



# Sistemi di travi coassiali: sovrapposizione degli effetti

---

Applicazione del metodo dell'integrazione della linea elastica



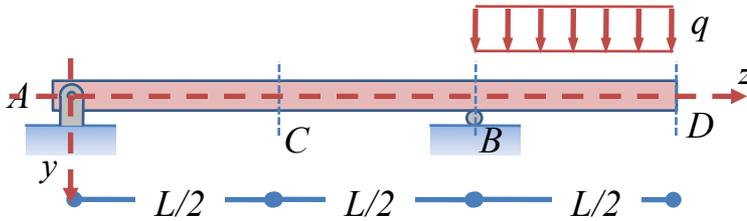
## **Sommario**

Nella presente lezione verranno mostrate delle ulteriori applicazioni del metodo di sovrapposizione degli effetti per il calcolo di spostamenti e rotazioni di alcune sezioni trasversali di semplici sistemi isostatici.



## Esempio 1

$$q = 5,0 \text{ kN/m}$$
$$L = 1,5 \text{ m}$$

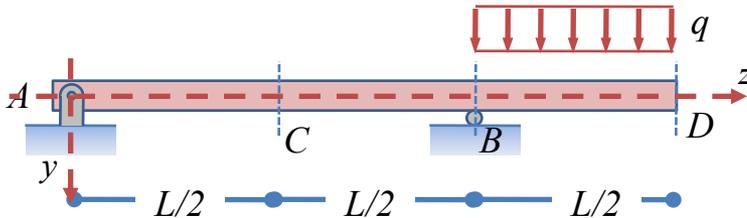


La trave in acciaio ( $E=210\text{GPa}$ ) in figura ha sezione trasversale costante *IPE 120* ( $I_x=318,5 \text{ cm}^4$ ). Si calcoli lo spostamento verticale della sezione *C* e lo spostamento verticale e la rotazione della sezione *D* indicate in figura.



## Esempio 1 - soluzione

$$q = 5,0 \text{ kN/m}$$
$$L = 1,5 \text{ m}$$



Per l'applicazione diretta del metodo di sovrapposizione degli effetti, è conveniente schematizzare la struttura secondo gli schemi "base", per i quali sono già stati determinati alcuni valori notevoli di spostamento e di rotazione nonché le relative funzioni. Si osservi che:

- qualora non fosse possibile ricondursi a schemi noti, il metodo della sovrapposizione degli effetti può ugualmente essere utilizzato a patto di calcolare le componenti di spostamento e di rotazione relative agli schemi ed alle condizioni di carico eventualmente non ancora considerate;
- l'applicazione del metodo di sovrapposizione degli effetti presuppone ovviamente che siano verificate le ipotesi sotto le quali è valido il principio di sovrapposizione degli effetti, ossia:
  - piccole deformazioni;
  - materiale a comportamento elastico lineare.

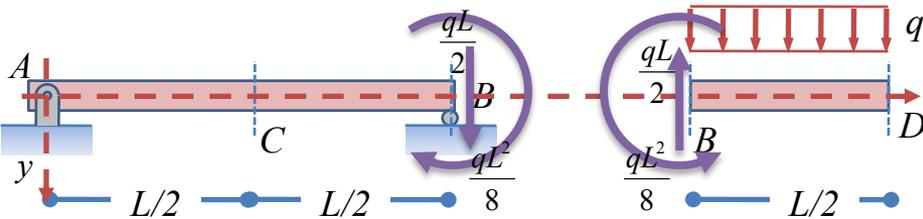
Per il sistema in esame è possibile applicare direttamente il metodo indicato utilizzando valori noti di spostamento e di rotazione.



## Esempio 1 - soluzione

$$q = 5,0 \text{ kN/m}$$

$$L = 1,5 \text{ m}$$



Immaginiamo di suddividere idealmente il sistema in esame in due tratti in corrispondenza di una sezione immediatamente a destra della sezione  $B$  come indicato in figura. Attraverso tale sezione le due porzioni di struttura si trasferiscono delle tensioni aventi come risultante e momento risultante le caratteristiche della sollecitazione il cui valore è

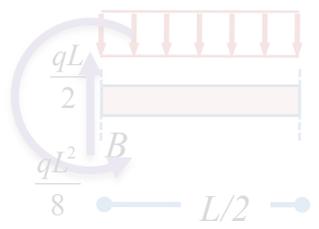
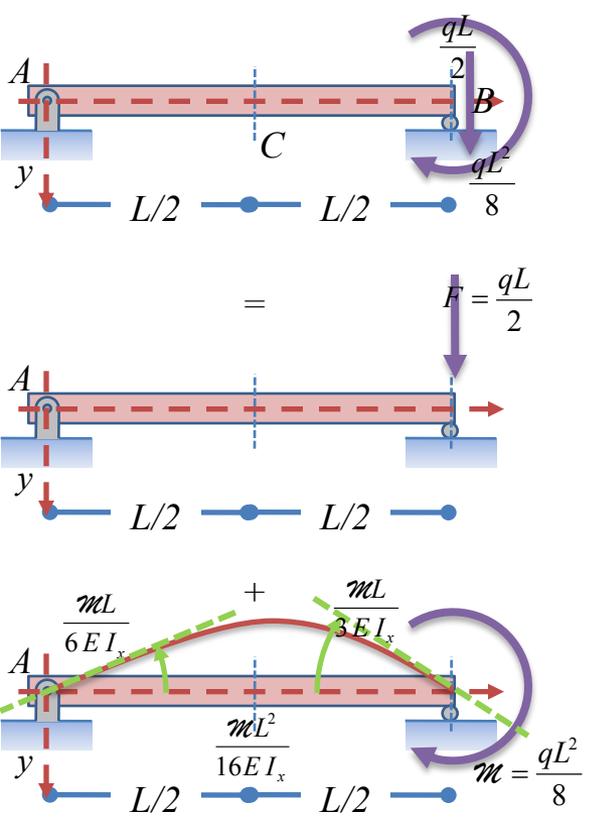
$$T_B^{(s)} = \frac{qL}{2}$$

$$M_B = -\frac{qL^2}{8}$$

In figura le precedenti caratteristiche della sollecitazione sono indicate con il verso "effettivo". Dal punto di vista statico, gli effetti mutui fra le due porzioni della struttura sono rappresentati dalle caratteristiche della sollecitazione.



## Esempio 1 - soluzione



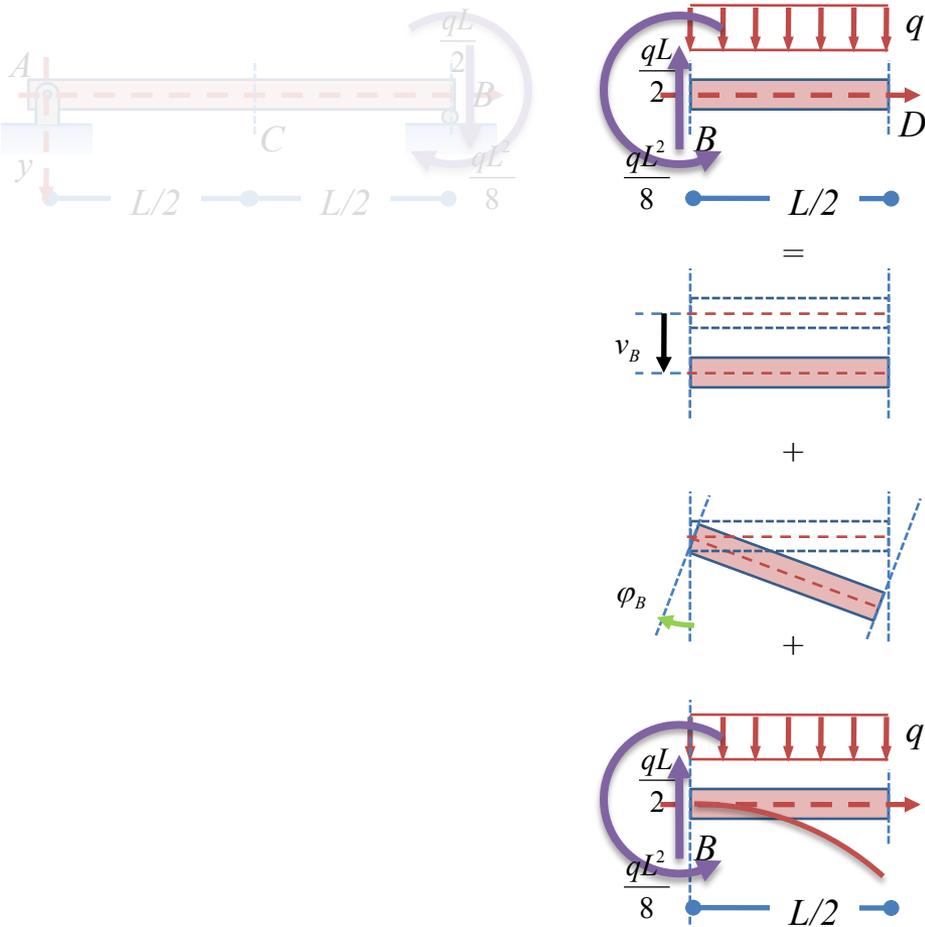
Consideriamo inizialmente il tratto  $AB$ . Le caratteristiche della sollecitazione, così determinate, sono di fatto delle forze (reattive) applicate alla struttura. È facile verificare che il carico verticale  $F = qL/2$  non induce nessuna sollecitazione (e quindi nessuna deformazione) nella struttura, mentre, a causa della coppia applicata in  $B$ , si ha

$$|v_C| = \frac{\mathcal{M}L^2}{16EI_x} = \frac{qL^4}{128EI_x} \quad \leftarrow \text{verso l'alto}$$

$$|\varphi_B| = \frac{\mathcal{M}L}{3EI_x} = \frac{qL^3}{24EI_x} \quad \leftarrow \text{orario}$$



## Esempio 1 - soluzione

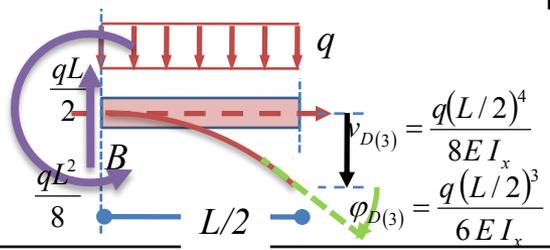
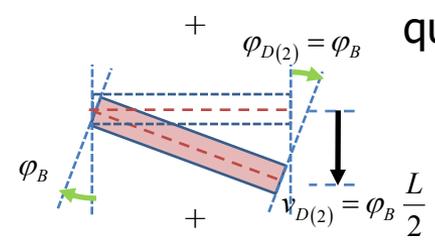
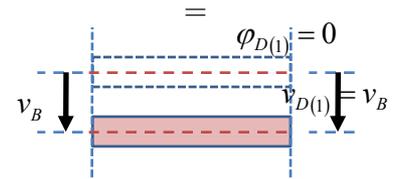
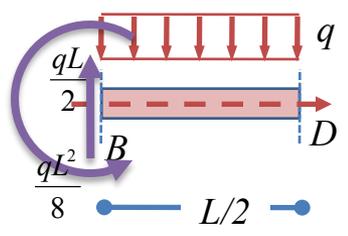
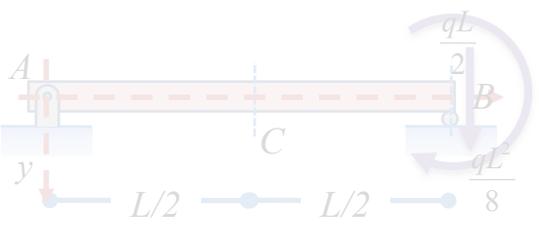


Analizziamo adesso il tratto  $BD$  (isostatico) della struttura. Il nodo  $D$  è un estremo libero, mentre il nodo  $B$  è un punto di connessione tra le due porzioni della struttura. Le componenti di spostamento sono pari alla somma dei seguenti contributi:

- contributi di moto rigido dovuti ad eventuali spostamenti e/o rotazioni del nodo  $B$ ;
- contributi deformativi dovuti ai carichi, nell'ipotesi che il nodo  $B$  sia fisso (in quanto, si ribadisce, gli effetti di eventuali suoi spostamenti e/o rotazioni sono considerati al punto precedente).



# Esempio 1 - soluzione



In definitiva allora, lo spostamento verticale (ip. verso il basso) e la rotazione (ip. oraria) del nodo  $D$  possono essere calcolati come segue:

$$v_D = v_{D(1)} + v_{D(2)} + v_{D(3)} = v_B + \varphi_B \frac{L}{2} + \frac{qL^4}{128EI_x}$$

$$\varphi_D = \varphi_{D(1)} + \varphi_{D(2)} + \varphi_{D(3)} = 0 + \varphi_B + \frac{qL^3}{48EI_x}$$

Il nodo  $B$  è vincolato con un carrello e quindi si ha

$$v_B = 0$$

Inoltre la rotazione (oraria) del nodo  $B$  è stata calcolata nelle precedenti slide, per cui si ha

