Telai piani

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Scuola di Architettura
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.

Analisi di sistemi iperstatici

Sommario

Metodi descritti fino a questo punto del corso:

Sistemi (inflessi) isostatici:

- equazioni di equilibrio (Statica):
  attraverso le sole equazioni di equilibrio è possibile determinare direttamente le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione in strutture isostatiche;
- integrazione della *linea elastica del secondo ordine*:
  note le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione, questo metodo permette di determinare lo spostamento verticale e la rotazione delle sezioni trasversali delle travi; il metodo è stato sviluppato con riferimento a sistemi isostatici di travi coassiali;
- metodo della *forza unitaria*:
  permette di determinare spostamento e/o rotazione di una sezione trasversale.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Sommario

Metodi descritti fino a questo punto del corso:

Sistemi (inflessi) iperstatici:

- integrazione della *linea elastica del quarto ordine*:
  questo metodo, sviluppato con riferimento a sistemi di travi coassiali, permette di determinare caratteristiche della sollecitazione (e quindi reazioni vincolari), spostamenti e rotazioni di tutte le sezioni trasversali della struttura.

Sommario

A che scopo?

- reazioni vincolari:
  verifica/progetto dei vincoli (dettagli costruttivi)

- caratteristiche della sollecitazione:
  verifica/progetto per resistenza, delle sezioni trasversali della struttura
  - verifiche "globali" (SLU) o "locali";

- spostamenti e/o rotazioni:
  verifica/progetto per deformabilità.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Sommario

Nella presente e nelle prossime lezioni saranno analizzati sistemi strutturali iperstatici.

Com'è ben noto tali sistemi hanno un numero di vincoli maggiore di quelli minimi necessari e sufficienti a garantire l'equilibrio della struttura per una qualunque condizione di carico e, per la dualità statico/cinematica, ad impedire moti rigidi della struttura nel suo insieme o di porzioni di essa.

È ben noto che per queste strutture non è possibile determinare le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione utilizzando le sole equazioni di equilibrio: il numero delle equazioni di equilibrio linearmente indipendenti è infatti inferiore al numero delle reazioni vincolari (esistono infinite soluzioni equilibrate).

È pertanto necessario considerare anche altre equazioni (legame costitutivo e congruenza) per risolvere la struttura (ossia determinare le sollecitazioni e gli spostamenti).

Si ricorda che, per i teoremi di esistenza e di unicità della soluzione del problema elastico lineare, la soluzione del sistema di equazioni di equilibrio, di legame costitutivo e di congruenza esiste ed è unica.

Sommario

In genere, anche al fine di ridurne la dimensione (matematica), il sistema di equazioni (differenziali) che definisce il problema strutturale dei telai piani viene risolto scegliendo come variabili "primarie" (ossia determinando per prime) alcune delle incognite del problema e condensando (sostituendo) tutte le equazioni in una parte del problema in esame.

Le procedure più comuni per la risoluzione delle equazioni che governano il problema in esame possono essere classificate in due grandi categorie:

- metodi "delle forze" o "della congruenza": in tali metodi si considerano come variabili primarie del problema alcune forze (es. alcune reazioni vincolari e/o sollecitazioni in particolari sezioni trasversali) che vengono determinate attraverso equazioni di congruenza;
- metodi "degli spostamenti" o "dell'equilibrio": in tali metodi si considerano come variabili principali del problema alcuni spostamenti (o rotazioni) che vengono determinati attraverso equazioni di equilibrio.

(*) Il metodo degli spostamenti è stato già descritto con riferimento a strutture reticolari.

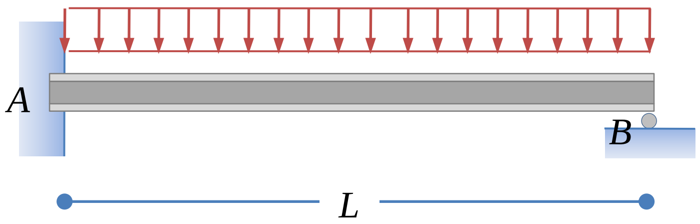
Sommario

Nelle prossime lezioni analizzeremo strutture (presso)inflesse utilizzando delle procedure che possono essere inquadrate nella famiglia dei metodi “delle forze”: alcune entità statiche (incognite iperstatiche) verranno determinate utilizzando equazioni di congruenza. Note tali “incognite iperstatiche” sarà poi possibile risolvere tutto il sistema strutturale.

