

Strutture formate da travi snelle



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Scuola di Architettura
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.

Sistemi isostatici di travi coassiali: calcolo
di spostamenti attraverso il PLV



Sommario

Consideriamo per ora particolari strutture piane, costituite da travi coassiali caricate da azioni ortogonali al loro asse, da momenti agenti nel piano della struttura e da distorsioni termiche "a farfalla". È stato dimostrato che in tali sistemi sono presenti solo sollecitazioni taglianti e flettenti, mentre risultano identicamente nulli sia lo sforzo normale che il momento torcente.

Ci stiamo riferendo in particolare a sistemi di travi snelle la cui deformabilità a taglio può essere trascurata rispetto alla deformabilità a flessione. Consideriamo per ora solo sistemi isostatici.

Nelle precedenti lezioni è stato descritto come determinare le funzioni che descrivono gli spostamenti verticali e le rotazioni di tutte le sezioni trasversali della struttura mediante i metodi di integrazione della linea elastica (del secondo e del quarto ordine).

Nelle applicazioni strutturali, però, spesso non è richiesto di determinare gli spostamenti e le rotazioni di tutte le sezioni trasversali, ma solo di alcune, in corrispondenza delle quali eseguire le verifiche di rigidità (limite degli spostamenti) richieste. In questi casi, può essere efficacemente utilizzato il PLV, come verrà descritto di seguito. Tale metodo verrà esposto in questa sede con riferimento alle strutture sollecitate solo da taglio e momento flettente, ma può essere direttamente applicato ai telai di qualunque tipologia.



Introduzione

Sia dato un telaio strutturale (piano per i casi considerati nel presente corso). Si definiscano su tale telaio un sistema (f) di carichi e sollecitazioni tra loro equilibrati (nel seguito sistema "forze"), ed un sistema (s) di spostamenti e deformazioni congruenti (nel seguito sistema "spostamenti") anche indipendenti tra loro. Tali sistemi soddisfano l'equazione dei lavori virtuali che riportiamo di seguito

$$L_{vi} = L_{ve}$$

$$L_{vi} = \int_0^L N^{(f)}(z) \cdot \varepsilon_0^{(s)}(z) + M_x^{(f)}(z) \cdot \chi_x^{(s)}(z) + T_y^{(s)}(z) \cdot \hat{\gamma}_{zy}^{(s)}(z) + M_t^{(f)}(z) \cdot \theta'^{(s)}(z) dz \quad (\text{PLV1})$$

$$L_{ve} = \int_0^L (n^{(f)}(z) \cdot w_0^{(s)}(z) + q^{(f)}(z) \cdot v_0^{(s)}(z)) dz + \sum_i F_x^{(f)} \cdot w_0^{(s)} + \sum_j F_y^{(f)} \cdot v_0^{(s)} + \sum_h \mathcal{M}^{(f)} \cdot \varphi_x^{(s)} + \sum_k \mathcal{W}^{(f)} \cdot \theta^{(s)}$$

Si ricorda che:

- per il calcolo del lavoro virtuale esterno devono essere considerate tutte le azioni (attive e reattive) presenti sulla struttura
- per telai formati da più travi, i lavori virtuali interno ed esterno si determinano sommando quanto calcolato attraverso la (1) per le singole travi che compongono la struttura.



Introduzione

La relazione (PLV1) vale per un qualsiasi telaio strutturale (piano). Per telai strutturali formati da aste snelle si ha

$$\hat{\gamma}_{zy}^{(s)}(z) \cong 0$$

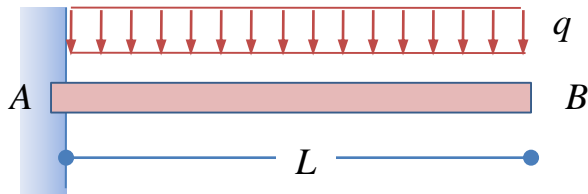
e quindi nella (PLV1) è possibile trascurare il termine del lavoro virtuale interno dipendente dallo scorrimento angolare. Inoltre, per i sistemi strutturali che stiamo considerando in questa fase, ossia per sistemi di travi coassiali non caricati da azioni assiali o torcenti, la (PLV1) si particolarizza come segue:

$$\begin{aligned} L_{vi} &= L_{ve} \\ L_{vi} &= \int_0^L M_x^{(f)}(z) \cdot \chi_x^{(s)}(z) dz \\ L_{ve} &= \int_0^L q^{(f)}(z) \cdot v_0^{(s)}(z) dz + \sum_j F_y^{(f)} \cdot v_0^{(s)} + \sum_h \mathcal{M}^{(f)} \cdot \varphi_x^{(s)} \end{aligned} \quad (\text{PLV2})$$

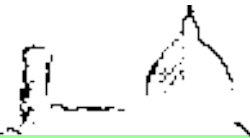
La precedente relazione permette di calcolare agevolmente lo spostamento verticale e/o la rotazione di una generica sezione trasversale delle strutture in esame



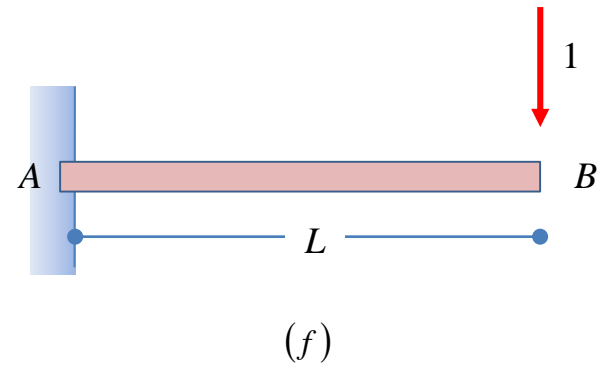
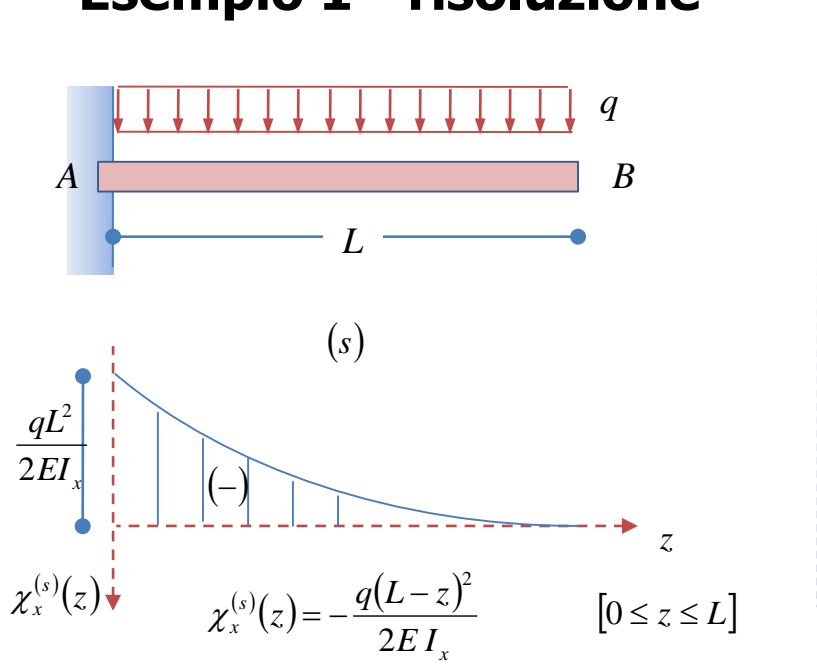
Esempio 1



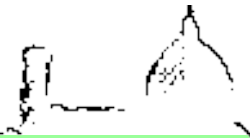
Si determini lo spostamento verticale della sezione B della mensola indicata in figura utilizzando il PLV.



