ESERCIZIO 1

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{c} u'' + 2u' = 4x \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 0 \end{array} \right. \tag{1}$$

Svolgimento

Prima di tutto scriviamo *il polinomio caratteristico* dell'equazione differenziale

$$u'' + 2u' = 4x. \tag{2}$$

Esso è:

$$P(\xi) = \xi^2 + 2\xi.$$

L'equazione caratteristica è quindi

$$\xi^2 + 2\xi = 0$$

che ha soluzioni

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = -2.$$

Quindi **tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata** a (2)

$$u'' + 2u' = 0$$

sono date da

$$C_1 + C_2 e^{-2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ora determiniamo una **soluzione particolare** dell'equazione (2) mediante il "metodo ad hoc". Poiché il termine noto è il polinomio di primo grado $4x$ e 0 è una radice di molteplicità 1 dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione particolare del tipo

$$\widetilde{u}(x) = x(Ax + B).$$

Abbiamo

$$\widetilde{u}'(x) = 2Ax + B,$$

$$\widetilde{u}''(x) = 2A.$$

Quindi per determinare A e B basta richiedere che

$$2A + 2(2Ax + B) = 4x$$

cioè

$$\underbrace{4Ax + 2(A + B)}_{\widetilde{u}''(x) + 2\widetilde{u}'(x)} = 4x$$

ovvero

$$\left\{ \begin{array}{c} 4A = 4 \\ A + B = 0 \end{array} \right. ,$$

che fornisce

$$A = 1, \quad B = -1.$$

Quindi una soluzione particolare di (2) è data da

$$\widetilde{u}(x) = x^2 - x$$

e *tutte le soluzioni* di (2) sono date da

$$u(x) = x^2 - x + C_1 + C_2 e^{-2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Per risolvere il problema di Cauchy (1) basta richiedere che

$$\begin{cases} u(0) = 1 \\ u'(0) = 0 \end{cases} . \tag{3}$$

Poiché

$$u(0) = C_1 + C_2, \quad u'(0) = -1 - 2C_2,$$

le (3) si scrivono

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -1 - 2C_2 = 0 \end{cases} ,$$

da cui segue

$$C_1 = \frac{3}{2}, \quad C_2 = -\frac{1}{2}.$$

Quindi **l'unica soluzione del problema di Cauchy** (1) è data da

$$u(x) = x^2 - x + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x}.$$

ESERCIZIO 2

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'' + 4u' + 5u = 5e^x + 4\sin x \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases} . \tag{4}$$

Svolgimento

Prima di tutto scriviamo *il polinomio caratteristico* dell'equazione differenziale

$$u'' + 4u' + 5u = 5e^x + 4\sin x. \tag{5}$$

Esso è:

$$P(\xi) = \xi^2 + 4\xi + 5.$$

L'equazione caratteristica è quindi

$$\xi^2 + 4\xi + 5 = 0$$

che ha soluzioni

$$\xi_1 = -2 + i, \quad \xi_2 = - - 2 - i.$$

Quindi **tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata** a (5)

$$u'' + 4u' + 5u = 0$$

sono date da

$$(C_1 \sin x + C_2 \cos x)\, e^{-2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ora determiniamo una **soluzione particolare** dell'equazione (5) mediante il "metodo ad hoc". Troviamo prima una soluzione particolare di

$$u_1'' + 4u_1' + 5u_1 = 5e^x \tag{6}$$

e poi una soluzione particolare di

$$u_2'' + 4u_2' + 5u_2 = 4 \sin x \tag{7}$$

Per il principio di sovrapposizione avremo che la funzione

$$\widetilde{u}(x) = u_1(x) + u_2(x)$$

sarà una soluzione di (5).

Troviamo **una soluzione particolare di (6)**. Basterà cercarla del tipo

$$u_1(x) = Ae^x.$$

Calcolando le derivate di u_1 e inserendole nella (6) abbiamo che

$$10Ae^x = 5e^x$$

ovvero $A = \frac{1}{2}$, da cui abbiamo

$$u_1(x) = \frac{1}{2} e^x.$$

Troviamo **una soluzione particolare di (7)**. Basterà cercarla del tipo

$$u_2(x) = A \sin x + B \cos x.$$

Abbiamo

$$u_2'(x) = A \cos x - B \sin x,$$
$$u_2''(x) = -A \sin x - B \cos x.$$

Perciò

$$\begin{aligned} u_2'' + 4u_2' + 5u_2 &= (-A\sin x - B\cos x) + 4\,(A\cos x - B\sin x) + 5\,(A\sin x + B\cos x) = \\ &= (4A + 4B)\cos x + (4A - 4B)\sin x. \end{aligned}$$

Quindi basta richiedere che

$$\begin{cases} 4A + 4B = 0 \\ 4A - 4B = 4 \end{cases},$$

da cui abbiamo $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$. Quindi

$$u_2(x) = \frac{1}{2}\,(\sin x - \cos x)\,.$$

In definitiva, una soluzione particolare di (5) è fornita da

$$\widetilde{u}(x) = u_1(x) + u_2(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\,(\sin x - \cos x)\,.$$

Quindi *tutte le soluzioni dell'equazione (5)* sono date da

$$u(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\,(\sin x - \cos x) + (C_1\sin x + C_2\cos x)\,e^{-2x}$$

Per risolvere il problema di Cauchy (4) basta richiedere che

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases}. \tag{8}$$

Ora

$$u(0) = C_2$$

e

$$u'(0) = 1 + C_1 - 2C_2.$$

Quindi le (8) si scrivono

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ 1 + C_1 - 2C_2 = 0 \end{cases},$$

da cui segue

$$C_1 = -1, \quad C_2 = 0.$$

Quindi **l'unica soluzione del problema di Cauchy** (4) è data da

$$u(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\,(\sin x - \cos x) - e^{-2x}\sin x.$$