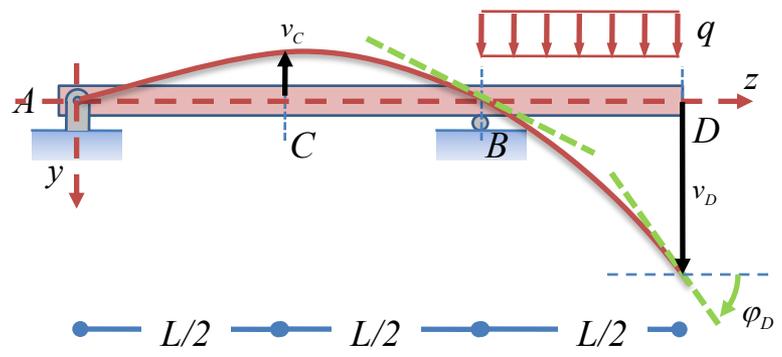
$$v_D = \frac{11}{384} \frac{qL^4}{EI_x} \quad \leftarrow \text{verso il basso}$$

$$\varphi_D = \frac{qL^3}{16EI_x} \quad \leftarrow \text{orario}$$



## Esempio 1 - soluzione

$q = 5,0 \text{ kN/m}$   
 $L = 1,5 \text{ m}$



In definitiva, la deformata dell'asse della struttura in esame è indicativamente quella rappresentata in figura. I valori degli spostamenti richiesti nell'esercizio sono i seguenti:

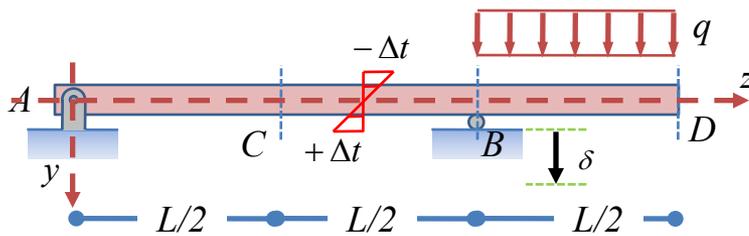
$$v_C = \frac{qL^4}{128EI_x} \cong 0,30 \text{ mm} \quad \leftarrow \text{verso l'alto}$$

$$v_D = \frac{11}{384} \frac{qL^4}{EI_x} \cong 1.08 \text{ mm} \quad \leftarrow \text{verso il basso}$$

$$\varphi_D = \frac{qL^3}{16EI_x} \cong 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \quad \leftarrow \text{orario}$$



## Esempio 2



Si determinino gli spostamenti verticali e la rotazione di cui all'esempio precedente nel caso in cui, in aggiunta al carico ripartito, sulla struttura sia presente anche un cedimento verticale noto del vincolo in  $B$  ed una distorsione termica a farfalla sul tratto  $AB$ .

Dati:

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$\alpha = 11,7 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

$$\text{Sezione IPE 120 } (I_x = 318,5 \text{ cm}^4; h = 120 \text{ mm})$$

$$\Delta t = 20 \text{ } ^\circ\text{C}$$

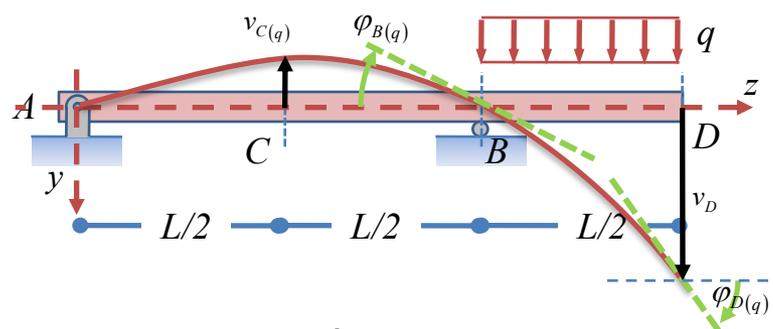
$$\delta = 0,5 \text{ mm}$$

$$q = 5,0 \text{ kN/m}$$

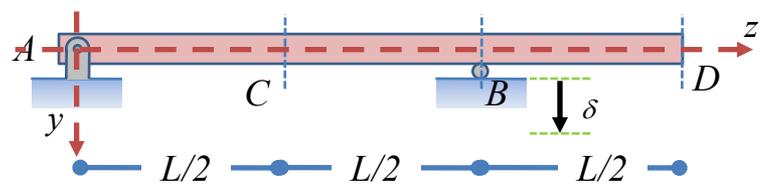
$$L = 1,5 \text{ m}$$



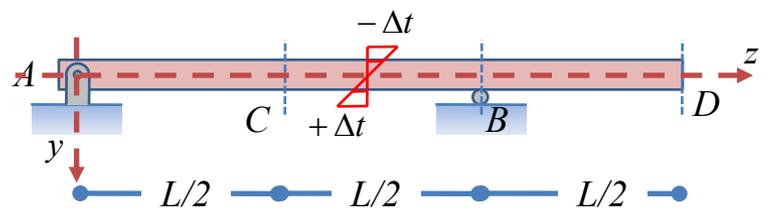
## Esempio 2



+



+



Gli spostamenti dei nodi C e D e le rotazioni dei nodi B e D dovuti al carico distribuito, in assenza di cedimenti vincolari, sono stati calcolati nell'esercizio precedente e valgono

$$v_{C(q)} = \frac{qL^4}{128EI_x} \cong 0,30 \text{ mm} \quad \leftarrow \text{verso l'alto}$$