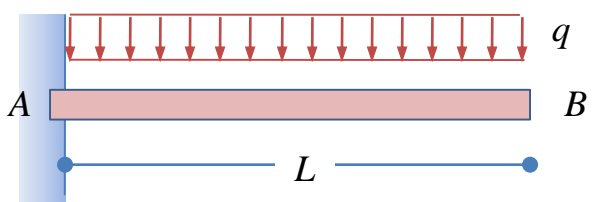
Esempio 1 - risoluzione



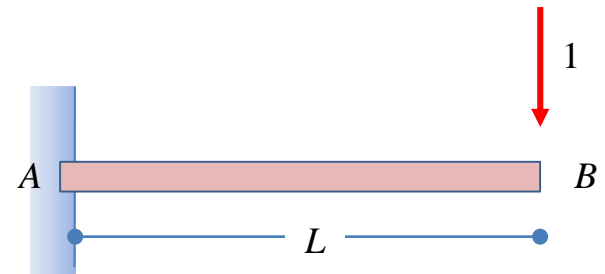
Identifichiamo il sistema reale con il sistema *spostamenti* del PLV. Nel sistema in esame non sono presenti distorsioni termiche e quindi la curvatura totale coincide con quella elastica come indicato in figura.



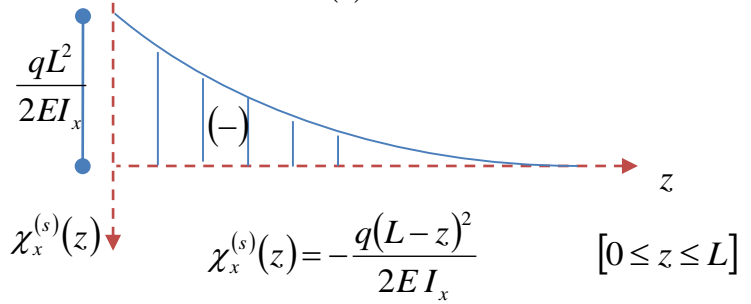
Esempio 1 - risoluzione



(s)



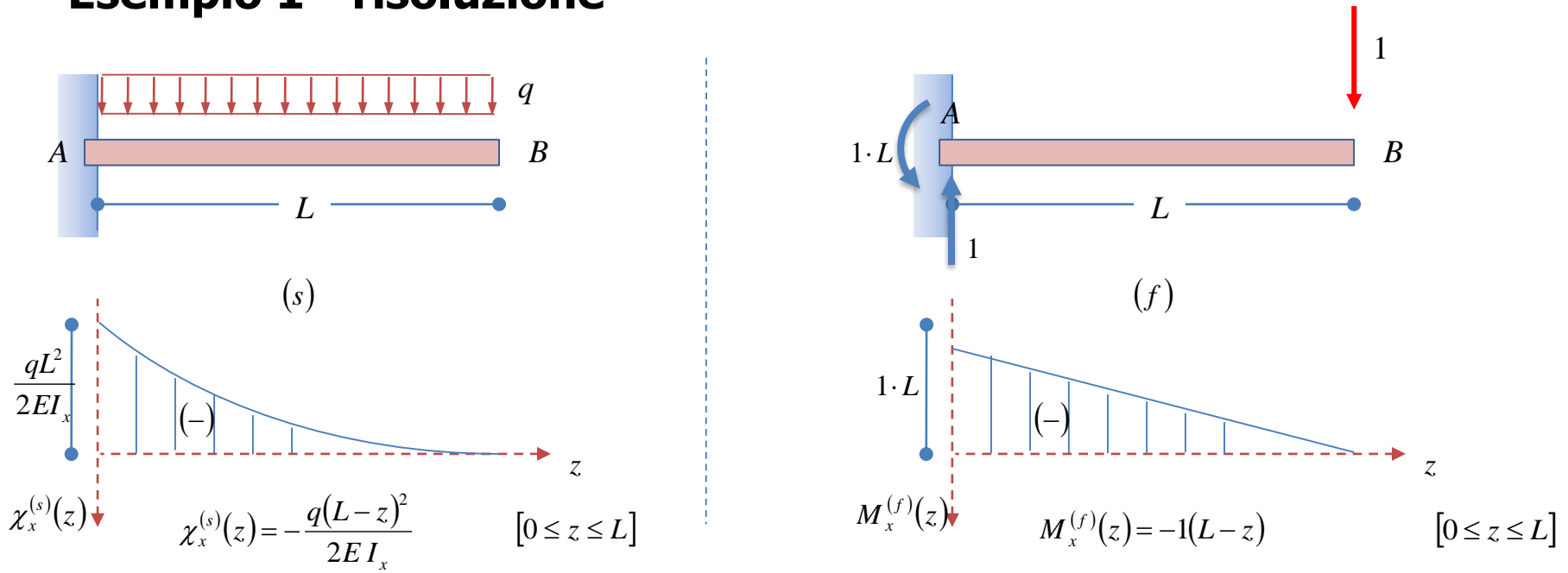
(f)



Introduciamo adesso un sistema "forze" definito *ad hoc* (e quindi eventualmente "fittizio") in maniera tale che dall'equazione dei lavori virtuali sia possibile determinare l'incognita del problema in esame. A tal fine consideriamo un sistema strutturale, geometricamente identico a quello in esame, caricato con una forza unitaria "duale" allo spostamento incognito che vogliamo determinare. Visto che l'incognita del problema in esame è lo spostamento verticale del nodo B, carichiamo il sistema fittizio con una forza verticale unitaria applicata nel nodo B.



Esempio 1 - risoluzione



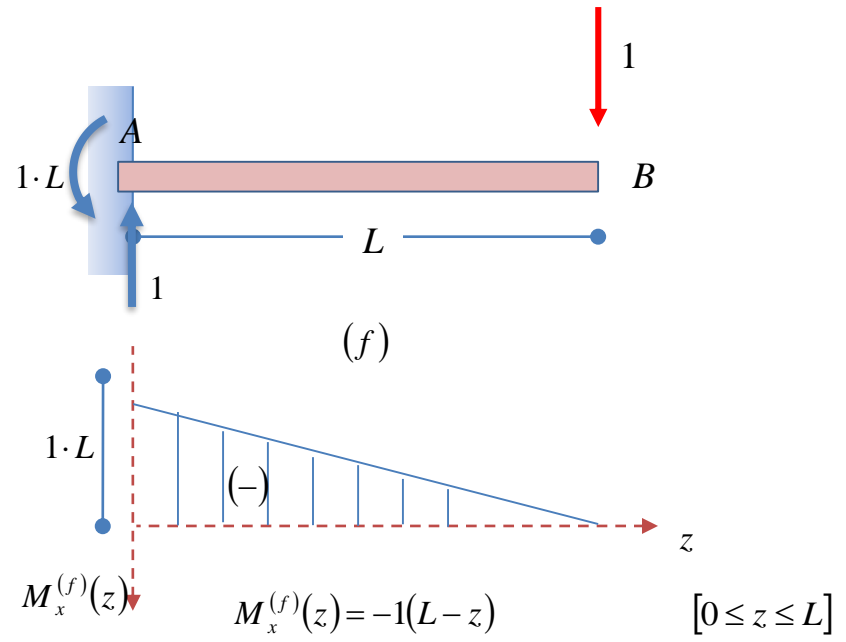
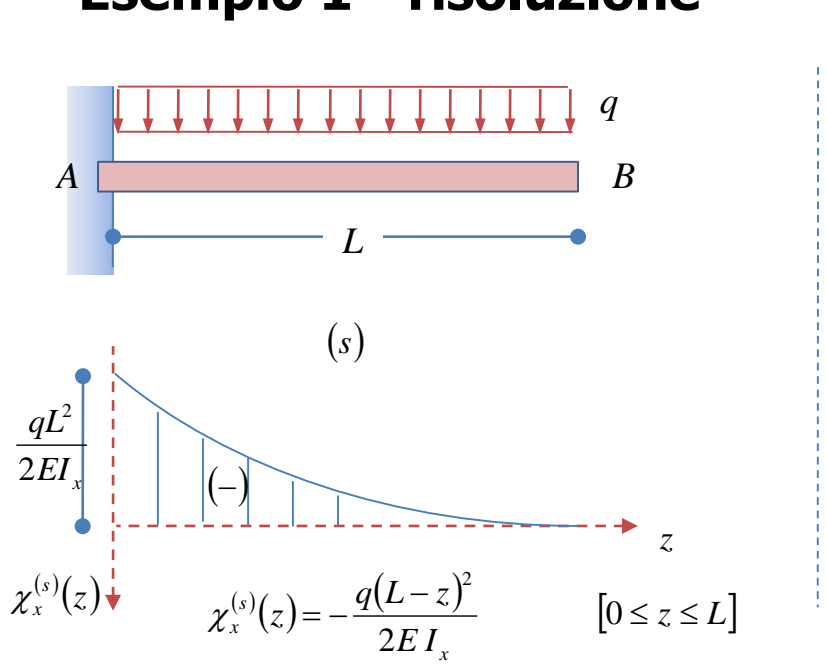
Le reazioni vincolari e la legge del momento per il sistema "fittizio" sono quelli indicati in figura.

Utilizzando le leggi indicate in figura, il lavoro virtuale interno (PLV2) si scrive come segue:

$$L_{vi} = \int_0^L M_x^{(f)}(z) \cdot \chi_x^{(s)}(z) dz = \int_0^L -1(L-z) \cdot \left(-\frac{q(L-z)^2}{2EI_x} \right) dz = \frac{qL^4}{8EI_x}$$

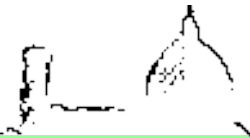


Esempio 1 - risoluzione

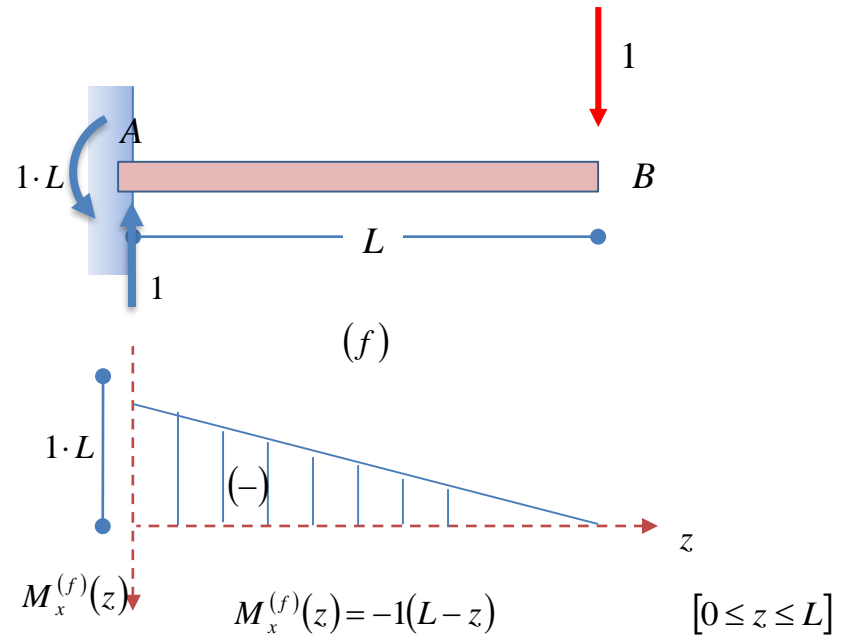
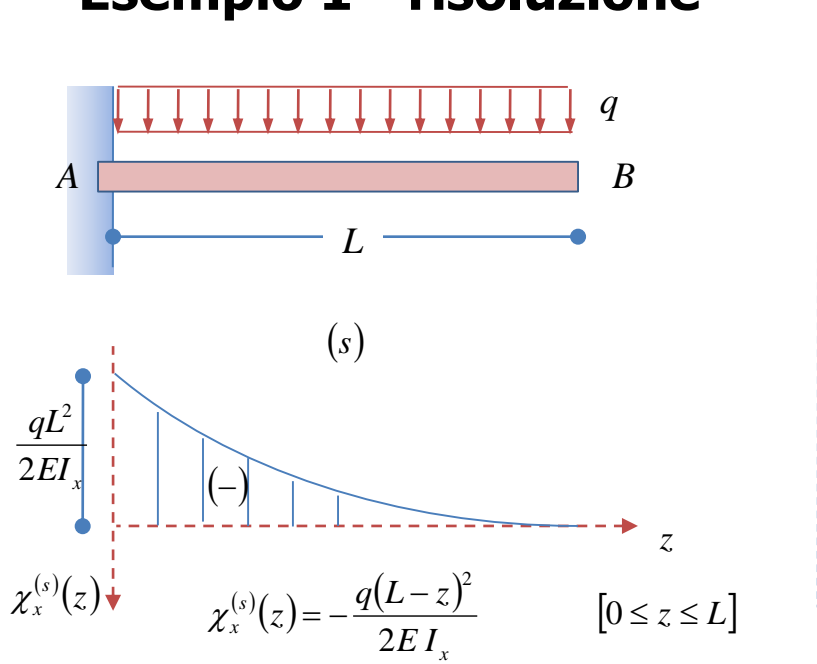


Nel sistema *forze* indicato in figura non sono presenti carichi distribuiti né coppie concentrate. Il lavoro virtuale esterno è pari alla sommatoria del lavoro delle forze (attive e reattive) presenti nel sistema *forze* per lo spostamento dei corrispondenti punti del sistema *spostamenti*.

$$L_{ve} = \int_0^L q^{(f)}(z) \cdot v_0^{(s)}(z) dz + \sum_j F_y^{(f)} \cdot v_0^{(s)} + \sum_h \mathcal{M}^{(f)} \cdot \varphi_x^{(s)} = 1 \cdot v_A + 1 \cdot L \cdot \varphi_A + 1 \cdot v_B = 1 \cdot v_B$$



Esempio 1 - risoluzione



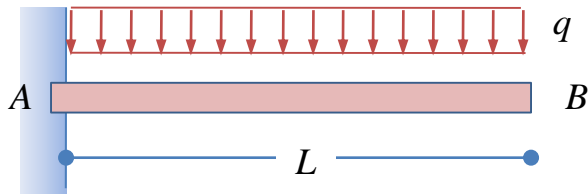
Eguagliando il lavoro virtuale interno ed il lavoro virtuale esterno si ha

$$v_B = \frac{qL^4}{8EI_x}$$

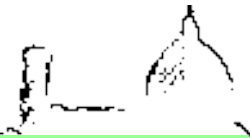
Il segno positivo di tale risultato indica che lo spostamento verticale della sezione B del sistema reale è concorde con la corrispondente forza unitaria agente nel sistema fittizio. (il lavoro virtuale interno è infatti, in questo caso, positivo). Il precedente risultato è in accordo con quanto ottenuto con gli altri metodi esposti in precedenza.



