Sia ϕ l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ così definito

$$\phi(x,y,z) = (x-y+z,\ 3x+2y+4z,\ 2x+3y+3z)$$

Sia A la matrice associata a ϕ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$

$$\phi(1,0,0)=(1,3,2) \qquad \phi(0,1,0)=(-1,2,3) \qquad \phi(0,0,1)=(1,4,3)$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 4\\ 2 & 3 & 3\end{pmatrix} \qquad \det A = 6-8+9-4-12+9 = 0$$

$$\text{rk}A = 2 \quad \det\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix} \neq 0 \quad \dim \text{Im}\,\phi = 2 \text{ piano per } O$$

$$\dim \text{Ker}\,\phi = 1 \text{ retta per } O$$

Im ϕ è generato dalle immagini dei vettori della base, quindi dalle colonne della matrice associata a ϕ. Le colonne l. indipendenti sono 2 quindi una base di Im ϕ è: $\{(1,3,2);(-1,2,3)\}$

l'equazione di Im ϕ è

$$ax+by+cz=0$$

$$\begin{cases}a+3b+2c=0\\ -a+2b+3c=0\end{cases} \quad \begin{cases}b=-c\\ a=c\end{cases} \qquad x-y+z=0$$

L'equazione di Ker ϕ è
$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 4\\ 2 & 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \quad \begin{cases}x-y+z=0\\ 3x+2y+4z=0\\ 2x+3y+3z=0\end{cases}$$

è una retta per O di eq: $\begin{cases}x-y+z=0\\ 3x+2y+4z=0\end{cases}$ una base è: $\{(-6,-1,5)\}$

vediamo se è diagonalizzabile

$$\det\begin{pmatrix}1-\lambda & -1 & 1\\ 3 & 2-\lambda & 4\\ 2 & 3 & 3-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)-8+9-2(2-\lambda)-12(1-\lambda)+3(3-\lambda) = (2-\lambda-2\lambda+\lambda^2)(3-\lambda)+1-4+2\lambda-12+12\lambda+9-3\lambda =$$

$$6-2\lambda-3\lambda+\lambda^2-6\lambda+2\lambda^2+3\lambda^2-\lambda^3-6+11\lambda = -\lambda^3+6\lambda^2 = \lambda^2(6-\lambda) \qquad \lambda=0 \text{ doppio},\ \lambda=6$$

$E_0 = \text{Ker}\,\phi$ infatti E_0: $AX=0X=0$ Ker ϕ: $AX=0$

dim Ker ϕ = 1 quindi dim E_0 < molteplicità dell'autovalore 0

A non è diagonalizzabile