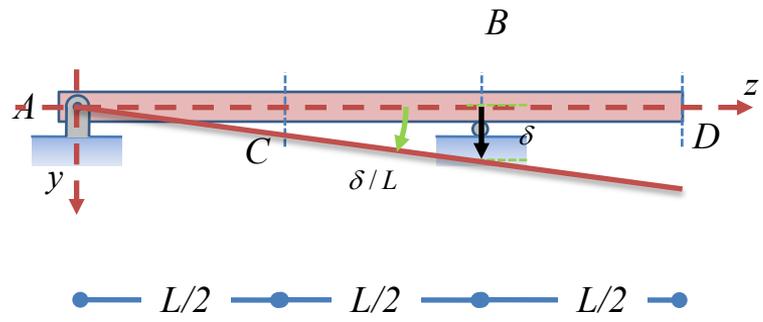
$$\varphi_{B(q)} = \frac{qL^3}{24EI_x} \cong 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \quad \leftarrow \text{orario}$$

$$v_{D(q)} = \frac{11}{384} \frac{qL^4}{EI_x} \cong 1,08 \text{ mm} \quad \leftarrow \text{verso il basso}$$

$$\varphi_{D(q)} = \frac{qL^3}{16EI_x} \cong 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \quad \leftarrow \text{orario}$$



## Esempio 2



Determiniamo i contributi dovuti al cedimento vincolare.

La struttura è vincolata a cerniera in corrispondenza del nodo *A* e pertanto, a causa di tale cedimento, essa ruota rigidamente attorno alla cerniera. Le componenti di spostamento e rotazione da determinare valgono allora:

$$v_{C(\delta)} = \frac{\delta}{2} = 0,25 \text{ mm} \quad \leftarrow \text{verso il basso}$$

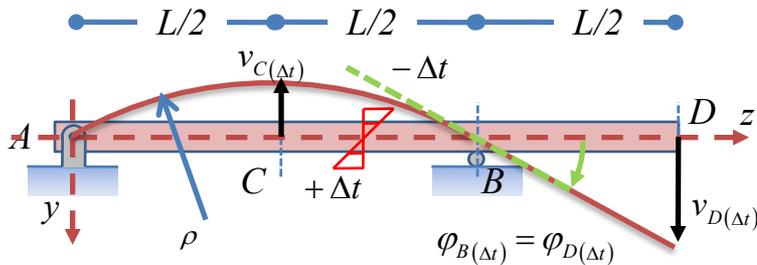
$$\varphi_{B(\delta)} = \frac{\delta}{L} \cong 0,3 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \quad \leftarrow \text{orario}$$

$$v_{D(\delta)} = \frac{3}{2} \delta = 0,75 \text{ mm} \quad \leftarrow \text{verso il basso}$$

$$\varphi_{D(\delta)} = \frac{\delta}{L} \cong 0,3 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \quad \leftarrow \text{orario}$$



## Esempio 2



$$v_{C(\Delta t)} = \frac{\alpha \Delta t L^2}{h} \frac{1}{4} \cong 1,1 \text{ mm} \quad \leftarrow \text{verso l'alto}$$

$$\varphi_{B(\Delta t)} = \frac{\alpha \Delta t}{h} L \cong 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \quad \leftarrow \text{orario}$$

$$v_{D(\Delta t)} = \varphi_{B(\Delta t)} \frac{L}{2} = 2,2 \text{ mm} \quad \leftarrow \text{verso il basso}$$

$$\varphi_{D(\Delta t)} = \varphi_{B(\Delta t)} \cong 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \quad \leftarrow \text{orario}$$

Determiniamo i contributi dovuti alla distorsione termica.