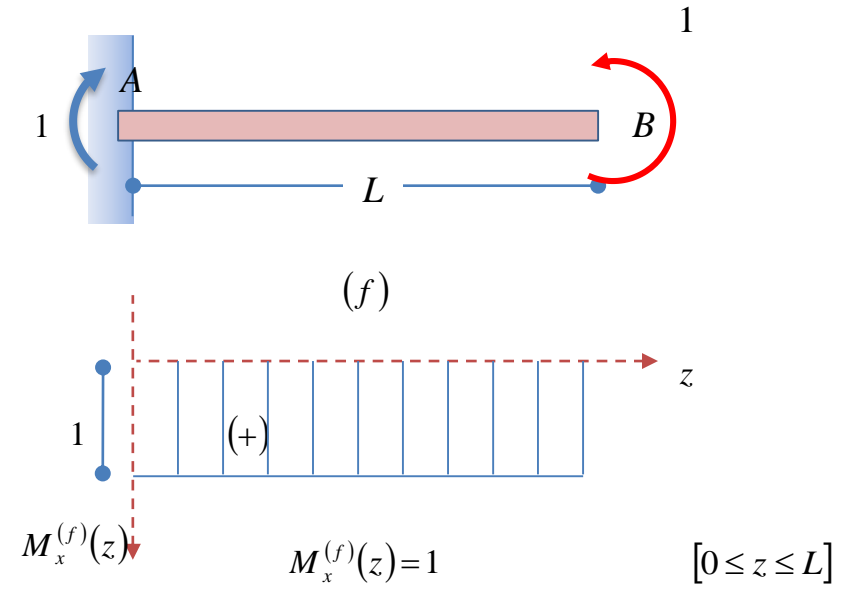
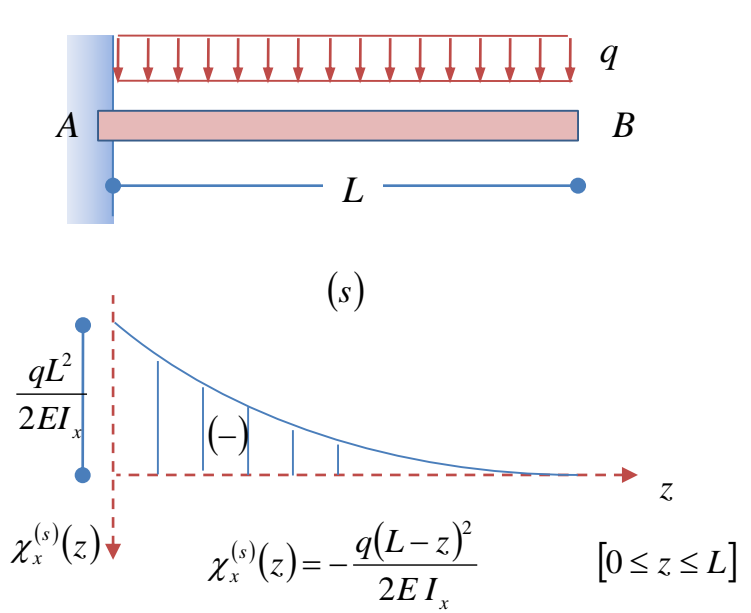
Esempio 2



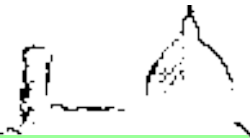
Si determini la rotazione della sezione B della mensola indicata in figura utilizzando il PLV.



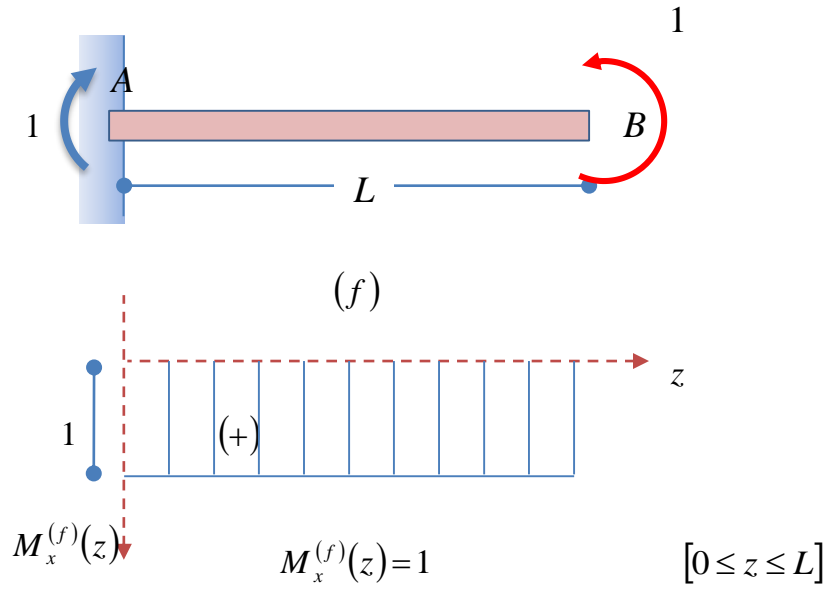
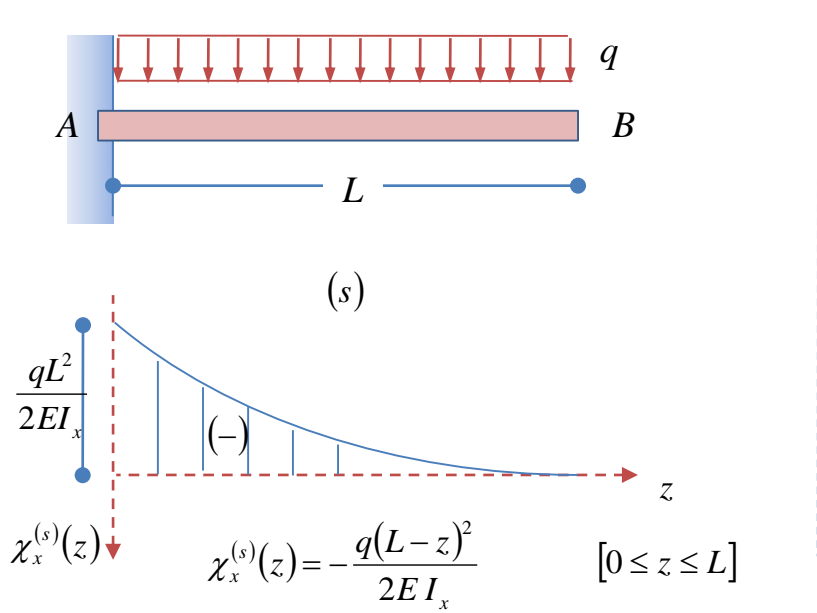
Esempio 2 - risoluzione



Identifichiamo ancora il sistema reale con il sistema *spostamenti* del PLV. Consideriamo un sistema *forze* geometricamente identico a quello reale, ma caricato da una forza unitaria duale alla componente di spostamento che vogliamo determinare, ossia da una coppia unitaria applicata nella sezione B. Le reazioni vincolari e la legge del momento presenti nel sistema *forze* sono indicate in figura.



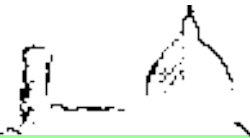
Esempio 2 - risoluzione



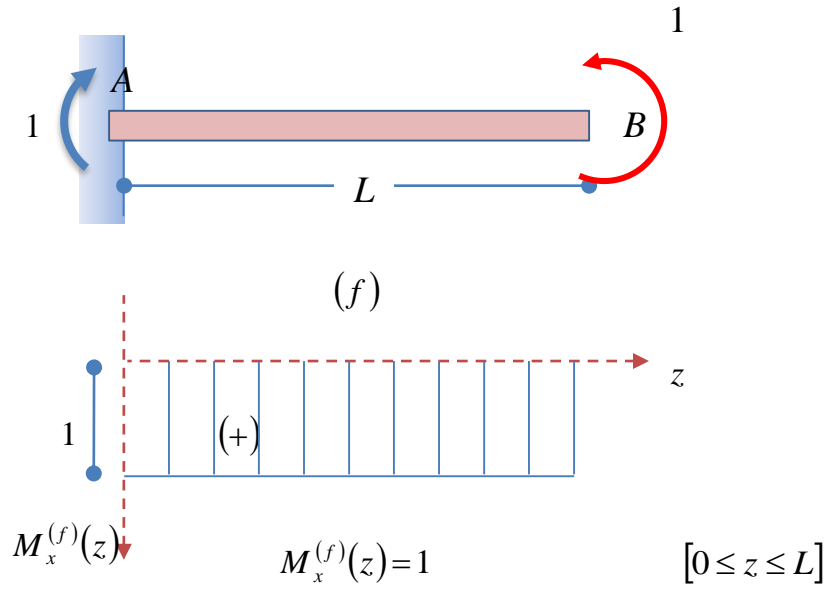
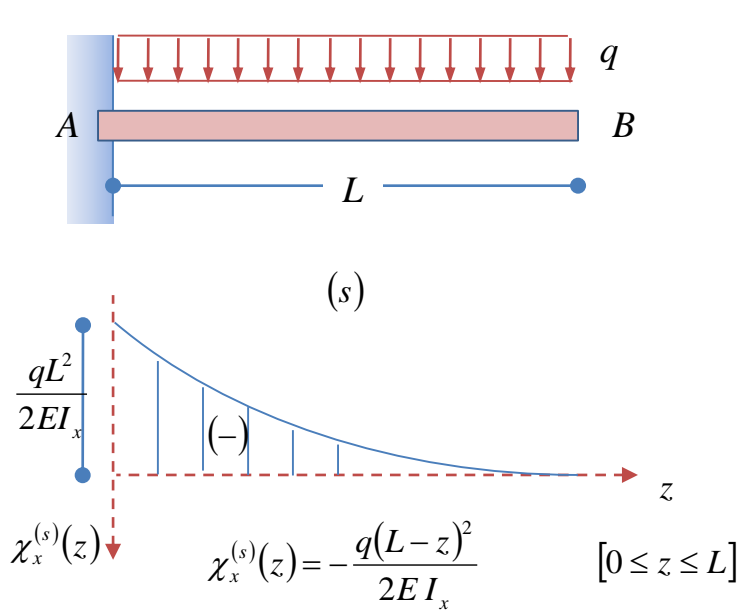
Dalle espressioni del lavoro virtuale interno e del lavoro virtuale esterno si calcola

$$L_{vi} = \int_0^L M_x^{(f)}(z) \cdot \chi_x^{(s)}(z) dz = \int_0^L 1 \cdot \left(-\frac{q(L-z)^2}{2EI_x} \right) dz = -\frac{qL^3}{6EI_x}$$

$$L_{ve} = \int_0^L q^{(f)}(z) \cdot v_0^{(s)}(z) dz + \sum_j F_y^{(f)} \cdot v_0^{(s)} + \sum_h \mathcal{M}^{(f)} \cdot \varphi_x^{(s)} = 1 \cdot \varphi_A + 1 \cdot \varphi_B = 1 \cdot \varphi_B$$



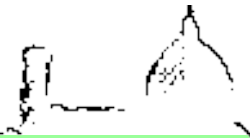
Esempio 2 - risoluzione



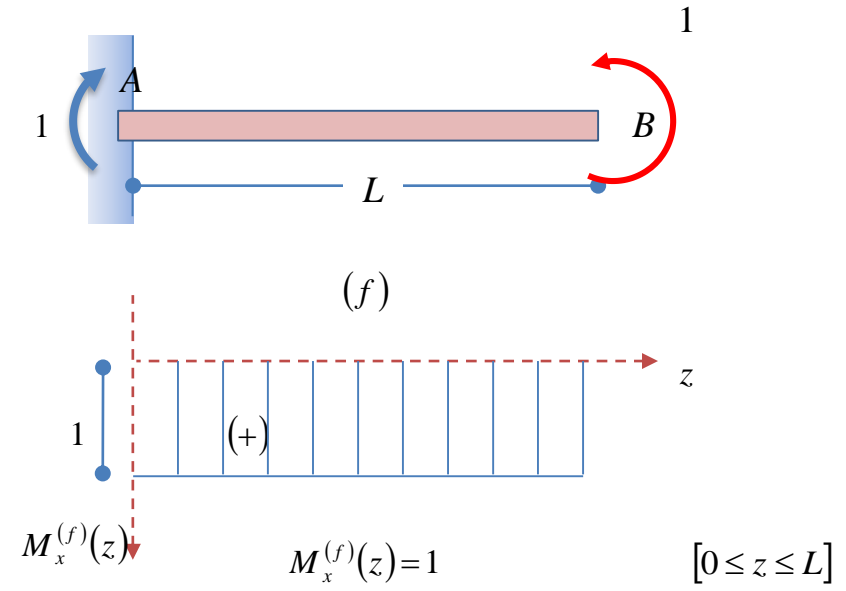
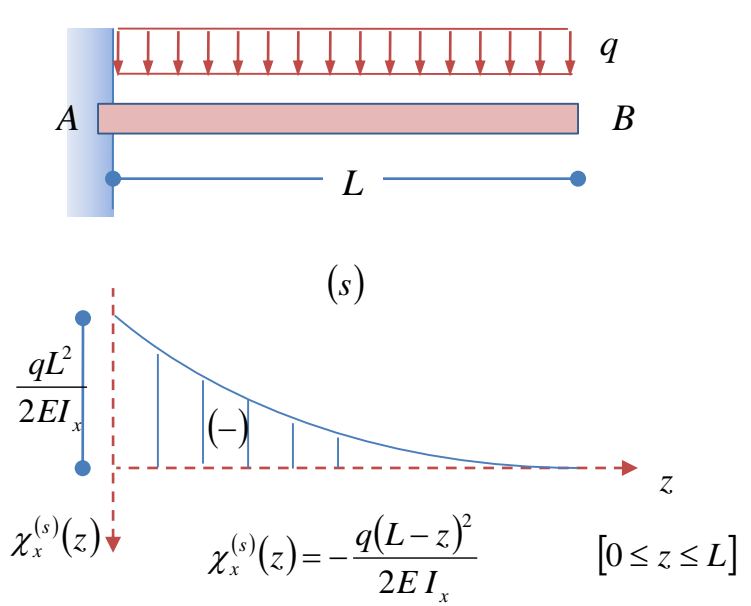
Eguagliando i lavori virtuali interno ed esterno si ottiene

$$L_{vi} = L_{ve} \rightarrow \varphi_B = -\frac{qL^3}{6EI_x}$$

Il segno meno indica che la rotazione della sezione B è discorde con la coppia unitaria applicata nel sistema fittizio (ossia è oraria). Il precedente risultato è ovviamente in accordo con quanto ottenuto nelle lezioni precedenti.



Esempio 2 - risoluzione

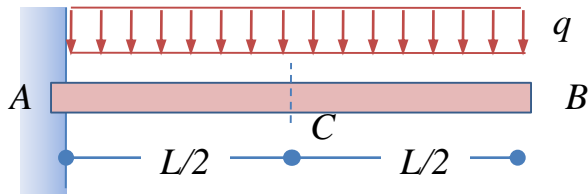


OCCERVAZIONE

Si osservi che per il calcolo del lavoro virtuale interno è necessario effettuare l'integrale del prodotto della funzione del momento flettente presente nel sistema *forze* per la funzione di curvatura presente nel sistema *spostamento*. Affinché questo sia possibile le due funzioni devono ovviamente essere scritte rispetto allo stesso sistema di riferimento e devono avere lo stesso dominio di esistenza. Tali condizioni sono entrambe verificate per gli esempi esposti nella presente lezione.



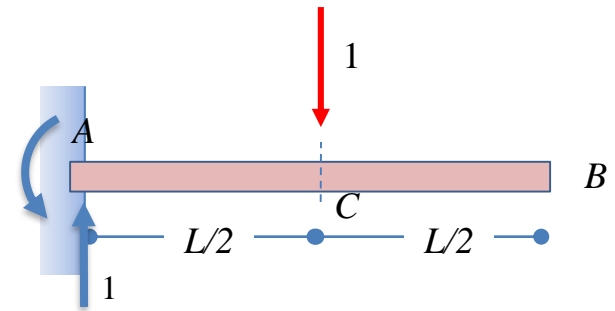
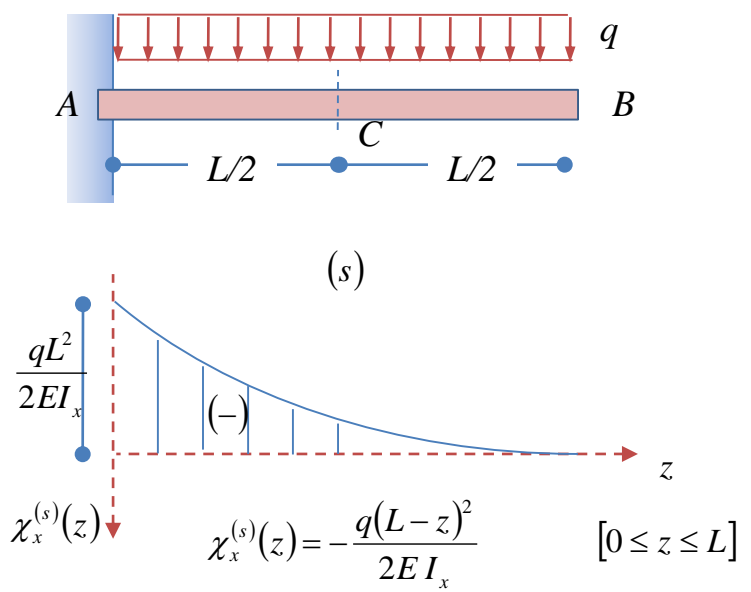
Esempio 3



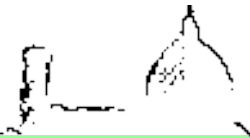
Si determini lo spostamento verticale della sezione C della mensola indicata in figura utilizzando il PLV.



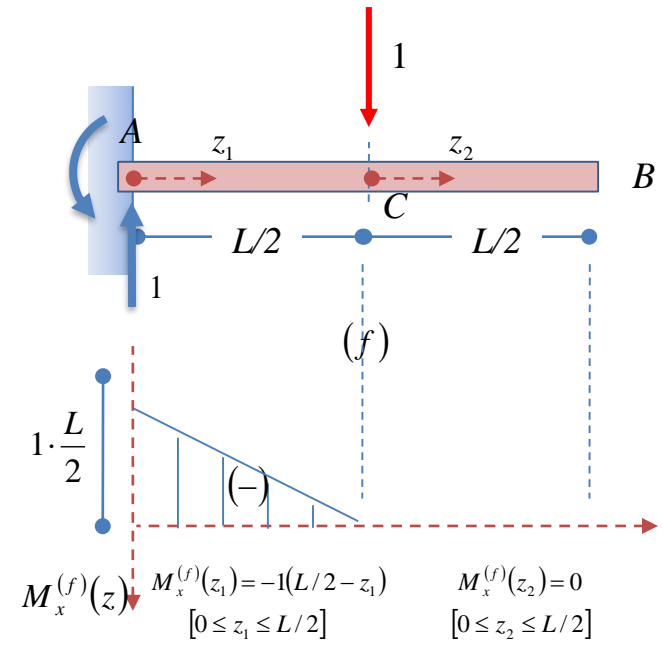
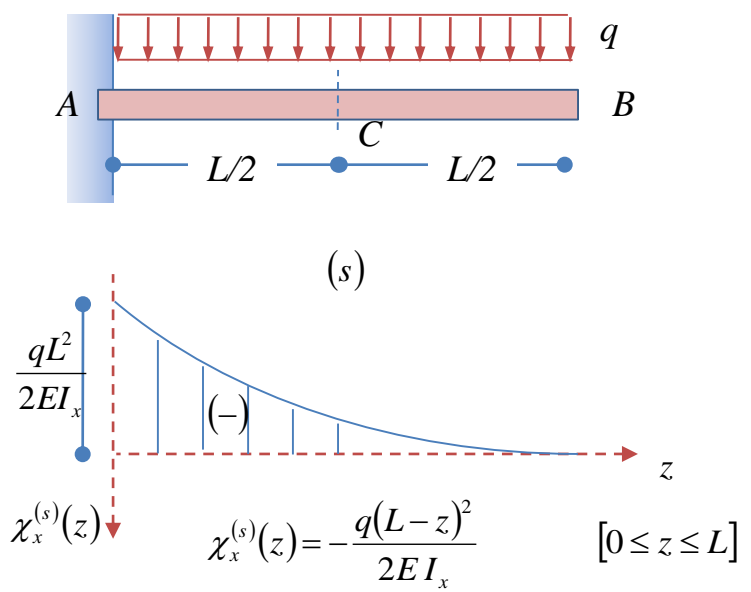
Esempio 3 - risoluzione



Identifichiamo ancora il sistema reale con il sistema *spostamenti* del PLV. La funzione della curvatura è quella indicata in figura. Essa è scritta rispetto ad un sistema di riferimento avente origine nel baricentro della sezione A ed asse z coincidente con l'asse geometrico della mensola. Per il calcolo dello spostamento verticale della sezione C si considera un sistema *forze* geometricamente identico a quello reale, caricato da una forza verticale unitaria applicata in corrispondenza della sezione C.



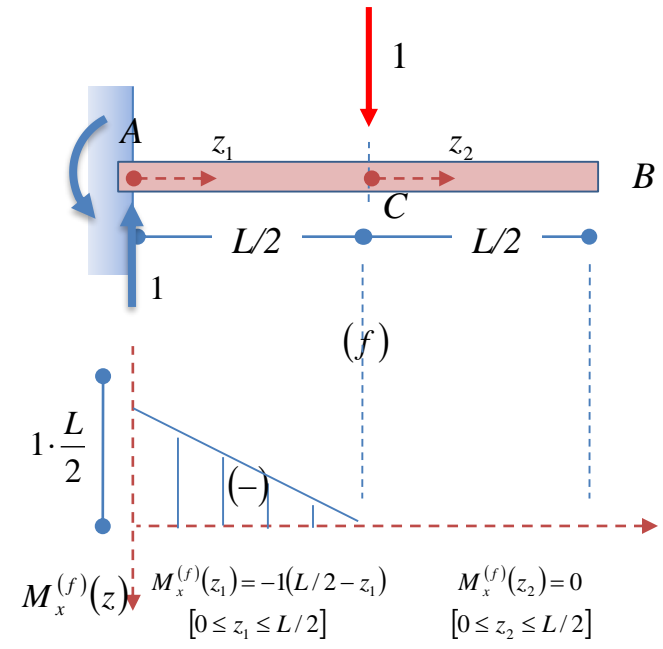
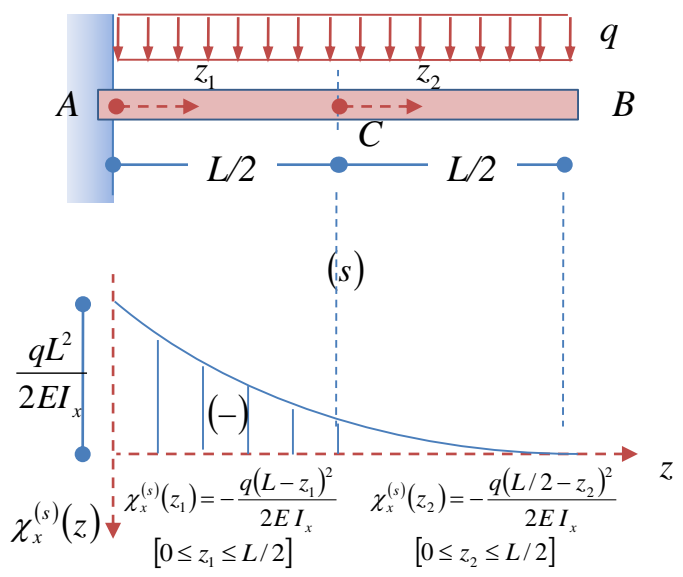
Esempio 3 - risoluzione



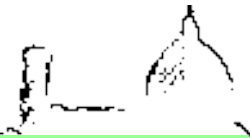
Le reazioni vincolari e la legge del momento presenti nel sistema *forze* sono indicate in figura. Il sistema *forze* si compone di due tratti omogenei e pertanto è necessario scrivere due funzioni per la legge del momento, ad esempio rispetto ai sistemi di riferimento indicati in figura. Tali riferimenti non coincidono con quelli considerati nel sistema *spostamenti* e quindi in questo modo non è possibile calcolare il lavoro virtuale interno nell'equazione dei lavori virtuali.



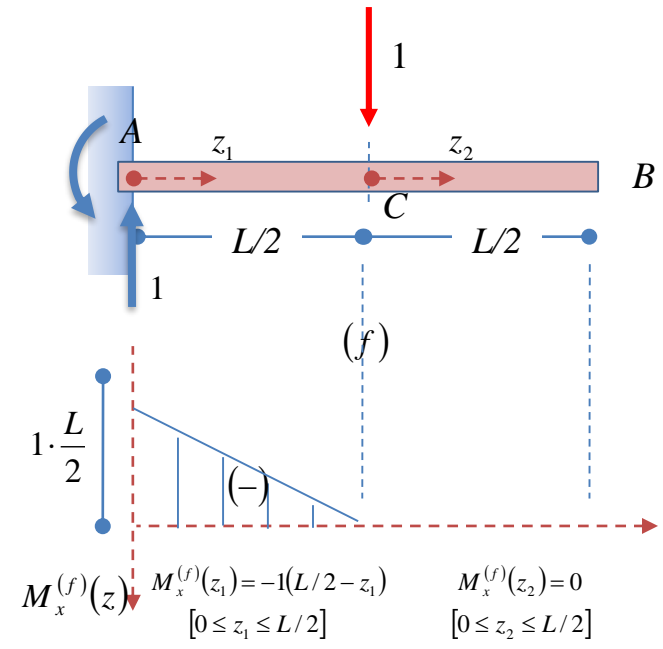
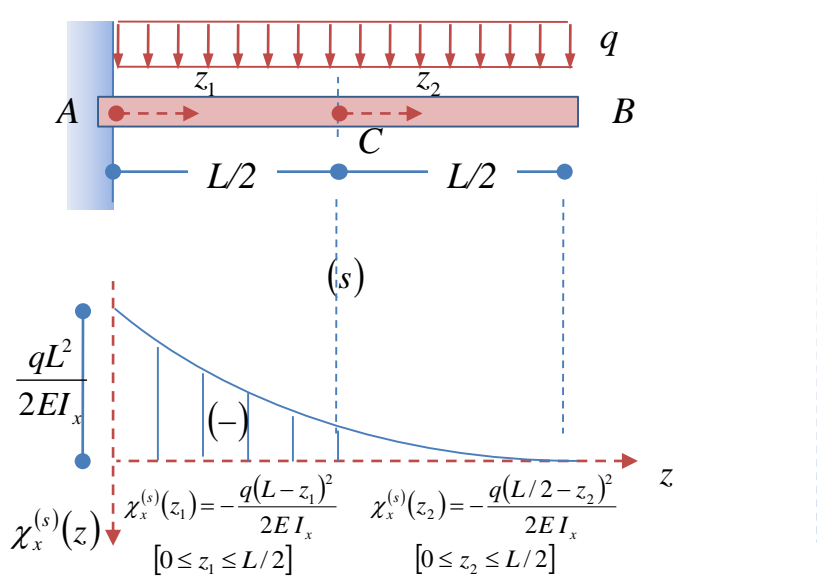
Esempio 3 - risoluzione



Per tale motivo determiniamo la legge della curvatura presente nel sistema *spostamenti* utilizzando lo stesso sistema di riferimento che abbiamo considerato nel sistema *forze*.



Esempio 3 - risoluzione



A questo punto è possibile calcolare i lavori virtuali interno ed esterno e lo spostamento verticale della sezione C come segue:

$$L_{vi} = \int_0^{L/2} M_x^{(f)}(z_1) \cdot \chi_x^{(s)}(z_1) dz_1 + \int_0^{L/2} M_x^{(f)}(z_2) \cdot \chi_x^{(s)}(z_2) dz_2 = \frac{17qL^4}{384EI_x}$$

$$L_{ve} = \int_0^L q^{(f)}(z) \cdot v_0^{(s)}(z) dz + \sum_j F_y^{(f)} \cdot v_0^{(s)} + \sum_h m^{(f)} \cdot \varphi_x^{(s)} = 1 \cdot v_B$$

$v_B = \frac{17qL^4}{384EI_x}$



Procedura operativa per l'applicazione del PLV

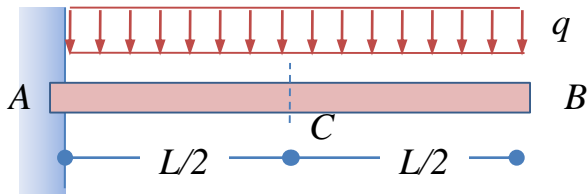
Al fine di garantire a-priori che le leggi del momento flettente *fittizio* e della curvatura *reale* siano espresse rispetto al medesimo sistema di riferimento, nell'applicazione del PLV può essere conveniente utilizzare la seguente procedura operativa:

1. si definisce il sistema *forze* (\equiv sistema *fittizio*) caricando il sistema *reale* (\equiv sistema *spostamenti*) solo con una azione unitaria duale allo spostamento o alla rotazione da determinare;
2. si individuano i nodi (estremi di tratti omogenei o punti di discontinuità) dei sistemi *reale* e *fittizio*;
3. si suddividono entrambi i sistemi strutturali in tratti delimitati da tutti i nodi determinati al punto precedente;
4. si introducono i sistemi di riferimento rispetto ai quali scrivere le funzioni e si calcolano le leggi della curvatura nel sistema spostamento e del momento flettente nel sistema forze.

Può essere conveniente predisporre anche una tabella nella quale sintetizzare tutte le funzioni della curvatura e del momento flettente così determinate.

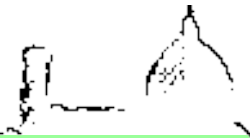


Esempio 3

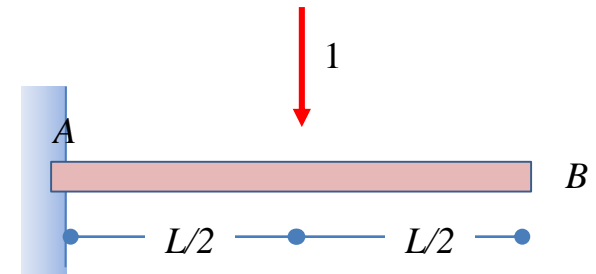
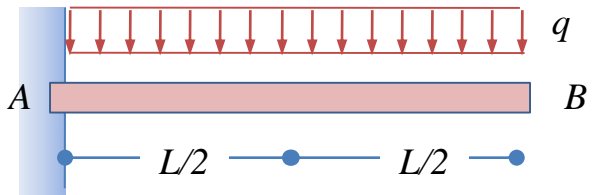


Si determini lo spostamento verticale della sezione C della mensola indicata in figura utilizzando il PLV.

Di seguito applichiamo la procedura operativa descritta nella slide precedente all'esempio 3 svolto nella presente lezione.



