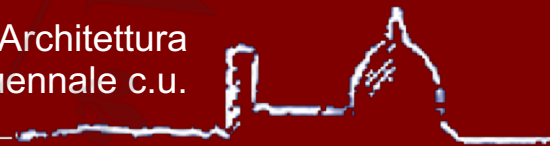


La sicurezza strutturale



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Scuola di Architettura
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.



Il collasso per instabilità



Introduzione

Lo studio dei sistemi di travi si è basato, fino a questo punto, sostanzialmente sulle seguenti ipotesi fondamentali:

1. materiale a comportamento elastico lineare
2. piccoli spostamenti

Utilizzando l'approccio definito dalla teoria tecnica della trave, l'ipotesi 1. implica che il legame tra le sollecitazioni e le corrispondenti misure di deformazione sia lineare

$$\begin{aligned}\varepsilon_0(z) &= \frac{N(z)}{EA} \\ \hat{\gamma} &= \frac{T_y}{k_y G A} \\ \chi_x(z) &= \frac{M_x(z)}{EI_x} = \frac{1}{\rho_x(z)} \\ \theta'(z) &= \frac{M_z(z)}{GJ}\end{aligned}\tag{1}$$

Si ricorda che, per travi abbastanza snelle è possibile porre

$$\hat{\gamma} \cong 0\tag{2}$$



Introduzione

La precedente ipotesi 2. implica invece che

2.a gli spostamenti e le deformazioni sono di piccola entità. Come si è visto nella trattazione della "equazione della linea elastica della trave", questo permette di linearizzare le relazioni cinematiche in quanto si può porre:

$$\cos \varphi_x \cong 1$$

$$\sin \varphi_x \cong \tan \varphi_x \cong \varphi_x$$

$$\chi_x(z) \cong -v''(z) \quad (3)$$

2.b gli spostamenti sono così piccoli da poter confondere, ai fini della imposizione delle equazioni di equilibrio, la configurazione deformata con quella iniziale.



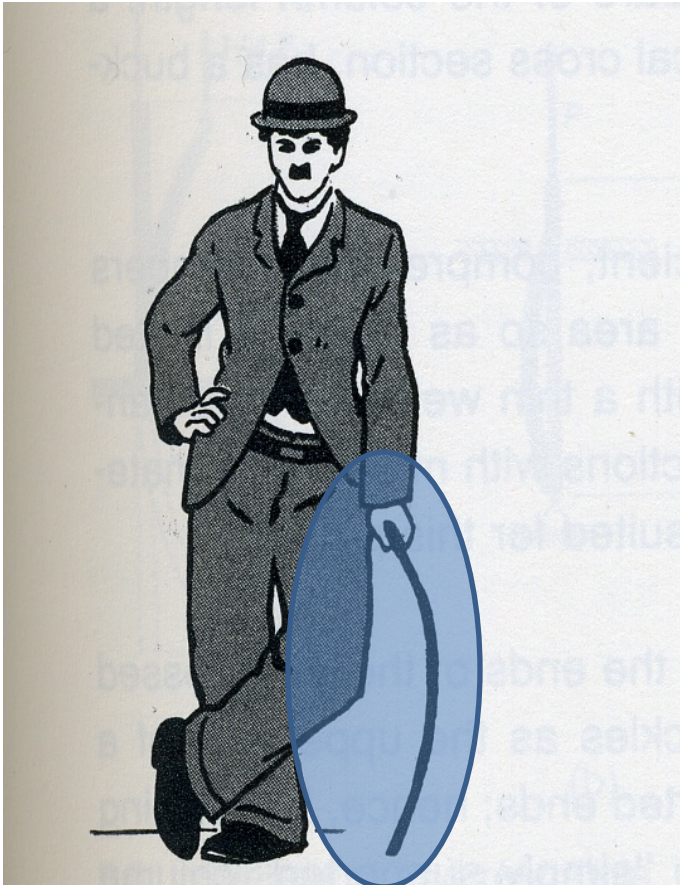
Introduzione

Esistono però alcuni casi di notevole interesse strutturale in cui la precedente ipotesi di piccole deformazioni non è (almeno parzialmente) verificata.

Si osservi che la corretta progettazione di una struttura deve garantire, oltre ad un adeguato margine di sicurezza rispetto alla resistenza del materiale, anche che gli spostamenti siano sufficientemente contenuti da non comprometterne la funzionalità. Peraltro questa ultima condizione, di per se, non implica che la deformazione della struttura non influisca sulle relazioni di equilibrio. Cionondimeno essa risulta abbastanza stringente da consentire di linearizzare le relazioni geometriche della trave secondo le (3).



Introduzione



Di seguito, ci riferiremo a impieghi degli elementi strutturali (travi) nei quali gli spostamenti sono "abbastanza piccoli" da verificare l'ipotesi 2.a, ma comunque di ampiezza tale da influire sulle equazioni di equilibrio della struttura. In sostanza in questi casi il campo di spostamento è tale da necessitare che le equazioni di equilibrio siano scritte riferendoci alla configurazione deformata della struttura. A titolo di esempio si consideri il bastone (inizialmente rettilineo) indicato in figura.



Introduzione



Se lo spostamento dell'asse del bastone fosse "abbastanza piccolo" da poter scrivere le equazioni di equilibrio con riferimento alla sua configurazione iniziale (rettilenea), l'azione impressa al bastone produrrebbe solo sforzo normale.

Nel caso in cui, viceversa, gli spostamenti (in direzione trasversale) dell'asse della trave fossero più elevati, la medesima azione provocherebbe anche una sollecitazione flessionale.

Gli argomenti trattati di seguito si riferiscono, allora, a casi analoghi a quest'ultimo in cui, in sostanza, sono verificate le precedenti ipotesi 1. e 2.a, ma non la 2.b. Si osservi che, anche in questo caso, dalla terza delle (1) e dalla terza delle (3) si ottiene (si omettono i pedici per brevità):

$$M(z) = -EI v''(z) \quad (4)$$

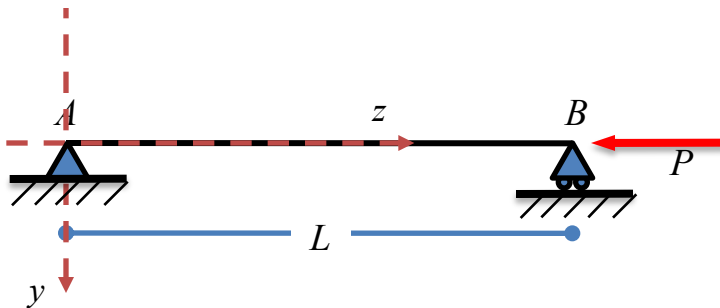


Stabilità dell'equilibrio elastico

Carico critico Euleriano



Trave appoggiata-appoggiata



Si consideri, a titolo di esempio, la trave appoggiata-appoggiata indicata in figura. È noto che, se entrambe le ipotesi 2.a e 2.b sono verificate, la trave è sollecitata da solo sforzo normale come segue

$$N(z) = -P \quad T(z) = 0 \quad M(z) = 0$$

Dalla (4) si ottiene

$$M(z) = -EI v''(z) = 0 \rightarrow v''(z) = 0$$

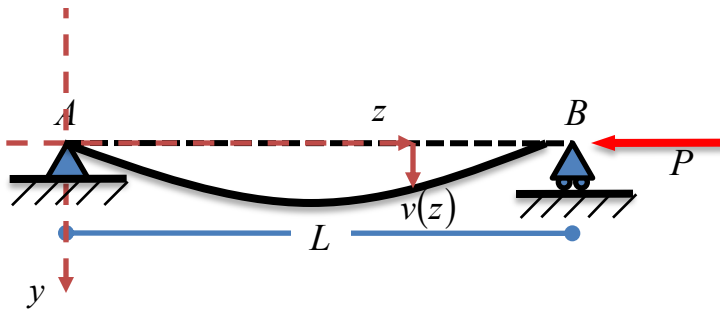
L'equazione della linea elastica è allora, in questo caso, al più lineare. Integrando la precedente espressione ed imponendo le condizioni (al contorno) di compatibilità con i vincoli si ottiene

$$v(z) = 0$$

L'asse della trave non presenta allora, in questo caso, alcuno spostamento trasversale.



Trave appoggiata-appoggiata



Si consideri adesso il caso in cui, per qualche motivo, l'asse della trave non si mantenga rettilineo, ma abbia degli spostamenti trasversali "piccoli" dal punto di vista geometrico (ip. 2.a soddisfatta), ma "abbastanza grandi" da influenzare le equazioni di equilibrio.

In questo caso, in corrispondenza di una generica sezione trasversale avente ascissa z , il carico P produce un momento flettente pari a:

$$M(z) = Pv(z) \quad (5)$$

Sostituendo la precedente relazione nella (4) si ha:

$$M(z) = -EIv''(z) = Pv(z) \quad (6)$$

Ponendo

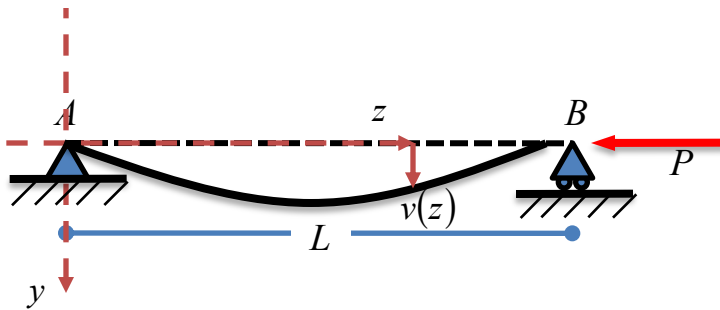
$$\alpha^2 = P/(EI) \quad (7)$$

la (6) si può scrivere in forma compatta come segue:

$$v''(z) + \alpha^2 v(z) = 0 \quad (8)$$



Trave appoggiata-appoggiata



La (8) rappresenta l'equazione differenziale della linea elastica della trave per i casi in cui l'ipotesi 2.b non è verificata, ossia nei casi in cui gli spostamenti verticali non possono essere trascurati nella definizione delle equazioni di equilibrio.

OSSERVAZIONI:

1. l'equazione (8) è stata determinata senza tenere in conto i vincoli presenti agli estremi della trave in esame: essa è quindi valida per qualunque condizione di vincolo di estremità di una trave compressa (a patto che il braccio di P sia $v(z)$);
2. il termine α^2 definito nella (7) è sicuramente positivo in quanto tutti i termini in esso contenuti sono positivi.



Trave appoggiata-appoggiata

È facile verificare, ad esempio per sostituzione diretta, che la soluzione dell'equazione differenziale omogenea (8) è la seguente:

$$v(z) = C_1 \cos(\alpha z) + C_2 \sin(\alpha z) \tag{9}$$

Le costanti di integrazione A e B devono essere determinate imponendo le condizioni (al contorno) di compatibilità della (9) con i vincoli presenti nella trave. Per la trave (appoggiata-appoggiata) in esame si ha

$$\begin{cases} v(z=0) = 0 \\ v(z=L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 \cos(\alpha L) + C_2 \sin(\alpha L) = 0 \end{cases}$$

Il precedente è un sistema omogeneo di due equazioni lineari nelle due incognite C_1 e C_2 . In forma matriciale esso si scrive come segue:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Tale sistema ammette sempre la soluzione banale $C_1=0, C_2=0$ che, se sostituita nella (9) stabilisce che $v(z)=0$, ritrovando così, tra le soluzioni del problema in esame, anche la configurazione rettilinea la quale è di equilibrio sotto qualunque valore del carico applicato.



Trave appoggiata-appoggiata

Il precedente sistema ammette anche soluzioni differenti da quella banale nei casi in cui, a parità di ogni altra condizione, il carico P assume valori tali che il determinante della matrice dei coefficienti del sistema (10) si annulli, ossia tali che

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \sin(\alpha L) = 0$$

Questo si verifica per $\alpha L = n\pi$, con $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. In tal caso si ha $\cos(\alpha L) = \pm 1$ e il sistema (10) diviene

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il quale ammette, oltre alla soluzione banale, anche la soluzione $C_1=0, C_2=$ “*qualunque valore*” che, sostituita nella (9) fornisce, per la trave in esame, le seguenti configurazioni di equilibrio deformate:

$$v(z) = B \sin(\alpha_n z) \qquad \alpha_n = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow P_n = n^2 \pi^2 \frac{EI}{L^2}$$

Si osservi che il caso $n=0$ è stato escluso in questa fase in quanto corrispondente alla configurazione rettilinea della trave già discusso in precedenza.



Facoltà di Architettura

Trave appoggiata-appoggiata

Esplicitamente, per ogni n intero positivo si ha:

n	P_n	$v_n(z)$	Linea elastica
1	$P_1 = \pi^2 \frac{EI}{L^2}$	$v_1(z) = C_2 \sin\left(\frac{\pi}{L} z\right)$	
2	$P_2 = 4\pi^2 \frac{EI}{L^2}$	$v_2(z) = C_2 \sin\left(\frac{2\pi}{L} z\right)$	
3	$P_3 = 9\pi^2 \frac{EI}{L^2}$	$v_3(z) = C_2 \sin\left(\frac{3\pi}{L} z\right)$	



Biforcazione del percorso di equilibrio

Al fine di interpretare il significato dei dati riassunti nella tabella precedente, si immagini di effettuare una prova di compressione su un'asta appoggiata agli estremi. In particolare si immagini di effettuare una prova di compressione monotona, nella quale il carico P viene gradualmente incrementato. Per quanto è stato descritto nelle precedenti slide, la configurazione rettilinea è sempre di equilibrio per la trave. Partendo da un carico nullo, si immagini di incrementare gradualmente P . Per valori inferiori a P_1 la trave si mantiene rettilinea: la configurazione rettilinea è infatti l'unica configurazione equilibrata possibile e compatibile con il precedente problema strutturale. Quando il carico assiale arriva al valore P_1 , l'asta ha due possibili configurazioni equilibrate: la prima corrispondente alla configurazione rettilinea (soluzione banale del sistema (10)), la seconda corrispondente ad una configurazione deformata dell'asta avente forma di una senoide di ampiezza indeterminata. Tali configurazioni di equilibrio sono entrambe ammissibili per la trave: il carico P_1 corrisponde quindi ad un "punto di biforcazione" del percorso di equilibrio che, come si è detto, può procedere, per valori di carico superiori a P_1 , indifferentemente in maniera tale che l'asse della trave si mantenga rettilineo o che si disponga secondo un arco di senoide. Un discorso analogo vale per tutti i valori P_n che corrispondono quindi a punti di biforcazione del percorso di equilibrio.



Carico critico euleriano

Si noti che l'ampiezza della deformata sinusoidale ottenuta in precedenza è indeterminata. Nei casi concreti, anche nell'ipotesi che non si abbia rottura (o snervamento) nel materiale, a tali configurazioni possono corrispondere spostamenti così ampi da rendere l'elemento strutturale incompatibile con le normali applicazioni strutturali. Pertanto, nelle normali applicazioni ingegneristiche, il carico applicato alle aste deve essere inferiore al più piccolo dei carichi P_n ottenuti precedentemente che viene indicato con il termine di *carico critico euleriano* (P_E). La relativa configurazione di equilibrio viene denominata *deformata critica*. Per la trave appoggiata-appoggiata analizzata nelle precedenti slide si ha

$$P_E = P_1 = \pi^2 \frac{EI}{L^2}$$

$$v_E(z) = v_1(z) = B \sin\left(\frac{\pi}{L} z\right) \quad (11)$$



Carico critico euleriano

OSSERVAZIONI:

1. in una situazione reale l'asse dell'asta compressa in esame ha la possibilità di deformarsi su un qualunque piano contenente l'asse indeformato (e quindi non necessariamente mantenendosi sul piano $y-z$ indicato nello schema di trave appoggiata analizzato nelle precedenti slide). È intuitivo capire che l'asta si deformerà (instabilizzandosi) secondo il piano che oppone la "minima resistenza" alla deformazione (minima rigidità flessionale) dell'asta, al quale corrisponde quindi il minimo valore di carico critico euleriano. A parità di ogni altra condizione, per una trave in materiale isotropo ed omogeneo ed a sezione costante, il minimo valore di carico critico euleriano è quello corrispondente al minimo valore di momento d'inerzia della sezione e pertanto le (11) si scrivono più correttamente come segue:

$$P_E = P_1 = \pi^2 \frac{E I_{\min}}{L^2} \quad v_E(z) = v_1(z) = B \sin\left(\frac{\pi}{L} z\right) \quad (12)$$

Lo spostamento del baricentro delle sezioni trasversali dell'asta sarà ortogonale alla direzione corrispondente al minimo momento d'inerzia.



Carico critico euleriano

OSSERVAZIONI:

2. le (12) sono state ottenute imponendo che la (9) fosse compatibile con le condizioni imposte dai vincoli di estremità della trave. D'altronde la (9) è la soluzione dell'equazione differenziale della linea elastica (8) che vale a prescindere dai particolari vincoli di estremità presenti nell'asta in esame (a patto che il braccio di P sia $v(z)$). Pertanto l'analisi di un'asta compressa vincolata alle estremità in maniera differente da quanto considerato nelle precedenti slide (trave appoggiata agli estremi) può essere effettuata ripercorrendo il procedimento descritto nelle precedenti slide (dalla 10 alla 12) e imponendo che la (9) sia compatibile con le particolari condizioni al contorno imposte dai vincoli di estremità presenti nell'asta in esame. Si dimostra facilmente che, qualunque sia la condizione di vincolo di estremità, il carico critico euleriano di un'asta compressa può essere calcolato come segue

$$P_E = \pi^2 \frac{E I_{\min}}{L_0^2} \quad (13)$$

L_0 viene detta *lunghezza libera di inflessione* e rappresenta la distanza tra due successivi punti di flesso nella deformata critica. Nella slide seguente si riportano i valori di lunghezza libera di inflessione corrispondenti ad alcune condizioni di vincoli di estremità per un'asta compressa.



Carico critico euleriano

struttura	L_0	deformata critica
	$L_0 = L$	
	$L_0 = 2L$	
	$L_0 = L/2$	
	$L_0 = 0,699L$	
	$L_0 = L$	
	$L_0 = 2L$	

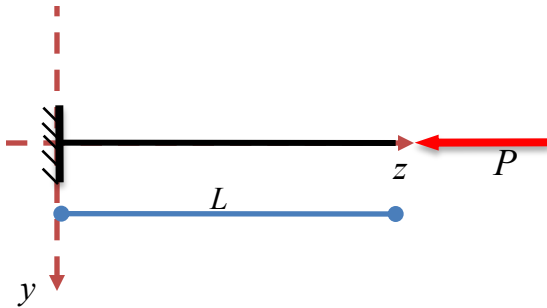


Stabilità dell'equilibrio elastico

Carico critico Euleriano: esercizi proposti



Carico critico euleriano



Si calcoli il carico critico euleriano e la deformata critica relativa alla struttura schematizzata in figura. Si confrontino i risultati ottenuti con quelli forniti in tabella.



Carico critico euleriano



Si calcoli il carico critico euleriano e la deformata critica relativa alla struttura schematizzata in figura. Si confrontino i risultati ottenuti con quelli forniti in tabella.



Carico critico euleriano



Si calcoli il carico critico euleriano e la deformata critica relativa alla struttura schematizzata in figura. Si confrontino i risultati ottenuti con quelli forniti in tabella.



Università degli Studi di Firenze

Corso di Laurea: Architettura (quinquennale)
Insegnamento: Scienza delle Costruzioni
Docente: Mario Fagone
Argomento: Elementi di stabilità
dell'equilibrio elastico



Facoltà di Architettura

La sicurezza strutturale

Verifica di aste compresse



Mario Fagone
Università di Firenze

e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831



Stabilità dell'equilibrio elastico

Verifica di aste compresse



Sintesi

Abbiamo visto che, al fine di assicurare che gli spostamenti di un'asta rettilinea compressa (in materiale omogeneo e sezione trasversale costante e comunque vincolata agli estremi) siano abbastanza contenuti da non compromettere la sua funzionalità strutturale, è necessario che il modulo P dell'azione assiale di compressione sia inferiore al carico critico euleriano P_E

$$P_E = \pi^2 \frac{EI_{\min}}{L_0^2} \quad L_0 = \text{lunghezza libera di inflessione} \quad (14)$$

$$P < P_E \quad (15)$$

La lunghezza libera di inflessione L_0 dipende dai vincoli di estremità. La precedente diseuguaglianza assicura che (per un'asta ideale perfettamente rettilinea) l'azione assiale di compressione non sia tale da raggiungere punti di biforcazione del percorso di equilibrio di un'asta caricata assialmente a compressione in maniera monotona. Per le aste compresse, allora, oltre alla verifica di resistenza del materiale

$$\left\{ \sigma = \frac{P}{A}; \quad \sigma_0 = \text{tensione limite} \right\} \longrightarrow \sigma < \sigma_0 \quad (16)$$

deve sempre essere effettuata anche la verifica (15) al fine di assicurare che l'elemento strutturale, oltre a non presentare fenomeni di crisi del materiale, non presenti spostamenti talmente elevati da essere incompatibili con i suoi impieghi strutturali.



La formula di Eulero

Può essere conveniente riferire il carico critico euleriano all'unità di sezione trasversale. Ponendo

$$\sigma_E = \frac{P_E}{A} = \pi^2 E \frac{\rho_{\min}^2}{L_0^2} \quad (17)$$

dove $\rho_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$ rappresenta il raggio d'inerzia minimo della sezione trasversale, la verifica (15) può essere scritta come segue

$$\sigma < \sigma_E \quad (18)$$

ossia in una forma analoga alla verifica di resistenza (16). In definitiva, allora, nelle aste compresse è necessario verificare che la tensione normale nominale σ risulti inferiore sia alla tensione limite σ_0 (resistenza o snervamento) del materiale, sia alla tensione euleriana σ_E che dipende:

- dal materiale costituente l'asta in esame, attraverso il modulo elastico E ;
- dalla forma e dimensione della sezione trasversale, attraverso il raggio d'inerzia ρ_{\min} ;
- dalla lunghezza dell'asta e dalla particolare condizione di vincolo di estremità, attraverso la lunghezza libera di inflessione L_0 .



Snellezza

Si definisce *snellezza* della trave la seguente quantità

$$\lambda = \frac{L_0}{\rho_{\min}} \quad (19)$$

La precedente è una "misura" sintetica rappresentativa delle seguenti grandezze:

- proprietà inerziali minime della sezione trasversale;
- lunghezza dell'asta;
- caratteristiche dei vincoli di estremità.

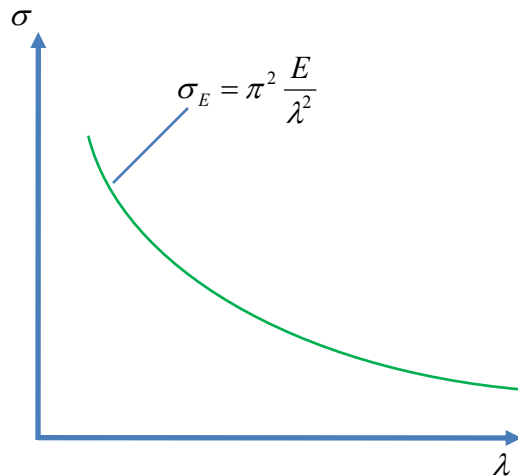
A parità di vincoli, essa:

- aumenta con la lunghezza dell'asta;
- diminuisce con l'aumentare delle proprietà inerziali della sezione.

La snellezza è pertanto proporzionale al rapporto fra la lunghezza dell'asta ed una misura caratteristica della dimensione della sezione trasversale.



Curva di stabilità



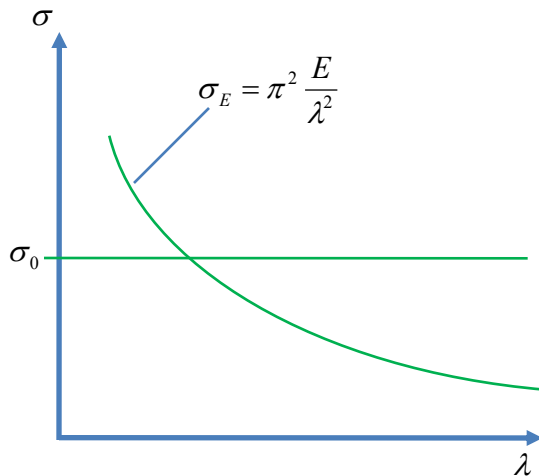
Utilizzando la (19), la verifica (18) può essere scritta come segue

$$\sigma < \sigma_E = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} \quad (20)$$

Affinché la verifica di stabilità dell'equilibrio sia soddisfatta, la tensione normale nominale (in valore assoluto) presente nell'asta compressa deve essere inferiore alla tensione euleriana che, a parità di modulo elastico del materiale, decresce con il quadrato della snellezza dell'asta. In pratica affinché la tensione normale nominale in un'asta compressa sia "di sicurezza (a meno di un certo fattore di sicurezza)" rispetto alla stabilità dell'equilibrio, essa deve essere "al di sotto" del grafico tracciato in figura.



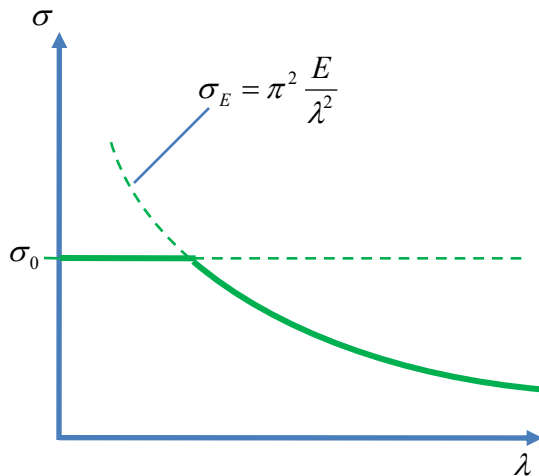
Curva di stabilità



Ovviamente, oltre alla (18), è necessario effettuare la verifica di resistenza (16), ossia, qualunque sia la snellezza dell'asta in esame, la tensione normale nominale deve essere inferiore alla resistenza del materiale che la costituisce.



Curva di stabilità



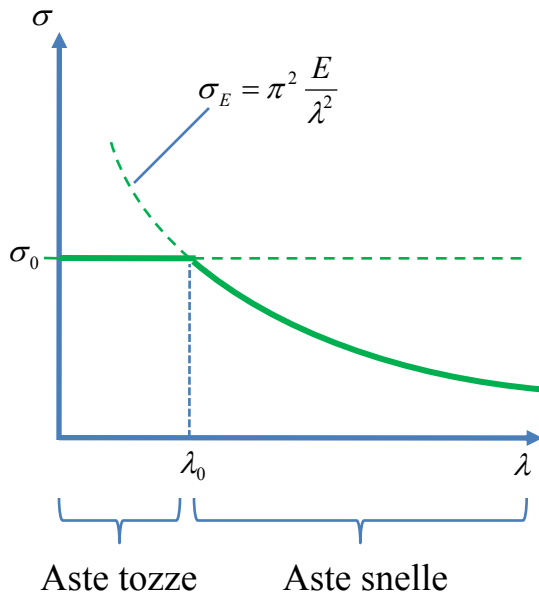
Ovviamente, oltre alla (18), è necessario effettuare la verifica di resistenza (16), ossia, qualunque sia la snellezza dell'asta in esame, la tensione normale nominale deve essere inferiore alla resistenza del materiale che la costituisce.

In pratica la tensione normale nominale σ deve porsi "al di sotto" dell'involuppo delle curve di stabilità e di resistenza evidenziato in figura.

È evidente che, per "bassi" valori di snellezza la verifica di resistenza è più vincolante di quella di stabilità, mentre per "elevati" valori di snellezza la verifica di stabilità è la più vincolante.



Curva di stabilità



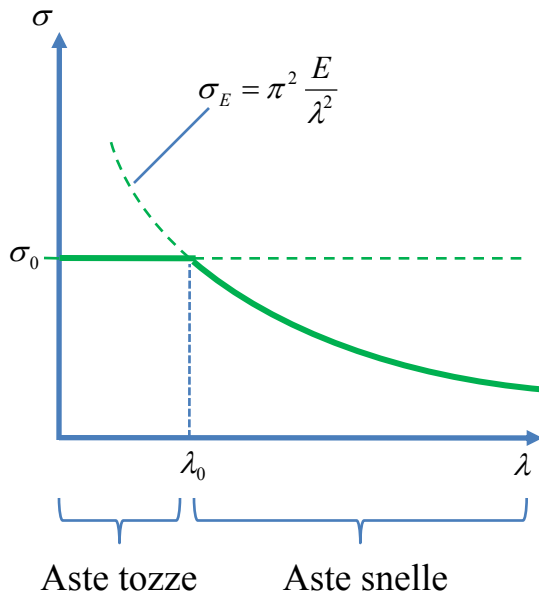
Più precisamente, indicando con λ_0 il valore di snellezza corrispondente all'intersezione tra le curve di stabilità e di resistenza, per aste aventi $\lambda < \lambda_0$ (dette aste tozze) risulta più vincolante la verifica di resistenza, mentre per aste aventi $\lambda_0 < \lambda$ (aste snelle) è la verifica di stabilità a risultare più vincolante.

Il valore di λ_0 può essere ottenuto eguagliando la tensione euleriana alla tensione limite del materiale come segue

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \sigma_E(\lambda_{0o}) \rightarrow \sigma_0 = \pi^2 \frac{E}{\lambda_0^2} \\ &\rightarrow \lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_0}} \end{aligned} \quad (21)$$



Curva di stabilità



Riassumendo, la verifica delle aste compresse può essere effettuata come segue

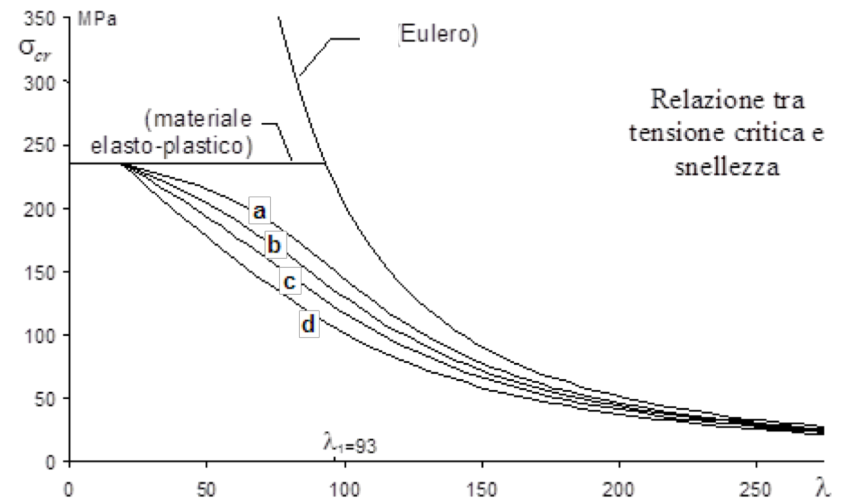
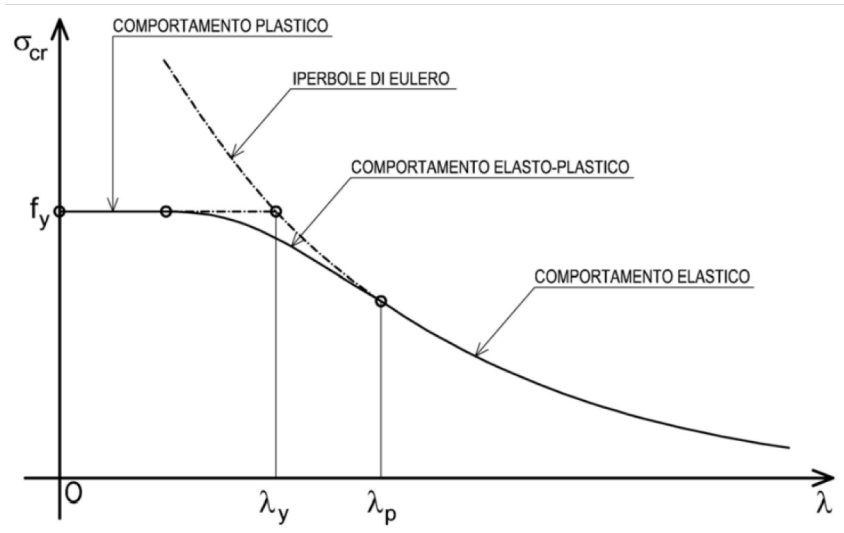
$$\sigma < \sigma_E \quad \text{per} \quad \lambda_0 \leq \lambda$$

$$\sigma < \sigma_0 \quad \text{per} \quad \lambda \leq \lambda_0$$

(22)



Curva di stabilità





Stabilità dell'equilibrio elastico

Verifica di aste compresse: esempio



Verifica di resistenza

Asta	N	Tirante Puntone	Area [mm ²]	Tensione normale $\sigma=N/A$ [MPa]	Tensione di snervamento σ_y [MPa]	$s=\sigma_y/\sigma$
(1)	-839N	P	10	-83.9	±235	2.8
(2)	875N	T	10	87.5	±235	2.7
(3)	-280N	P	10	-28.0	±235	8.4
(4)	-250N	P	10	-25.0	±235	9.4
(5)	280N	T	10	28.0	±235	8.4
(6)	625N	T	10	62.5	±235	3.8
(7)	-1398	P	10	-139.8	±235	1.7

Per quanto è stato discusso, per le aste compresse è necessario effettuare anche la verifica nei confronti del carico critico euleriano. Tutte le aste sono in acciaio e quindi si ha

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_0}} = \pi \sqrt{\frac{210000MPa}{235MPa}} \cong 93,91$$



Verifica di stabilità dell'equilibrio

A tal fine assumiamo che la sezione trasversale di tutte le aste presenti nel sistema sia rettangolare di dimensioni $5 \times 2 \text{ mm}$. A tale sezione corrisponde il seguente valore di raggio d'inerzia minimo:

$$\rho_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{12} 5 \times 2^3}{5 \times 2}} \cong 0.577 \text{ mm}$$

Tutte le aste della struttura sono incernierate agli estremi e quindi la loro lunghezza libera di inflessione è pari alla lunghezza effettiva. La snellezza delle aste compresse è pari a:

Asta	L_0	ρ_{\min}	$\lambda = L_0 / \rho_{\min}$
(1)	2236 mm	0.577 mm	3875
(3)	2236 mm	0.577 mm	3875
(4)	2000 mm	0.577 mm	3466
(7)	2236 mm	0.577 mm	3875

Tutte le aste hanno snellezza (molto) maggiore di λ_0 e quindi è necessario effettuare la verifica di stabilità.



Verifica di stabilità

Asta	N	Tirante Puntone	Tensione normale $\sigma = N/A$ [MPa]	Tensione euleriana $\sigma < \sigma_E = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2}$ [MPa]
(1)	-839N	P	-83.9	-0.138
(3)	-280N	P	-28.0	-0.138
(4)	-250N	P	-25.0	-0.173
(7)	-1398	P	-139.8	-0.138

La tensione normale nominale presente nelle aste è SUPERIORE alla tensione euleriana e pertanto la verifica di stabilità non è soddisfatta. Le aste del sistema esaminato, quindi, seppur non eccessivamente caricate rispetto alla resistenza del materiale, risultano sollecitate da un carico assiale superiore a quello euleriano e quindi possono essere soggette a fenomeni di instabilità. È necessario pertanto modificare la sezione trasversale delle aste.



Verifica di stabilità

Assumiamo allora che le aste compresse abbiano sezione trasversale ad "L" a lati uguali larghi 20 mm e spessi 3 mm ($A=112\text{ mm}^2$, $I_{\min}=3900\text{ mm}^4$). La loro snellezza è allora pari a

Asta	L_0	ρ_{\min}	$\lambda = L_0 / \rho_{\min}$
(1)	2236 mm	5.9 mm	379
(3)	2236 mm	5.9 mm	379
(4)	2000 mm	5.9 mm	339
(7)	2236 mm	5.9 mm	379

La snellezza di tutte le aste compresse è ancora maggiore di λ_0 e pertanto è necessario effettuare la verifica di stabilità dell'equilibrio.



Verifica di stabilità

Asta	N	Tirante Puntone	Tensione normale $\sigma=N/A$ [MPa]	Tensione euleriana $\sigma < \sigma_E = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2}$ [MPa]	$s = \sigma_E / \sigma$
(1)	-839N	P	-7.49	-14.43	1.9
(3)	-280N	P	-2.50	-14.43	5.8
(4)	-250N	P	-2.23	-18.04	8.1
(7)	-1398	P	-12.48	-14.43	1.2

In questo caso la tensione normale è inferiore alla tensione euleriana e quindi la verifica di stabilità dell'equilibrio è soddisfatta, a meno di specifiche richieste per il coefficiente di sicurezza.

Si osservi che il coefficiente di sicurezza rispetto alla perdita di stabilità delle aste, in particolare delle aste (1) e (7), è **di poco** superiore all'unità anche se la tensione nominale presente è molto inferiore a quella limite di resistenza del materiale.



OSSERVAZIONE

Si osservi che la modifica della sezione trasversale delle aste compresse non comporta, per la struttura in esame, alcuna variazione del valore degli sforzi normali in esse presenti in quanto la struttura è isostatica.



Stabilità dell'equilibrio elastico

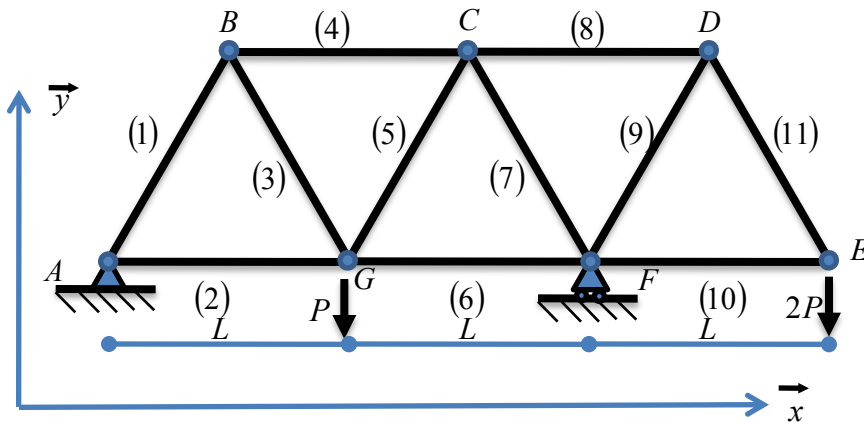
Verifica di aste compresse: esercizi proposti



Esempio

Il sistema strutturale schematizzato in figura è formato da aste in acciaio ($E=210GPa$, $\sigma_y=235 MPa$, $\alpha=11.6 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ C^{-1}$) aventi tutte sezione trasversale circolare di area pari a $50mm^2$. Si risolva il sistema strutturale

Si effettui la verifica di stabilità per le aste compresse del sistema reticolare riportato in figura e già esaminato nella lezione n. 16 del corso.



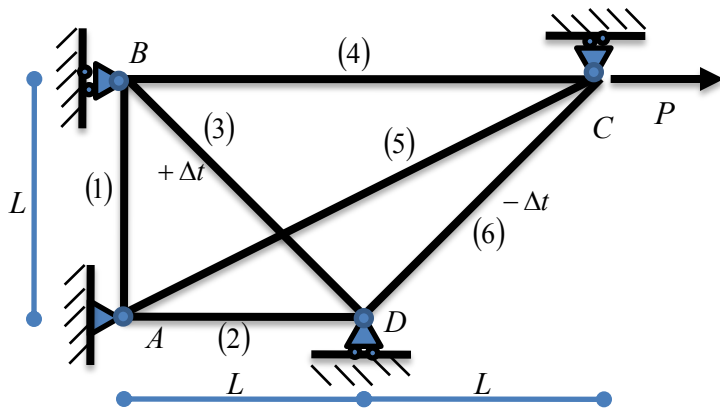
Le diagonali sono tutte inclinate di 60° rispetto a quelle orizzontali
 $L=1.5m$; $P=1.5kN$



Esempio

Si risolva il sistema strutturale schematizzato in figura.

$$\begin{aligned} P &= 10,0 \text{ kN} & L &= 1,0 \text{ m} & A &= 100 \text{ mm}^2 \\ E &= 210 \text{ GPa} & \alpha &= 11,6 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} & \Delta t &= 10^\circ \\ \sigma_y &= 235 \text{ MPa} \end{aligned}$$



Si effettui la verifica di resistenza e di stabilità per le aste del sistema reticolare riportato in figura e già esaminato nella lezione n. 21 del corso. Si assumo che le aste abbiano sezione trasversale circolare.