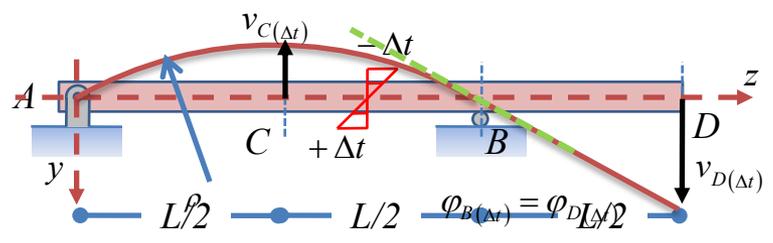
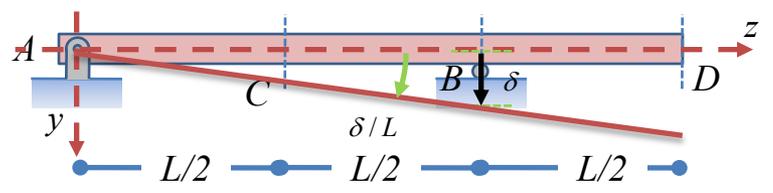
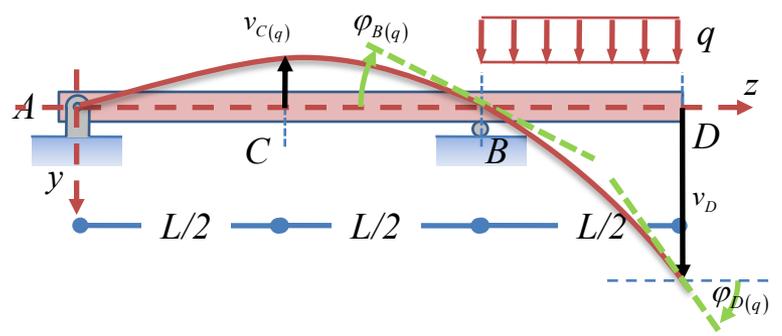
Il tratto  $AB$  della struttura è caricato da una distorsione termica a farfalla, mentre il tratto  $BD$  è scarico. Le caratteristiche della sollecitazione sono nulle. Pertanto il tratto  $AB$  si deforma secondo un arco di circonferenza avente raggio costante pari a

$$\rho = \frac{h}{2 \alpha \Delta t}$$

mentre il tratto  $BD$  si mantiene rettilineo. Utilizzando quanto abbiamo ottenuto nella precedente lezione a proposito di una trave appoggiata-appoggiata caricata da una distorsione termica a farfalla, e da semplici considerazioni geometriche si ricavano i valori di spostamento e rotazione indicati a fianco.



## Esempio 2



Assumendo positivi gli spostamenti concordi con gli assi del sistema di riferimento indicato in figura, ossia gli spostamenti verticali verso il basso e le rotazioni antiorarie, si ha allora:

$$v_C = -v_{C(q)} + v_{C(\delta)} - v_{C(\Delta t)} = -\frac{qL^4}{128EI_x} + \frac{\delta}{2} - \frac{\alpha \Delta t}{h} \frac{L^2}{4} \cong -1,15 \text{ mm}$$

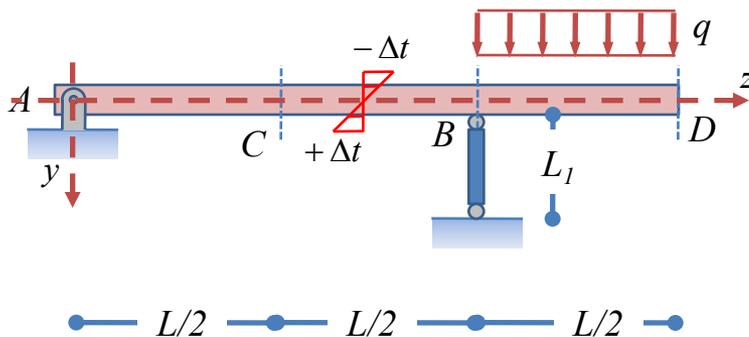
$$\varphi_B = \varphi_{B(q)} + \varphi_{B(\delta)} + \varphi_{B(\Delta t)} = \frac{qL^3}{24EI_x} + \frac{\delta}{L} + \frac{\alpha \Delta t}{h} L \cong 4,3 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$v_D = v_{D(q)} + v_{D(\delta)} + v_{D(\Delta t)} = \frac{11}{384} \frac{qL^4}{EI_x} + \frac{3}{2} \delta + \frac{\alpha \Delta t}{h} \frac{L^2}{2} \cong 4,03 \text{ mm}$$

$$\varphi_D = \varphi_{D(q)} + \varphi_{D(\delta)} + \varphi_{D(\Delta t)} = \frac{qL^3}{16EI_x} + \frac{\delta}{L} + \frac{\alpha \Delta t}{h} L \cong 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$



### Esempio 3



Si determinino gli spostamenti verticali e la rotazione di cui all'esempio precedente nel caso in cui il vincolo in  $B$  non sia rigido, ma deformabile assialmente. Si consideri in particolare che l'appoggio sia realizzato mediante un supporto in gomma ( $E_g=10MPa$ ) avente sezione trasversale circolare di raggio pari a  $60mm$ , ed altezza  $L_1=100mm$ .

Dati:

$$E = 210GPa$$

$$\alpha = 11,7 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ C^{-1}$$

$$\text{Sezione IPE 120 } (I_x=318,5 \text{ cm}^4)$$

$$\Delta t = 20^\circ C$$

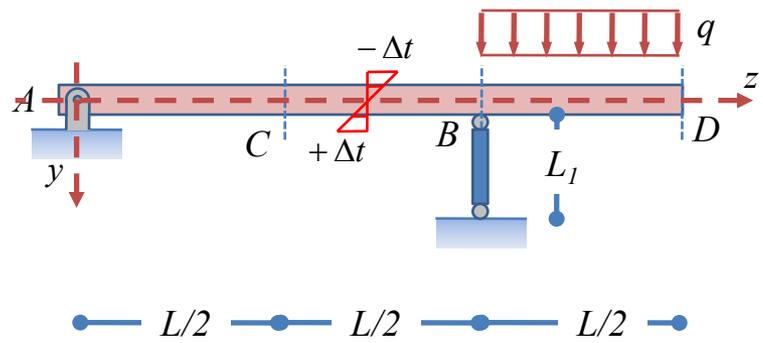
$$\delta = 0,5 \text{ mm}$$

$$q = 5,0 \text{ kN/m}$$

$$L = 1,5 \text{ m}$$



### Esempio 3

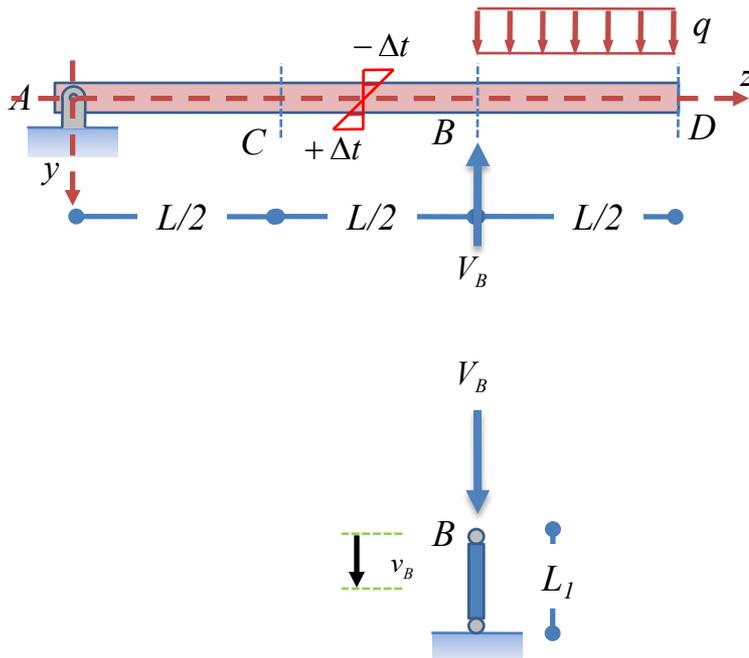


I contributi di spostamento dovuti al carico esterno ed alla distorsione termica, nell'ipotesi di vincoli fissi, sono quelli indicati nel precedente esempio.

Il caso in esame differisce dal precedente solo in quanto il nodo B ha uno spostamento verticale che non è noto a priori, ma che dipende dalla deformazione assiale del supporto.



### Esempio 3



Esplicitiamo la reazione del supporto sulla struttura. Per il principio di azione e reazione, sulla testa del supporto è presente una forza uguale ed opposta alla reazione vincolare. Pertanto, supponendo per la reazione vincolare il verso indicato in figura, il supporto sarà sollecitato da uno sforzo normale costante pari a

$$N = -V_B$$

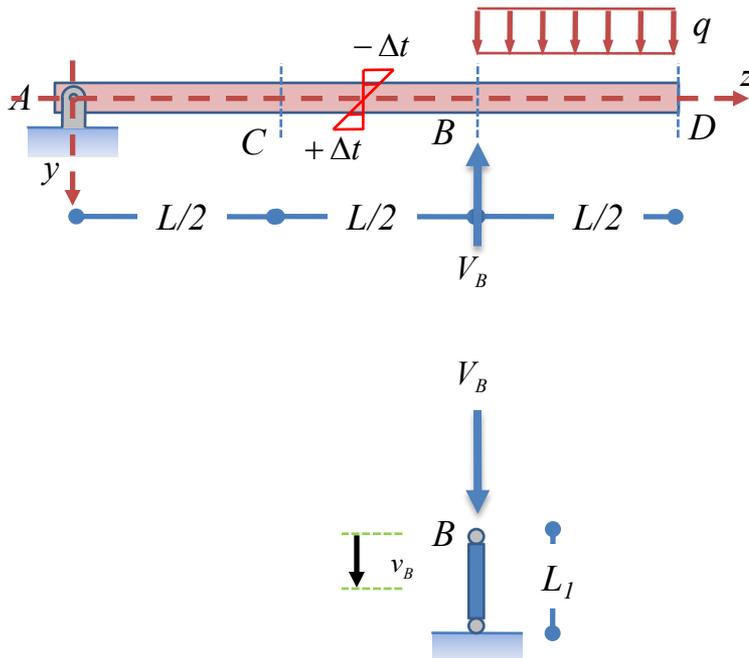
Assumendo che la base di appoggio del supporto sia fissa, lo spostamento verticale del suo estremo superiore è pari al suo accorciamento

$$v_B = \frac{|N|}{E_g A_g} L_1 = \frac{V_B}{E_g A_g} L_1$$

Dove abbiamo indicato con  $A_g$  l'area della sezione trasversale del supporto.



### Esempio 3



Per la struttura schematizzata in figura, imponendo l'equilibrio alla rotazione della struttura attorno al nodo  $A$ , si calcola

$$V_B L - q \frac{L}{2} \left( L + \frac{L}{4} \right) = 0 \rightarrow V_B = \frac{5}{8} qL$$

e quindi

$$v_B = \frac{|N|}{E_g A_g} L_1 = \frac{\frac{5}{8} qL}{E_g A_g} L_1 \cong 4,1 \text{ mm}$$

Ripercorrendo il procedimento seguito nell'esercizio precedente per il calcolo degli spostamenti dovuti al cedimento vincolare di  $B$ , si calcola

$$v_{C(\delta)} = \frac{v_B}{2} \cong 2,1 \text{ mm} \quad \leftarrow \text{verso il basso}$$

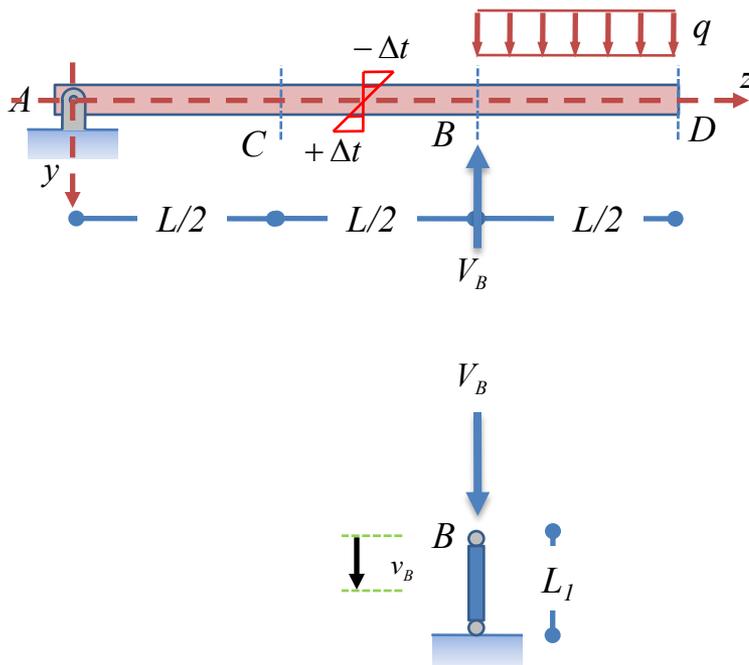
$$\varphi_{B(\delta)} = \frac{v_B}{L} \cong 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \quad \leftarrow \text{orario}$$

$$v_{D(\delta)} = \frac{3}{2} v_B \cong 6,2 \text{ mm} \quad \leftarrow \text{verso il basso}$$

$$\varphi_{D(\delta)} = \frac{v_B}{L} \cong 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \quad \leftarrow \text{orario}$$



### Esempio 3



Gli altri contributi di spostamento rimangono invariati.