Nella presente lezione descriveremo il metodo di risoluzione dei sistemi iperstatici attraverso il metodo delle equazioni di congruenza in maniera “operativa” riferendoci cioè alla risoluzione di una semplice (ma significativa) struttura iperstatica.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio



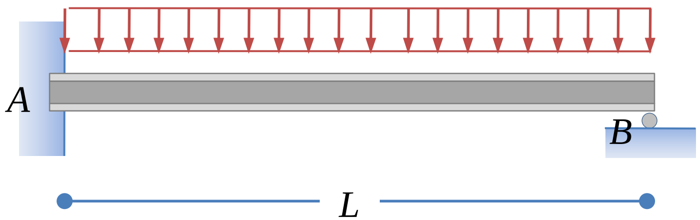
$q = 1,0\ kN/m$
$L = 2,0\ m$

La trave in acciaio schematizzata in figura ha sezione trasversale IPE 140 ($E=210GPa$, $I_x=541,0cm^4$).

Si risolva la struttura e si verifichi:

- che la tensione normale massima dovuta alla flessione sia inferiore a *160MPa* (acciaio Fe 360);
- che lo spostamento verticale massimo sia inferiore a 1/200 della luce.

Esempio - soluzione



La struttura in esame è formata da un unico tratto ($g.d.l.=3$) ed è vincolata da un incastro e da un carrello ($g.d.v.=4$). Non ci sono labilità (non sono possibili moti rigidi) e pertanto la struttura è una volta iperstatica.

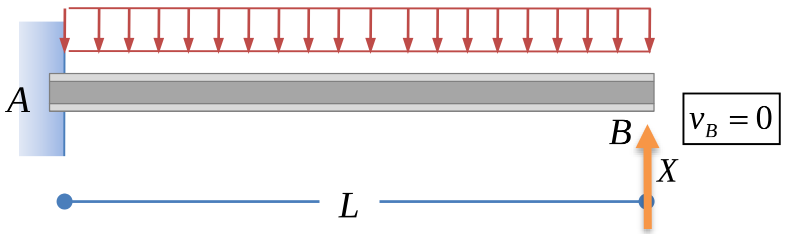
$$g.d.l.-g.d.v. = \ell - \iota$$

$$g.d.l.=3; \quad g.d.v.=4 \rightarrow \quad \ell - \iota = -1$$

$$\ell = 0 \qquad\qquad\qquad \rightarrow \quad \iota = 1$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio - soluzione



Per la risoluzione di tale sistema utilizziamo la seguente procedura:

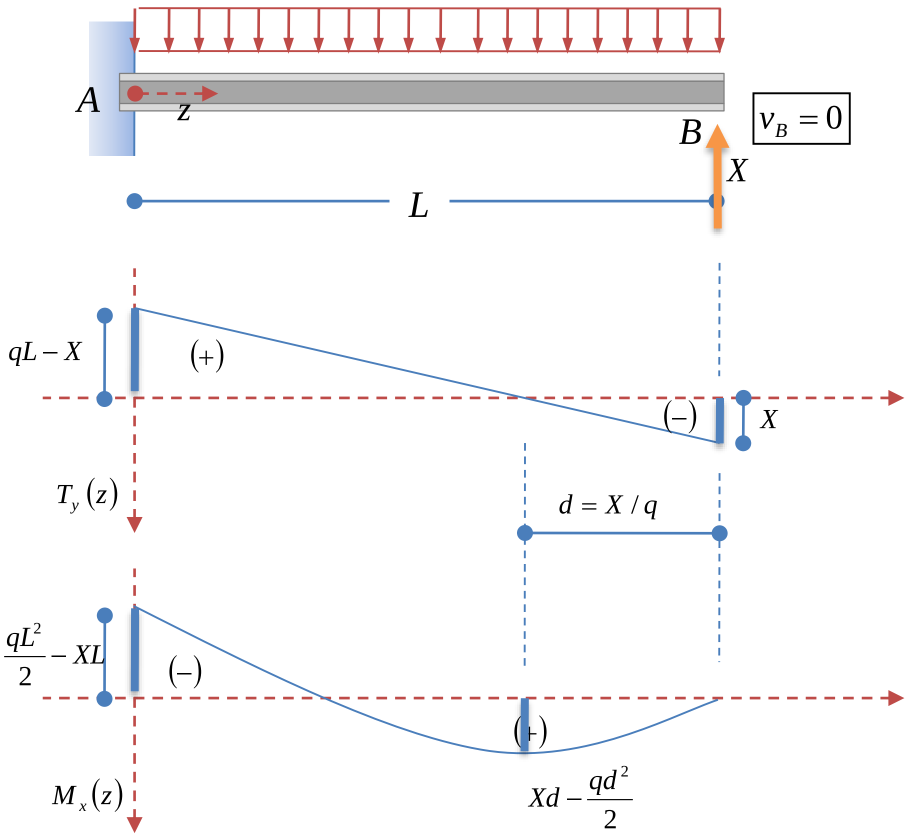
1. esplicitiamo alcune reazioni vincolari (nel seguito indicate come "incognite iperstatiche") il cui numero è uguale al grado di iperstaticità della struttura (per l'esempio in esame una sola).

Scegliamo le incognite iperstatiche (forze) come incognite primarie del problema strutturale: definiamo cioè una procedura che permette, come prima cosa, la loro determinazione (attraverso equazioni di congruenza) e, successivamente, la completa risoluzione del problema strutturale.

Affinché la procedura descritta nella presente lezione sia sempre utilizzabile, <u>è necessario che la struttura derivante da quella di partenza, ma senza i vincoli relativi alle incognite iperstatiche, sia isostatica</u>. Per tale motivo (v. figura) essa viene spesso indicata come "struttura isostatica equivalente" (si sott'intende *equivalente* a quella di partenza).

Ovviamente, affinché la struttura isostatica equivalente sia, appunto, equivalente a quella di partenza, il campo di spostamenti deve essere tale da soddisfare le condizioni imposte dai vincoli relativi alle incognite iperstatiche considerate (per l'esempio in esame $v_B=0$).

Esempio - soluzione

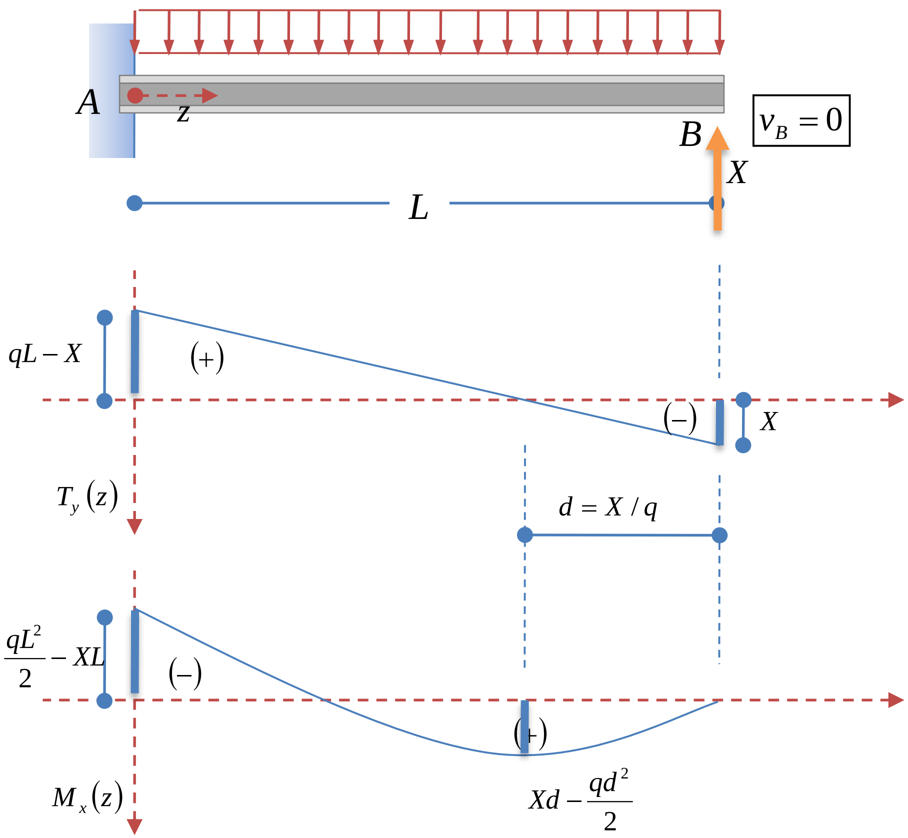


Per la risoluzione di tale sistema utilizziamo la seguente procedura:

2. si osservi che, se fossero noti a priori i valori <u>reali</u> (ossia quelli presenti nel sistema iperstatico di partenza) delle reazioni iperstatiche, sarebbe possibile determinare immediatamente le funzioni delle caratteristiche della sollecitazione, dello spostamento e della rotazione delle sezioni trasversali della struttura. Tali funzioni dipendono invece dagli infiniti valori possibili (equilibrati) delle incognite iperstatiche (le equazioni di equilibrio ammettono infatti infinite soluzioni che possono essere espresse in funzione delle incognite iperstatiche).

Si osservi che tali soluzioni sono tutte rispettose dei vincoli presenti nel *sistema isostatico equivalente*.

Esempio - soluzione

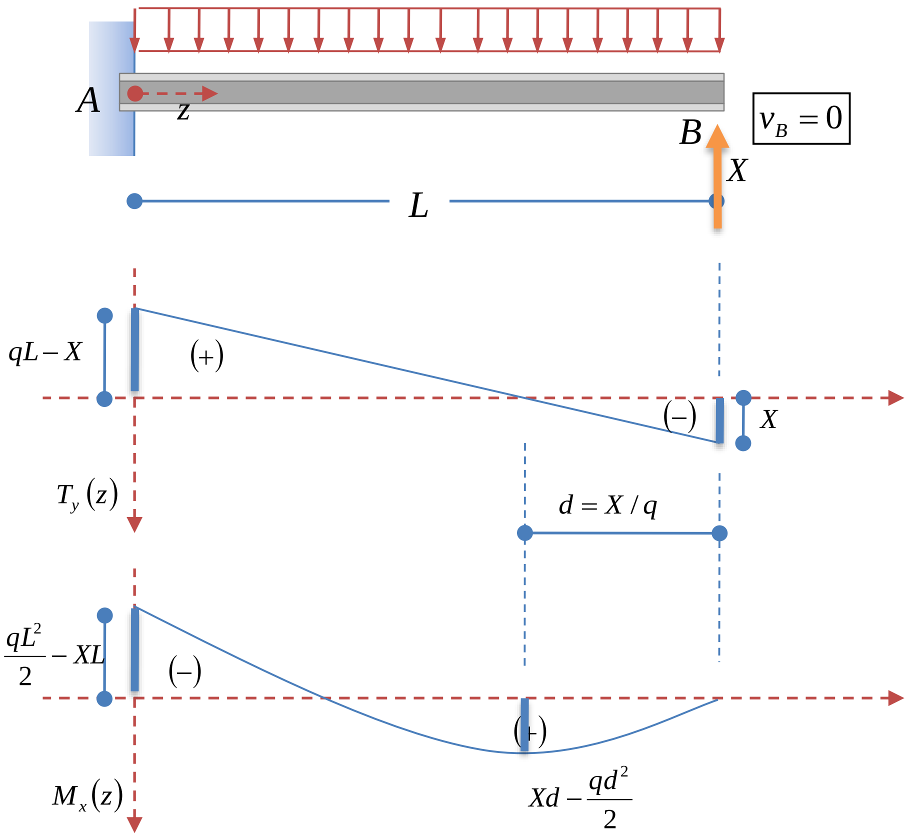


Per la risoluzione di tale sistema utilizziamo la seguente procedura:

2. per il teorema di unicità della soluzione del problema elastico, il valore "reale" delle incognite iperstatiche è L'UNICO rispettoso, oltre che delle equazioni di equilibrio, anche delle equazioni di congruenza e di compatibilità con i vincoli presenti nel sistema di partenza. Visto che tutte le infinite soluzioni rappresentate in figura sono equilibrate e rispettose dei vincoli presenti nel sistema isostatico equivalente, il valore reale (l'unico) delle incognite iperstatiche è quello rispettoso anche delle condizioni imposte dai vincoli ad esse corrispondenti.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio - soluzione



Per la risoluzione di tale sistema utilizziamo la seguente procedura:

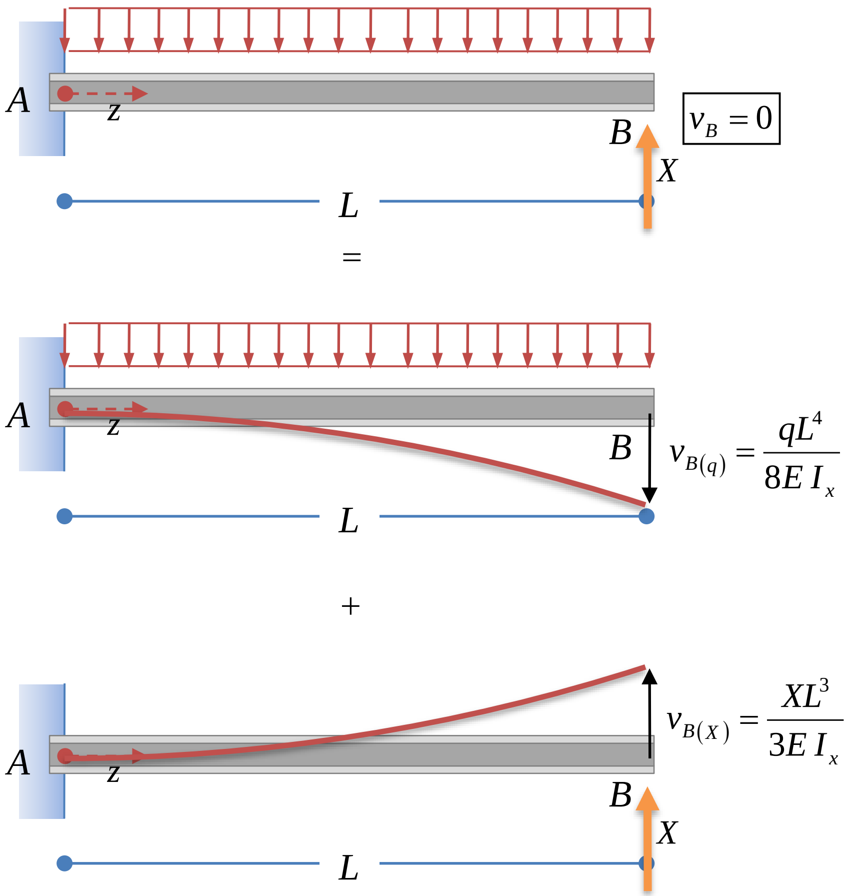
2. Per l'esempio in figura, il valore "reale" dell'incognita iperstatica X è l'unico che assicura anche che sia soddisfatta la seguente condizione.

$$v_B = 0$$

Partendo dalla struttura isostatica equivalente, si calcola allora v_B con uno qualunque dei metodi già esposti (integrazione della linea elastica, PLV) e si impone che tale spostamento sia congruente con il vincolo.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio - soluzione



Per la risoluzione di tale sistema utilizziamo la seguente procedura:

2. Utilizzando i risultati notevoli, per il principio di sovrapposizione degli effetti si ha (assumiamo lo spostamento positivo se verso il basso):

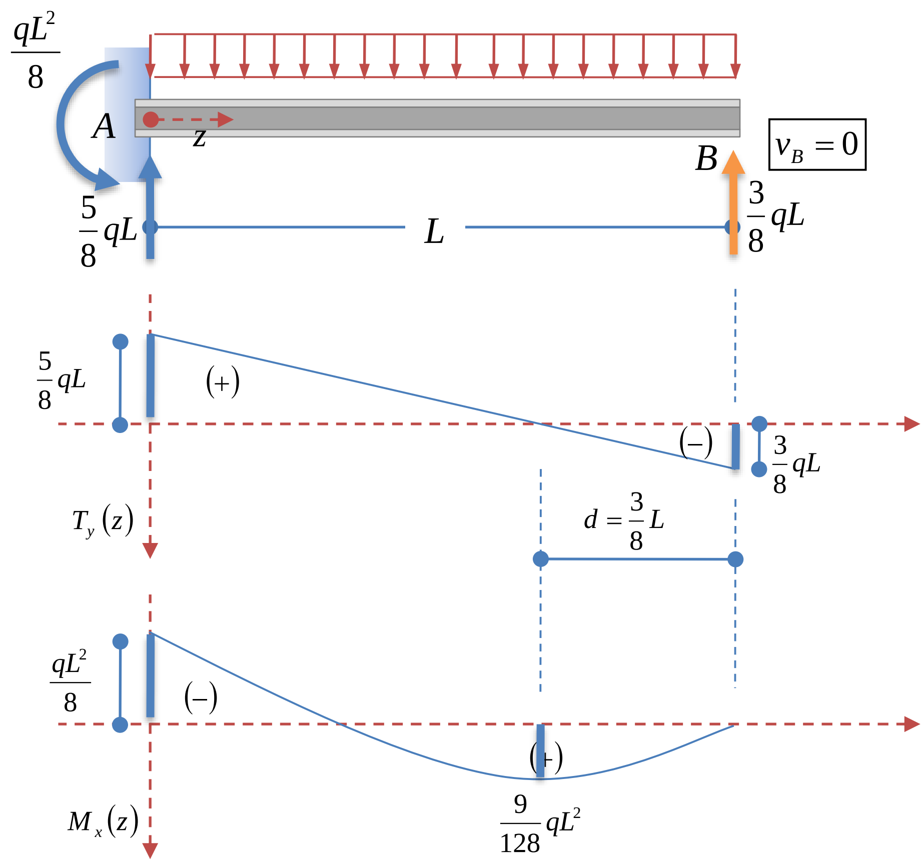
$$v_B = v_{B(q)} + v_{B(X)} = \frac{qL^4}{8EI_x} - \frac{XL^3}{3EI_x}$$

imponendo la compatibilità con il carrello in B si ottiene

$$v_B = 0 \rightarrow X = \frac{3}{8}qL$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio - soluzione



Per la risoluzione di tale sistema utilizziamo la seguente procedura:

3. A questo punto, noto il valore dell'incognita iperstatica, è possibile determinare le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione presenti nella struttura come indicato in figura. Lo sforzo normale è nullo, mentre le funzioni del taglio e del momento flettente sono le seguenti:

   $$T_y(z) = q\left(\frac{5}{8}L - z\right) \qquad M_x(z) = \frac{q}{2}\left(-\frac{L^2}{4} - z^2 + \frac{5}{4}Lz\right)$$

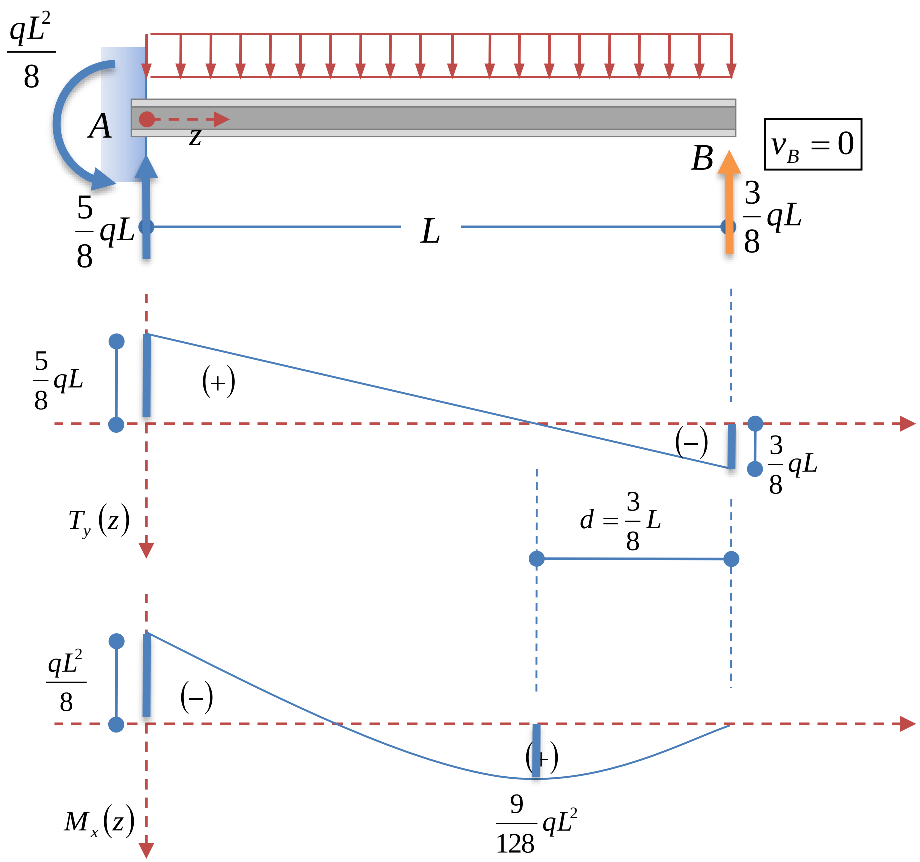
   Il momento flettente massimo (in valore assoluto) è quello presente in A. Da tale valore si calcola

   $$\sigma_{z\max} = \frac{\frac{qL^2}{8}}{I_x}\frac{h}{2} = 6{,}5\,MPa$$

   e quindi la verifica di resistenza è soddisfatta.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio - soluzione

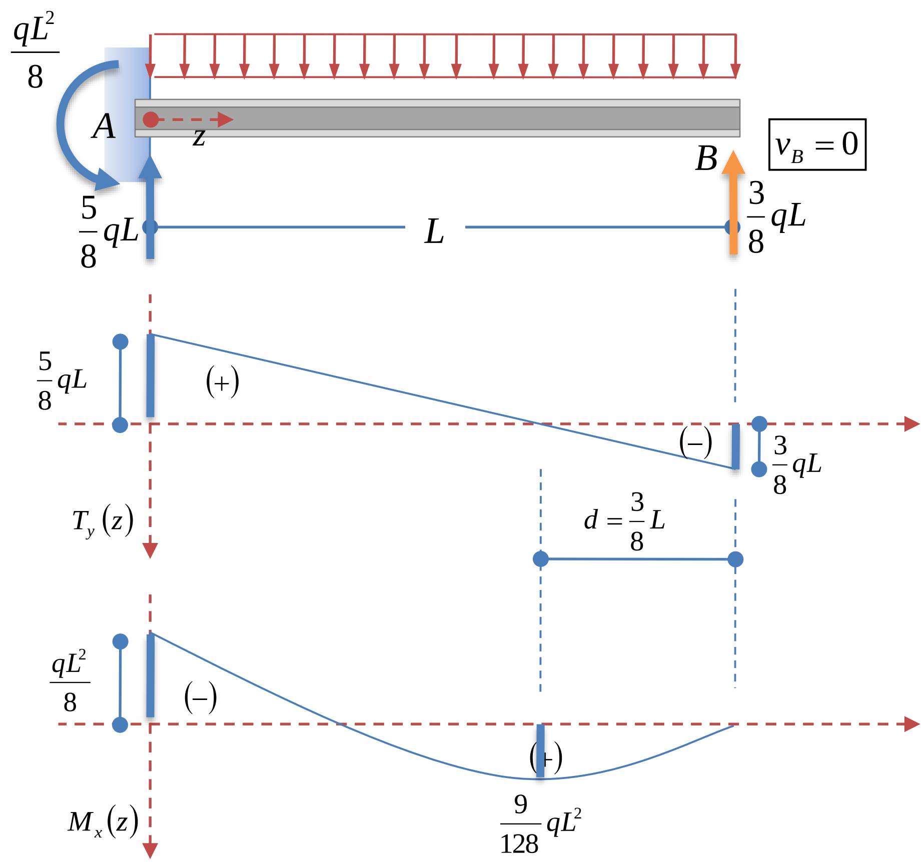


Per la risoluzione di tale sistema utilizziamo la seguente procedura:

4. Per effettuare la verifica di deformabilità richiesta dall'esercizio è necessario determinare lo spostamento massimo della struttura. Questo può essere valutato attraverso uno qualunque dei metodi descritti nelle scorse lezioni (integrazione dell'equazione differenziale della linea elastica, PLV). Visto che per la struttura in esame è già stata determinata la funzione del momento flettente, si procede utilizzando il metodo dell'integrazione della linea elastica del secondo ordine.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio - soluzione



Per la risoluzione di tale sistema utilizziamo la seguente procedura:

