

Strutture formate da travi snelle



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Scuola di Architettura
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.

Sistemi isostatici di travi coassiali: calcolo
di spostamenti attraverso il PLV

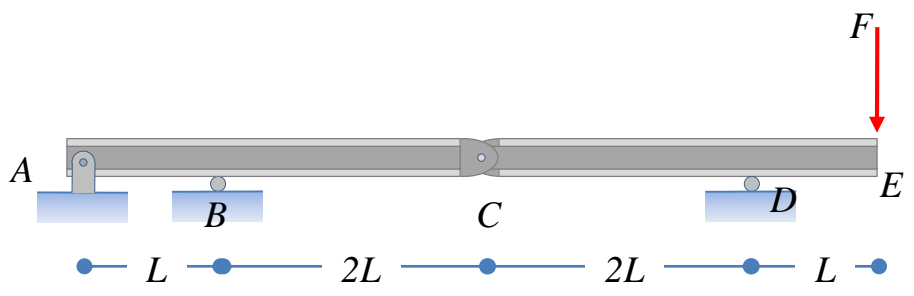


Sommario

Di seguito verrà mostrato come applicare l'equazione dei lavori virtuali per il calcolo di spostamenti o rotazioni relative tra due sezioni trasversali.



Esempio 1



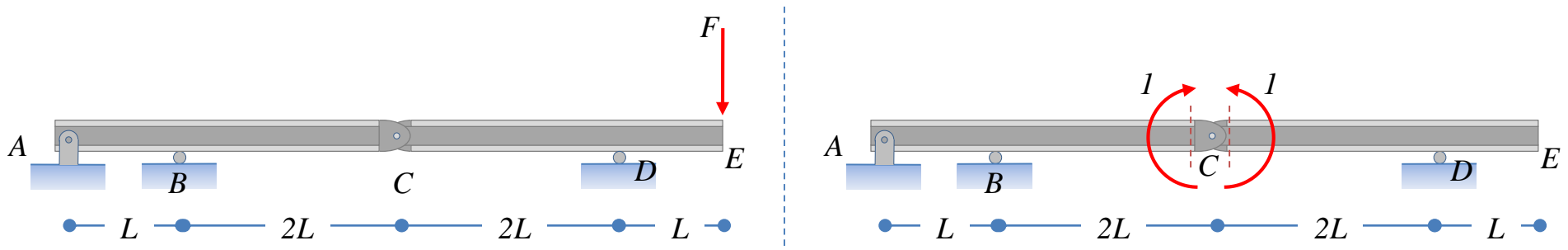
$F = 1,0 \text{ kN}$
 $L = 1,0 \text{ m}$

La trave in acciaio schematizzata in figura ha sezione trasversale IPE 160 ($E=210\text{GPa}$, $I_x=869,0\text{cm}^4$, $\alpha=11.7 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$).
Si calcoli la rotazione relativa tra le sezioni immediatamente a destra ed a sinistra della cerniera C .

$$\Delta\varphi_{xC} = \varphi_{xC}^{(d)} - \varphi_{xC}^{(s)}$$



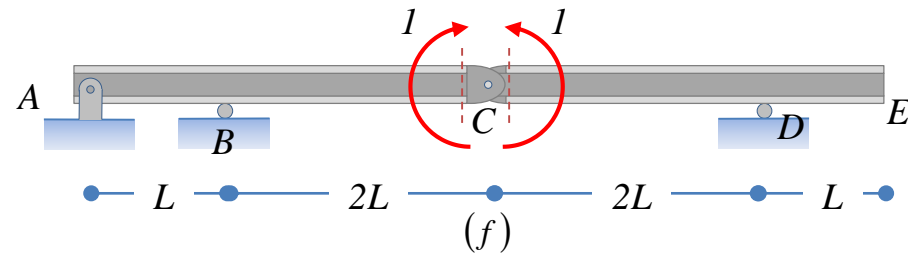
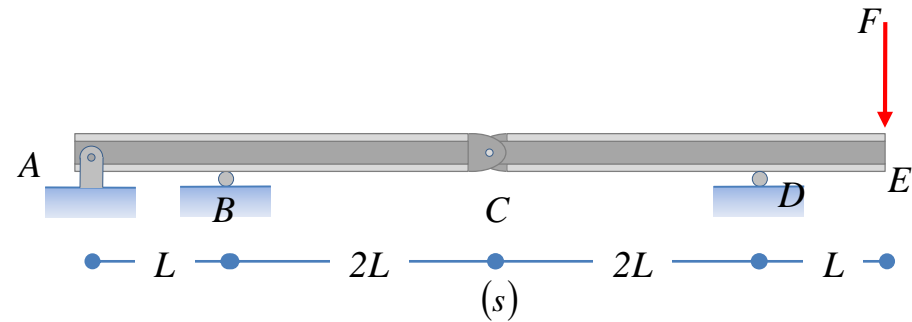
Esempio 1 - soluzione



1. si definisce il sistema *forze* (\equiv sistema *fittizio*) caricando il sistema *reale* (\equiv sistema *spostamenti*) solo con una azione unitaria duale allo spostamento o alla rotazione da determinare;
 nell'esempio in esame è richiesto di determinare la rotazione relativa tra le due sezioni collegate dalla cerniera C. Pertanto nel sistema *forze* applichiamo due coppie unitarie ed opposte applicate una a destra ed una a sinistra della sezione C. Il motivo di tale scelta apparirà evidente quando scriveremo l'espressione del lavoro virtuale esterno. Si osservi che abbiamo scelto (arbitrariamente) di applicare due coppie che tendono a fare ruotare la sezione a destra di C in senso antiorario rispetto alla sezione a sinistra di C. Implicitamente stiamo assumendo positive le rotazioni relative duali a tali coppie, ossia tali che la sezione a destra della cerniera ruoti in senso antiorario rispetto alla sezione a sinistra.



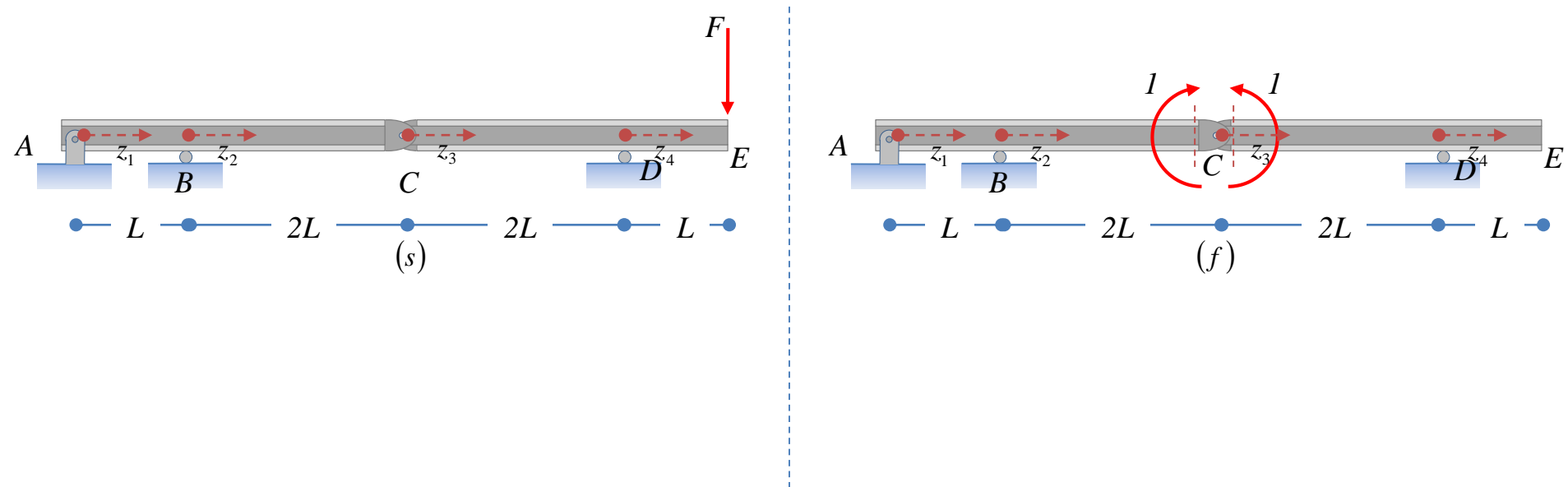
Esempio 1 - soluzione



2. si individuano i nodi (estremi di tratti omogenei o punti di discontinuità) dei sistemi *reale* e *fittizio*; per l'esempio in oggetto essi sono le sezioni *A*, *B*, *C*, *D* ed *E* indicate in figura;
3. si suddividono entrambi i sistemi strutturali in tratti delimitati da tutti i nodi determinati al punto precedente;



