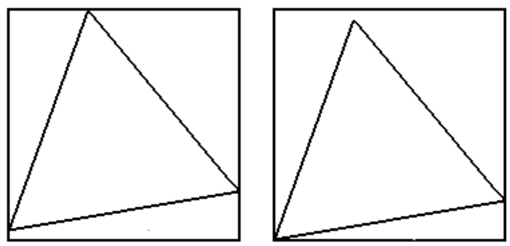
Il triangolo equilatero di area massima contenuto in un quadrato.

Dato un quadrato $\mathcal{Q}$ di lato unitario, determiniamo il triangolo equilatero $\mathcal{T}$ di area massima contenuto in $\mathcal{Q}$.

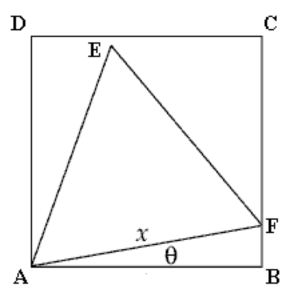
Possiamo senz'altro supporre che $\mathcal{T}$ abbia un vertice coincidente con un vertice di $\mathcal{Q}$: in caso contrario c'è un lato del quadrato sul quale non giace alcun vertice di $\mathcal{T}$ ([1]) e possiamo considerare invece di $\mathcal{T}$ il triangolo ottenuto traslando $\mathcal{T}$ verso quel lato fino a portare uno dei vertici del triangolo a coincidere con uno dei vertici di $\mathcal{Q}$ come nella figura.



Sia x la misura del lato di $\mathcal{T}$, e sia θ l'angolo che ha vertice nel vertice di $\mathcal{T}$ coincidente con un vertice di $\mathcal{Q}$ ed è individuato dal lato di $\mathcal{Q}$ e dal lato di $\mathcal{T}$. Poiché il lato di $\mathcal{Q}$ ha misura 1,

$$\mathbf{cos}(\theta) = \frac{1}{x} \quad \text{e quindi} \quad x = \frac{1}{\mathbf{cos}(\theta)}$$

cosicché x cresce al crescere di θ (perché tra 0 e $\frac{\pi}{2}$ la funzione **cos** è decrescente).

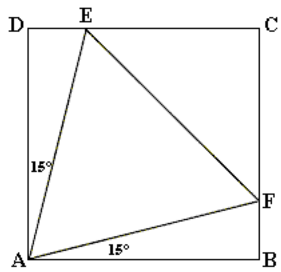


Però θ non può crescere arbitrariamente. L'angolo del quadrato misura 90° e quello del triangolo equilatero misura 60°, quindi certamente θ non può essere maggiore di 30°; ma già quando θ supera 15° il lato **AE** di $\mathcal{T}$ forma col lato **AD** di $\mathcal{Q}$ un angolo minore di 15° e quindi **AE** è minore di **AF** (cosicché $\mathcal{T}$ non è equilatero).

Resta da verificare che per $\theta := 15°$ se **AE** $=$ **AF** si ottiene effettivamente un triangolo equilatero. Sia dunque $\theta := 15°$ e sia inoltre **AE** $=$ **AF**. Notiamo in primo luogo che i triangoli **DAE** e **FAB** sono congruenti per il primo criterio; dunque l'angolo **ADE** è retto e quindi il vertice **E** di $\mathcal{T}$ appartiene al lato **DC** di $\mathcal{Q}$.

---

[1] Poiché $\mathcal{Q}$ ha quattro lati e $\mathcal{T}$ ha tre vertici, se su ogni lato di $\mathcal{Q}$ ci fosse un vertice di $\mathcal{T}$ per il principio dei buchi di piccionaia ci dovrebbero essere due lati di $\mathcal{Q}$ sui quali giace lo stesso vertice di $\mathcal{T}$ e quindi quel vertice di $\mathcal{T}$ coinciderebbe con un vertice di $\mathcal{Q}$.



Il triangolo **AFE** è dunque un triangolo isoscele sulla base **EF** con l'angolo in **A** di $60°$; poiché gli angoli alla base sono congruenti (e la loro somma è di $120°$) ciascuno di essi è di $60°$ e quindi il triangolo **AFE** è un triangolo equilatero, come si voleva.

Per trovarne la misura del lato (e quindi l'area) ci servono un po' di calcoli.

$$\cos(15°) = \cos(45° - 30°) = \cos(45°)\cos(30°) + \sin(45°)\sin(30°) =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

e dunque

$$\mathbf{AF} = \frac{1}{\cos(15°)} = \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

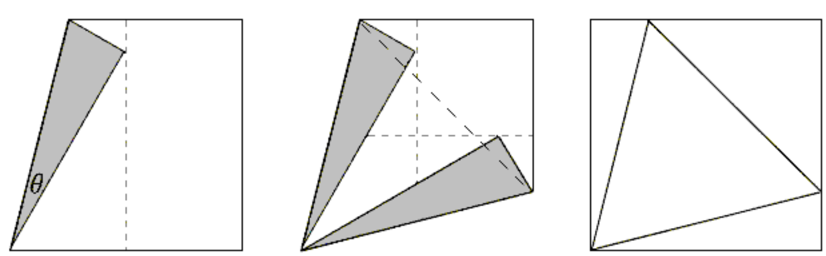
cosicché l'area del triangolo è

$$\frac{\mathbf{AF}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{18}-\sqrt{6}}{2}.$$

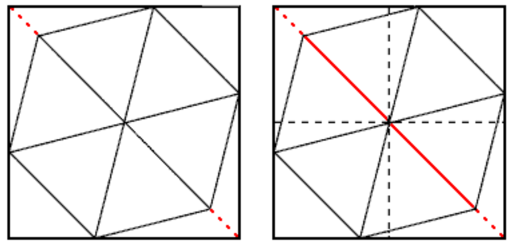
Il triangolo equilatero costruito sulla base del quadrato ha area $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Il rapporto fra le due aree è

$$\frac{\sqrt{18}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6} - \sqrt{2} \approx 1{,}03527618\,.$$

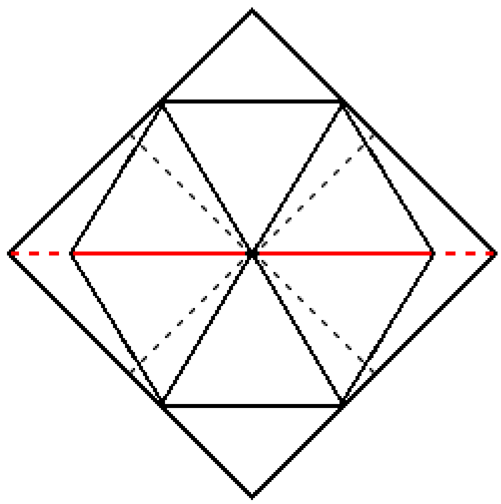
La figura che segue mostra come costruire il triangolo piegando un foglio quadrato di carta.



L'esagono regolare di area massima contenuto in un quadrato.



Ruotiamo il quadrato di $45°$ in senso antiorario:



Le considerazione del paragrafo precedente mostrano come costruire il triangolo equilatero centrale nella metà superiore dell’esagono, e poi di conseguenza tutti gli altri: