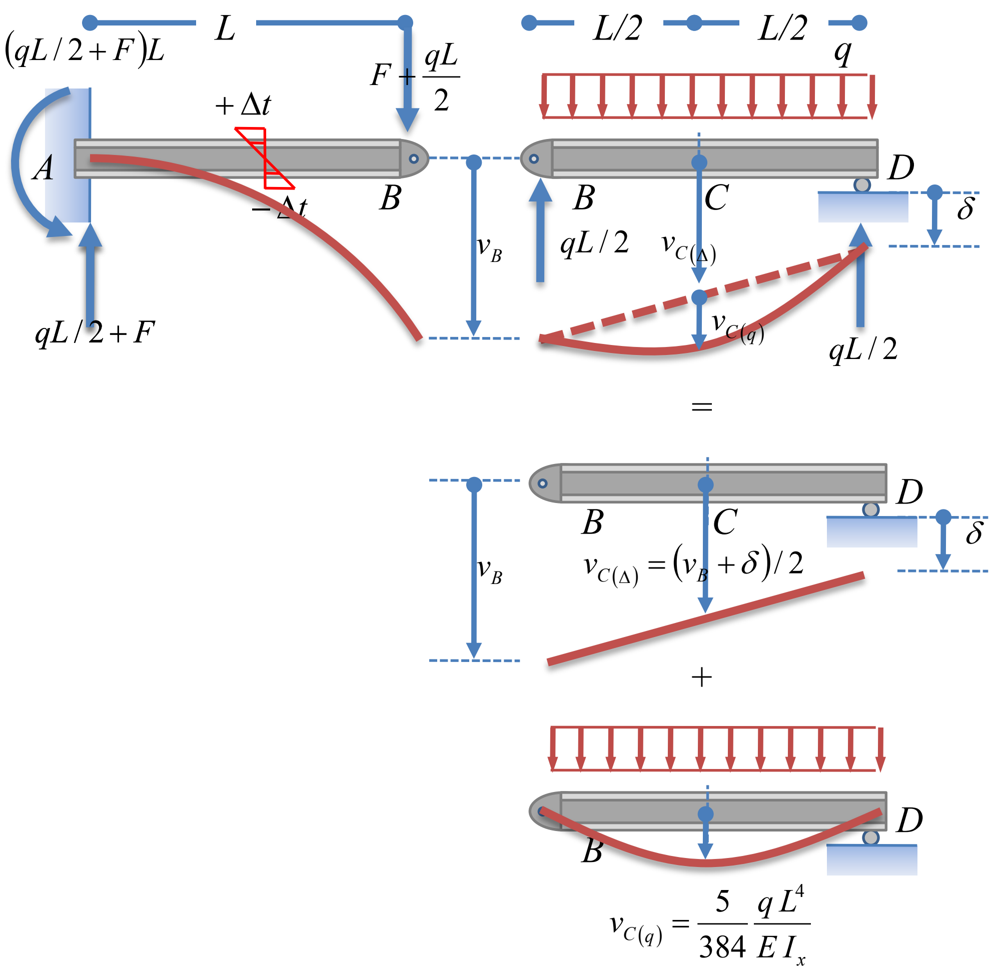


Le componenti di spostamento richieste nel presente esercizio possono essere facilmente determinate utilizzando il metodo della sovrapposizione degli effetti.

Le reazioni del vincolo interno sono quelle indicate in figura. È evidente che il tratto *AB* è equivalente ad una mensola caricata da una forza verticale $P=F+qL/2$ e da una distorsione termica a farfalla. Utilizzando i risultati sintetizzati nella sessione teorica della presente lezione si calcola

$$v_B = v_{B(P)} + v_{B(\Delta t)} = \frac{\left(F + \frac{qL}{2}\right) L^3}{3 E I_x} + \frac{\alpha \Delta t}{h} L^2$$

Esercizio: metodo della sovrapposizione degli effetti



Analogamente, lo spostamento verticale del nodo C può essere calcolato sommando gli effetti dei cedimenti degli estremi $(v_{C(\Delta)})$ e del carico distribuito $v_{C(q)}$

$$v_C = v_{C(\Delta)} + v_{C(q)} = (v_B + \delta)/2 + \frac{5}{384}\frac{qL^4}{EI_x}$$

Infine, lo spostamento verticale del nodo D deve essere compatibile con il cedimento vincolare e quindi deve essere

$$v_D = \delta$$

Utilizzando la stessa procedura è possibile calcolare tutte le altre componenti di spostamento (come ad esempio le rotazioni dei nodi che abbiamo considerato) o le loro leggi.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831