Esempio 1 - soluzione



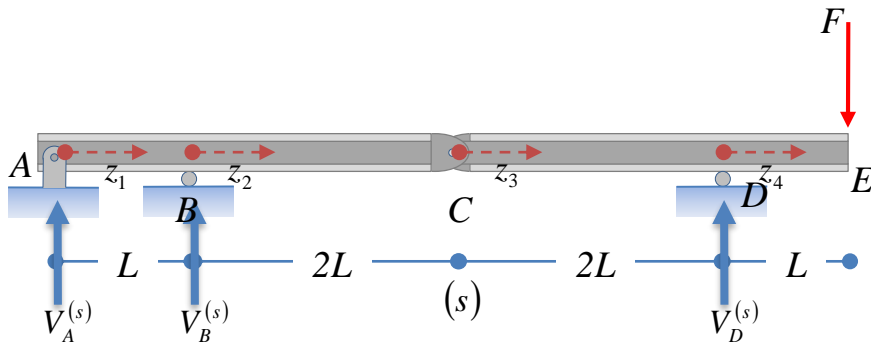
4. si introducono i sistemi di riferimento rispetto ai quali scrivere le funzioni e si calcolano le leggi della curvatura nel sistema spostamento e del momento flettente nel sistema forze.

I sistemi di riferimento rispetto ai quali verranno scritte le funzioni della curvatura e del momento flettente sono quelli indicati in figura.

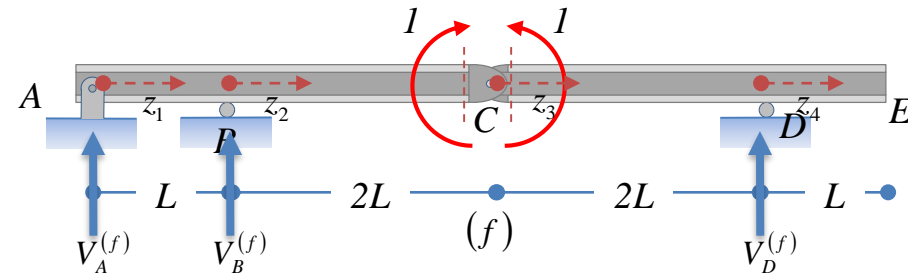
Il calcolo delle reazioni vincolari e delle funzioni della curvatura nel sistema reale e del momento flettente nel sistema fittizio è effettuato nelle prossime slide.



Esempio 1 – calcolo delle reazioni vincolari



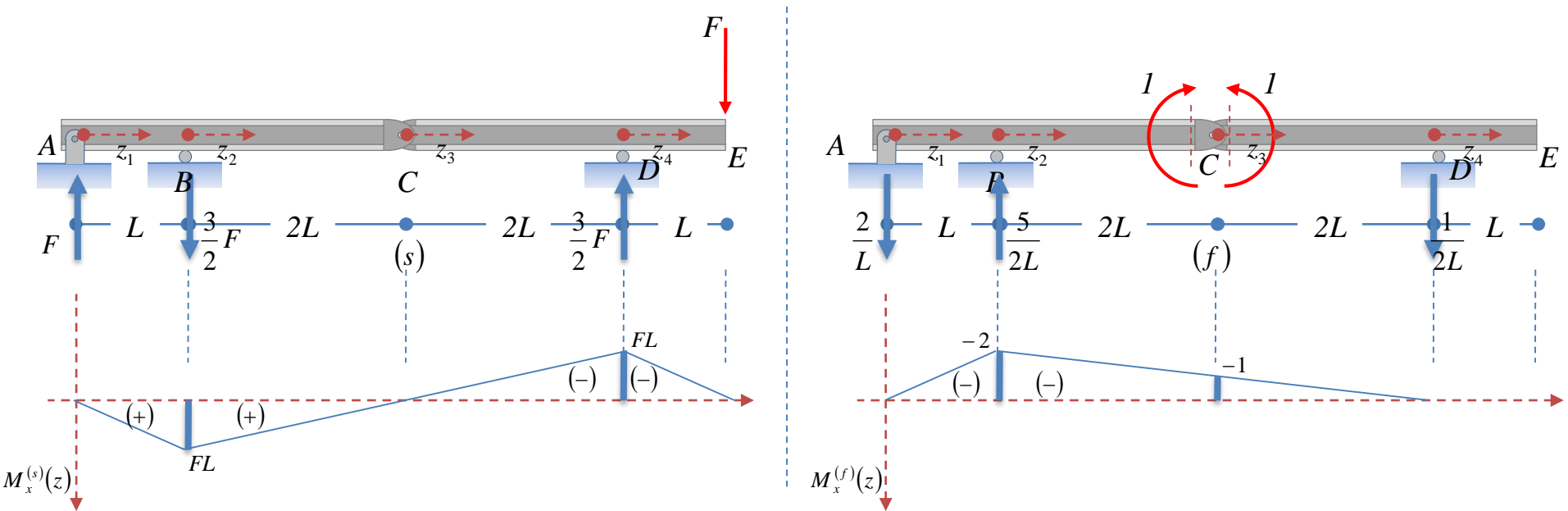
$$\begin{cases} V_A^{(s)} + V_B^{(s)} + V_D^{(s)} - F = 0 \\ \sum M_{(A)} = 0 \rightarrow V_B^{(s)}L + V_D^{(s)}5L - F6L = 0 \\ \sum M_{(C)}^{(CE)} = 0 \rightarrow V_D^{(s)}2L - F3L = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_A^{(s)} = F \\ V_B^{(s)} = -\frac{3}{2}F \\ V_D^{(s)} = \frac{3}{2}F \end{cases}$$



$$\begin{cases} V_A^{(f)} + V_B^{(f)} + V_D^{(f)} = 0 \\ \sum M_{(A)} = 0 \rightarrow V_B^{(f)}L + V_D^{(f)}5L = 0 \\ \sum M_{(C)}^{(CE)} = 0 \rightarrow V_D^{(f)}2L + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_A^{(f)} = -\frac{2}{L} \\ V_B^{(f)} = \frac{5}{2L} \\ V_D^{(f)} = -\frac{1}{2L} \end{cases}$$

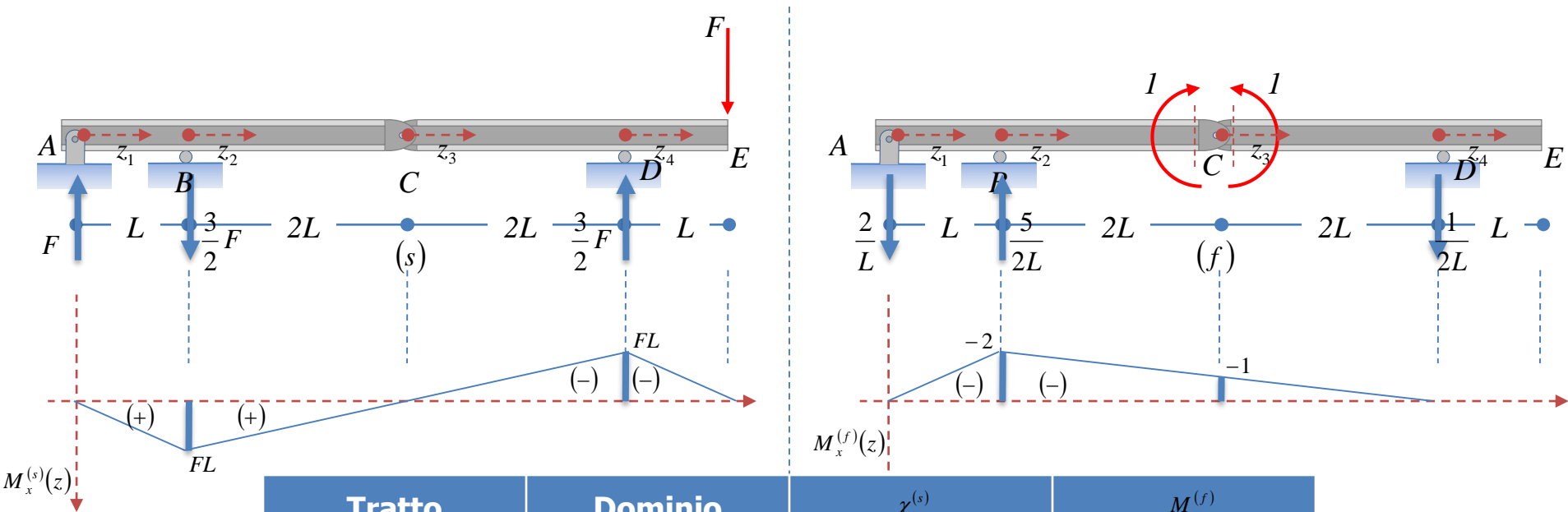


Esempio 1 – diagrammi del momento flettente





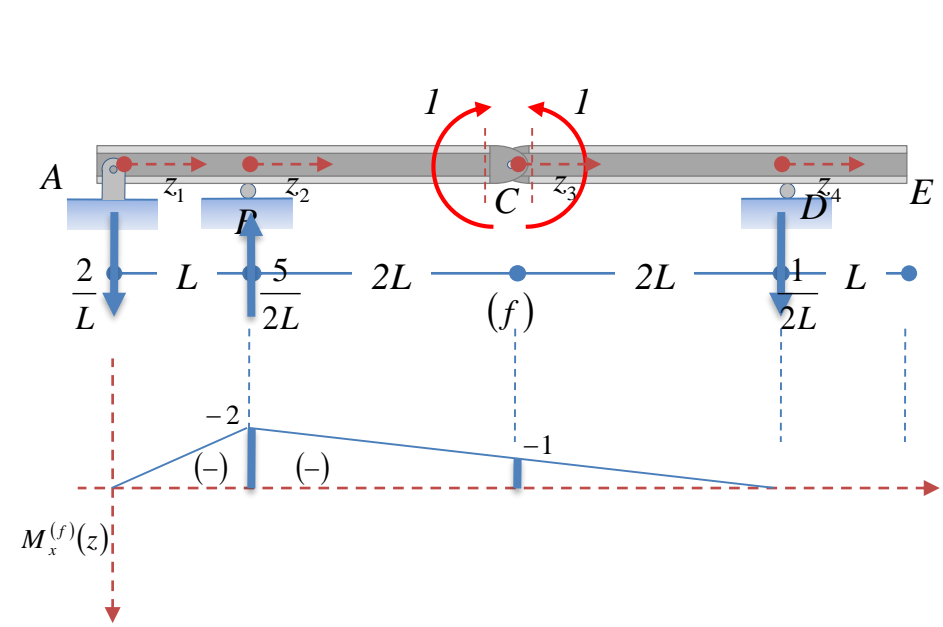
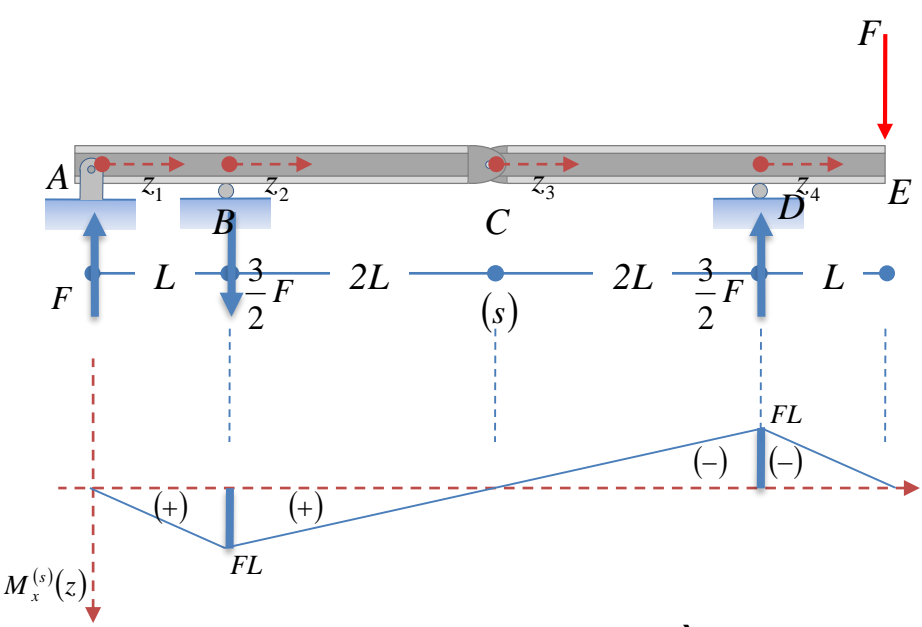
Esempio 1 – leggi del momento fittizio e della curvatura reale



Tratto	Dominio	$\chi_x^{(s)}$	$M_x^{(f)}$
AB	$0 \leq z_1 \leq L$	$\frac{F z_1}{EI_x}$	$-\frac{2}{L} z_1$
BC	$0 \leq z_2 \leq 2L$	$\frac{F}{2} \frac{2L - z_2}{EI_x}$	$-2 + \frac{z_2}{2L}$
CD	$0 \leq z_3 \leq 2L$	$-\frac{F}{2} \frac{z_3}{EI_x}$	$-1 + \frac{z_3}{2L}$
DE	$0 \leq z_4 \leq L$	$-F \frac{L - z_4}{EI_x}$	0



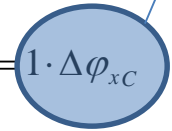
Esempio 1 – equazione dei lavori virtuali



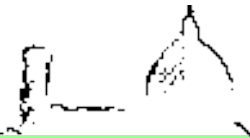
Omettendo i calcoli per brevità si ha:

$$L_{vi} = \sum_{i=1}^4 \int_0^L M_x^{(f)}(z_i) \cdot \chi_x^{(s)}(z_i) dz_i = -\frac{2FL^2}{EI_x}$$

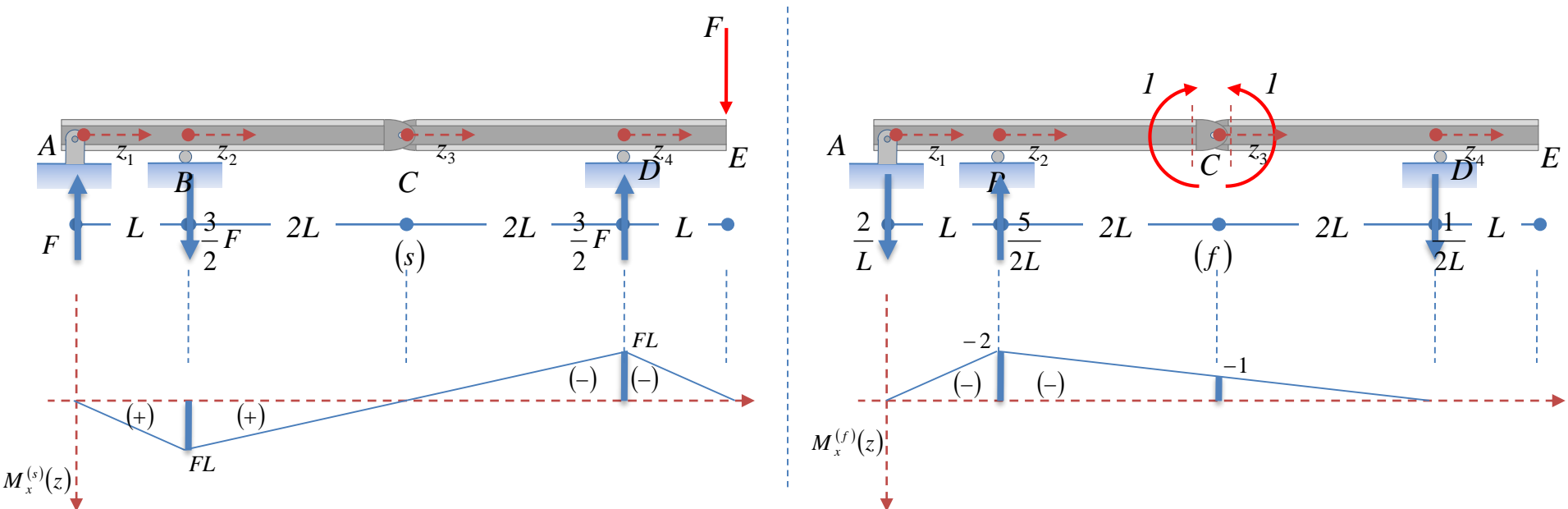
$$L_{ve} = \int_0^L q^{(f)}(z) \cdot v_0^{(s)}(z) dz + \sum_j F_y^{(f)} \cdot v_0^{(s)} + \sum_h \mathcal{M}^{(f)} \cdot \varphi_x^{(s)} = 1 \cdot \Delta\varphi_{xC}$$