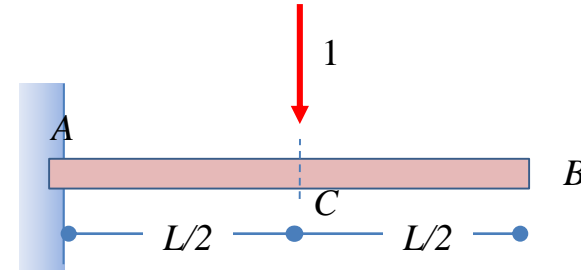
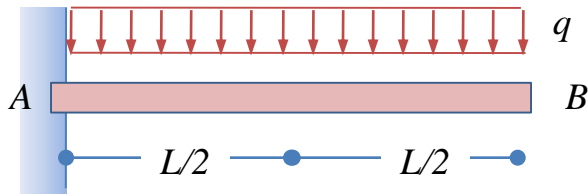
Esempio 3



1. si definisce il sistema *forze* (\equiv *sistema fittizio*) caricando il sistema *reale* (\equiv *sistema spostamenti*) solo con una azione unitaria duale allo spostamento o alla rotazione da determinare;



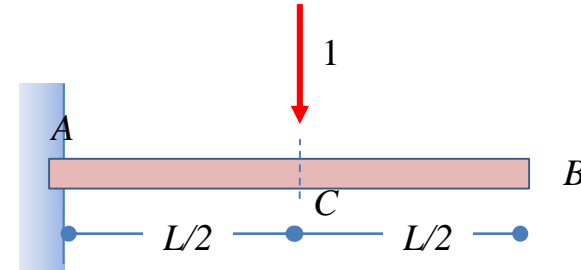
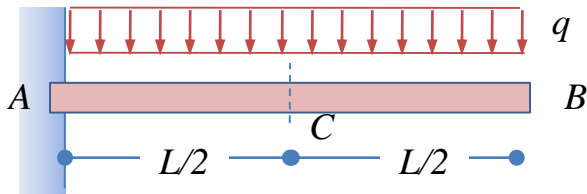
Esempio 3



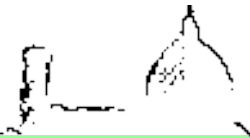
2. si individuano i nodi (estremi di tratti omogenei o punti di discontinuità) dei sistemi *reale e fittizio*;



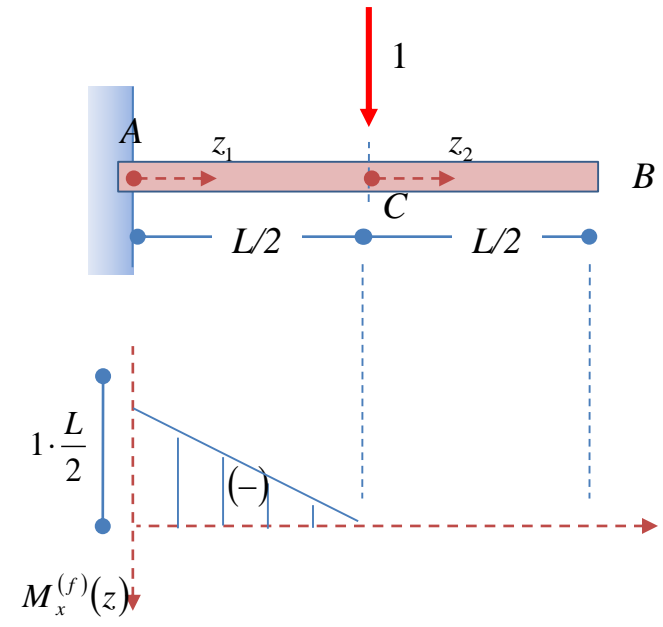
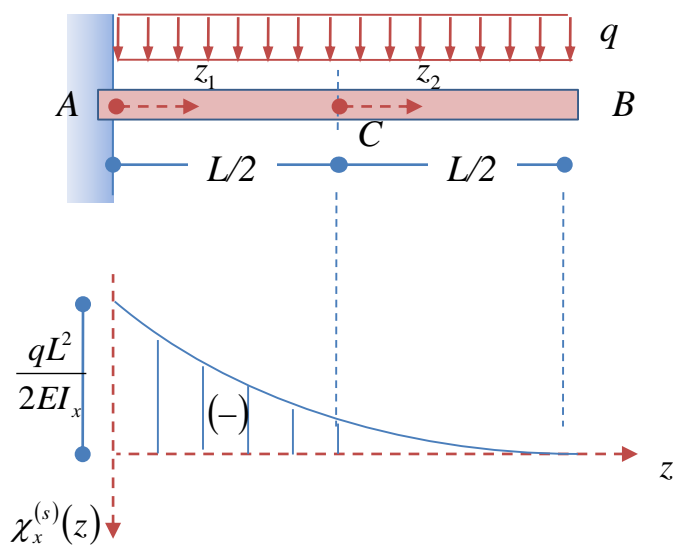
Esempio 3



3. si suddividono entrambi i sistemi strutturali in tratti delimitati da tutti i nodi determinati al punto precedente;



Esempio 3

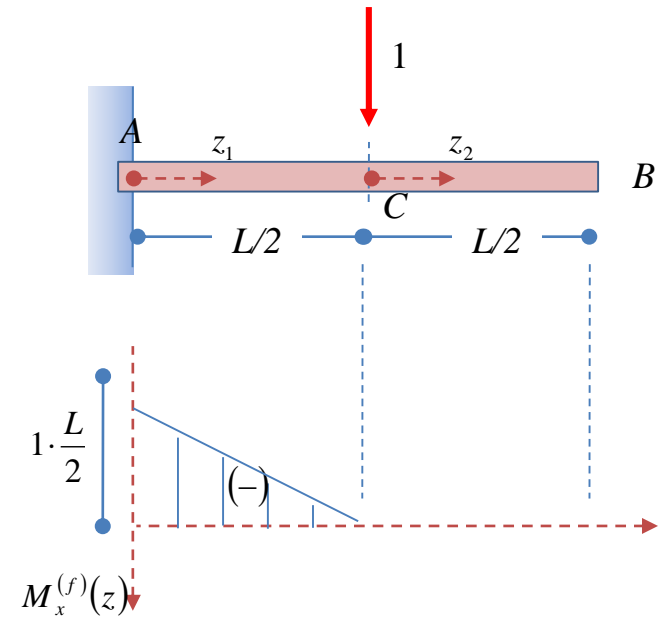
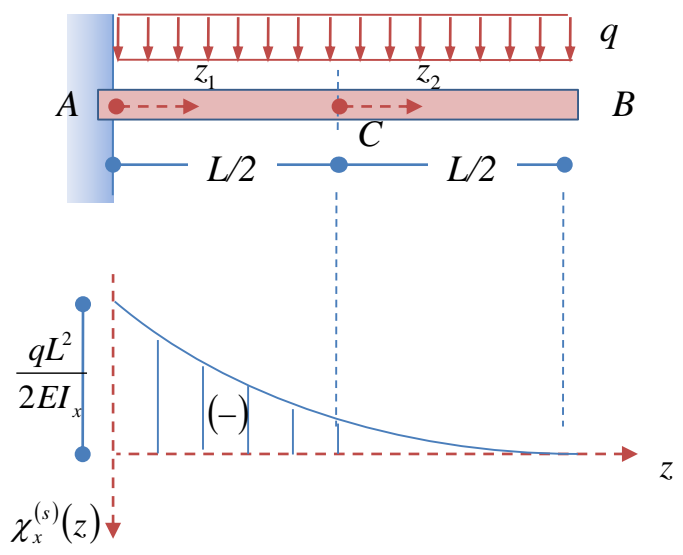


4. si introducono i sistemi di riferimento rispetto ai quali scrivere le funzioni e si calcolano le leggi della curvatura nel sistema spostamento e del momento flettente nel sistema forze.

Tratto	Dominio	$\chi_x^{(s)}$	$M_x^{(f)}$
AC	$0 \leq z_1 \leq L/2$	$-\frac{q(L-z_1)^2}{2EI_x}$	$-1(L/2-z_1)$
CB	$0 \leq z_1 \leq L/2$	$-\frac{q(L/2-z_2)^2}{2EI_x}$	0



Esempio 3



A questo punto l'applicazione del PLV è immediata.

Tratto	Dominio	$\chi_x^{(s)}$	$M_x^{(f)}$
AC	$0 \leq z_1 \leq L/2$	$-\frac{q(L-z_1)^2}{2EI_x}$	$-1(L/2-z_1)$
CB	$0 \leq z_1 \leq L/2$	$-\frac{q(L/2-z_2)^2}{2EI_x}$	0

$$L_{vi} = L_{ve} \rightarrow v_B = \frac{17qL^4}{384EI_x}$$