visto che il sistema è a vincoli fissi, il lavoro virtuale esterno è pari alla coppia applicata (unitaria) per la rotazione relativa $\Delta\varphi_{xC}$. Il lavoro è positivo se la coppia e la rotazione relativa sono concordi, e quindi se la sezione a destra di C ruota in senso antiorario rispetto alla sezione a sinistra di C.



Esempio 1 – equazione dei lavori virtuali



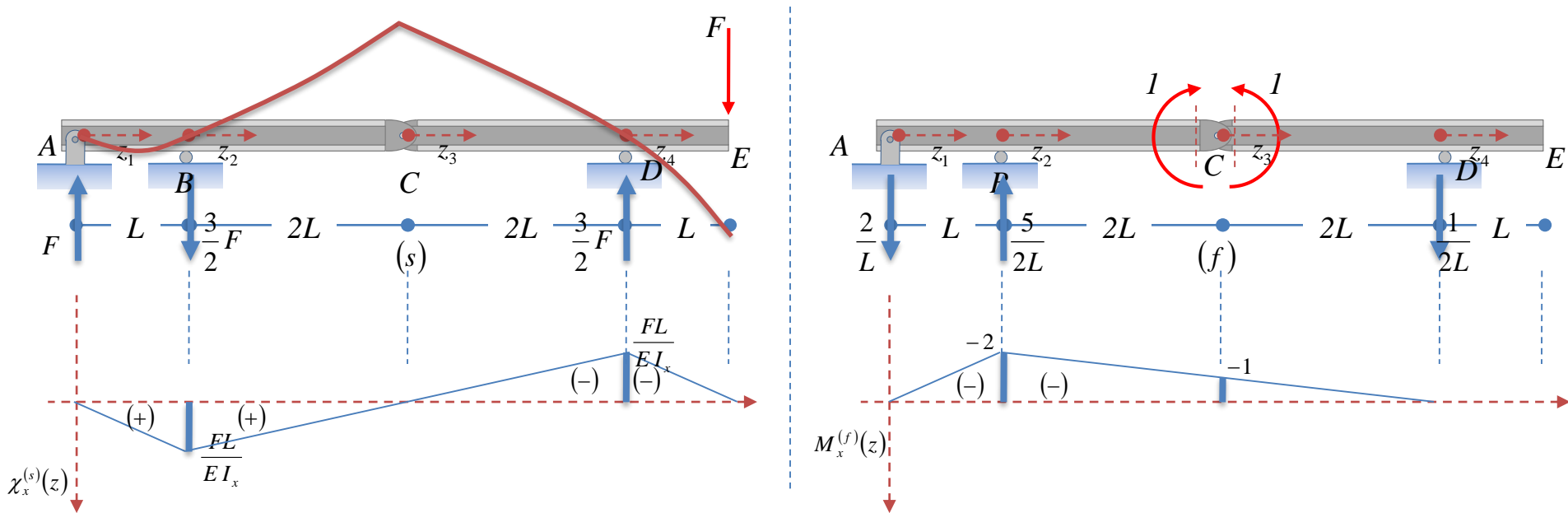
Eguagliando il lavoro virtuale interno ed esterno si ha:

$$\Delta\varphi_{xC} = -\frac{2F L^2}{EI_x} = -1.1 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Il segno negativo indica che la rotazione relativa è discorde alle coppie applicate, ossia che la sezione a destra di *C* ruota in senso orario rispetto a quella a sinistra di *C*.



Esempio 1 – linea elastica



Infatti la deformata dell'asse della trave in esame è, indicativamente, quella indicata in figura. Si osservi che il segno della concavità della deformata è in accordo con il segno della curvatura.

Di seguito si riporta la risoluzione di una struttura analoga a quella analizzata nella prima parte della lezione, ma vincolata anche con vincoli elasticamente ed anelasticamente cedevoli e caricato anche da distorsioni termiche.