4. Dalla funzione della curvatura si ha:

$$\chi_x(z) = \frac{q}{2E\,I_x}\left(-\frac{L^2}{4} - z^2 + \frac{5}{4}Lz\right)$$

$$\varphi_x(z) = \int \chi_x(z)dz + a_1 = -\frac{qz}{48E\,I_x}\left(6L^2 - 15Lz + 8z^2\right) + a_1$$

$$v_0(z) \cong -\int \varphi_x(z)dz + a_2 = \frac{qz^2}{48E\,I_x}\left(3L^2 - 5Lz + 2z^2\right) - a_1 z + a_2$$

imponendo le seguenti condizioni al contorno

$$\varphi_x(z=0) = 0 \qquad v_0(z=0) = 0$$

si calcola

$$a_1 = 0 \qquad a_2 = 0$$

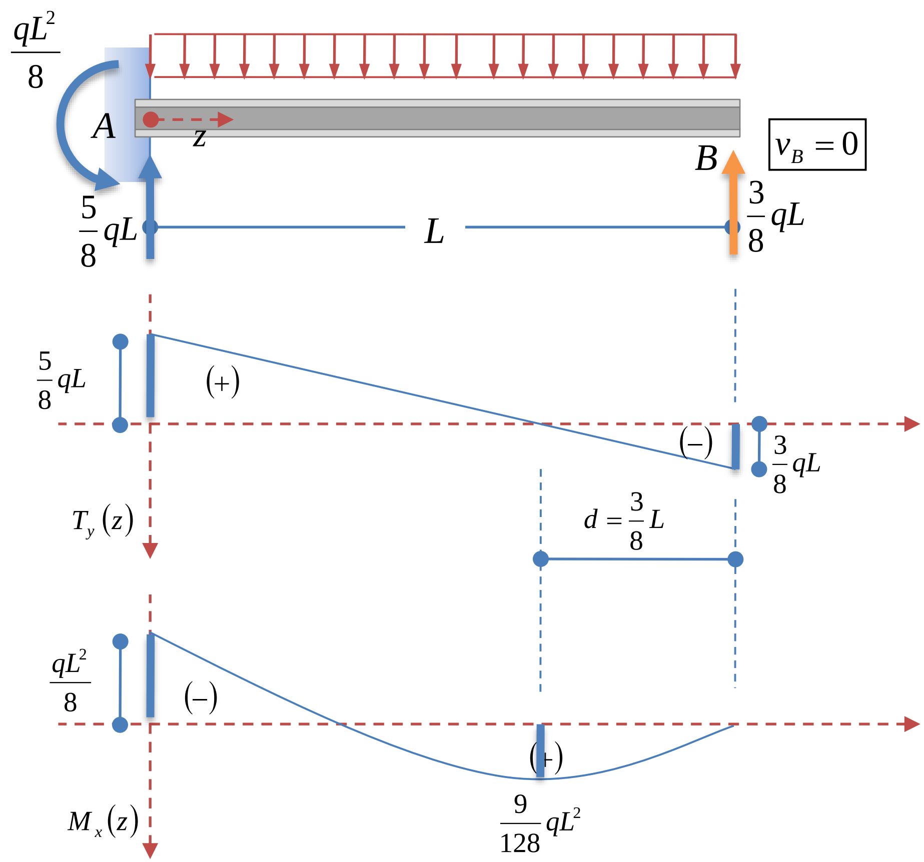
e quindi le espressioni della rotazione e dello spostamento verticale sono le seguenti:

$$\varphi_x(z) = -\frac{qz}{48E\,I_x}\left(6L^2 - 15Lz + 8z^2\right)$$

$$v_0(z) \cong \frac{qz^2}{48E\,I_x}\left(3L^2 - 5Lz + 2z^2\right)$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio - soluzione



Per la risoluzione di tale sistema utilizziamo la seguente procedura:

4. Lo spostamento massimo si ha in corrispondenza della sezione che ha rotazione nulla

$$\varphi_x(z)=0 \rightarrow \bar{z} = \frac{15-\sqrt{33}}{15}L \cong 0{,}5785L$$

pertanto si ha

$$v_{\max} = v_0(z=\bar{z}) \cong \frac{2}{384}\frac{qL^4}{E\,I_x} = 0{,}07mm$$

per la struttura in esame si ha

$$L/200 = 10mm$$

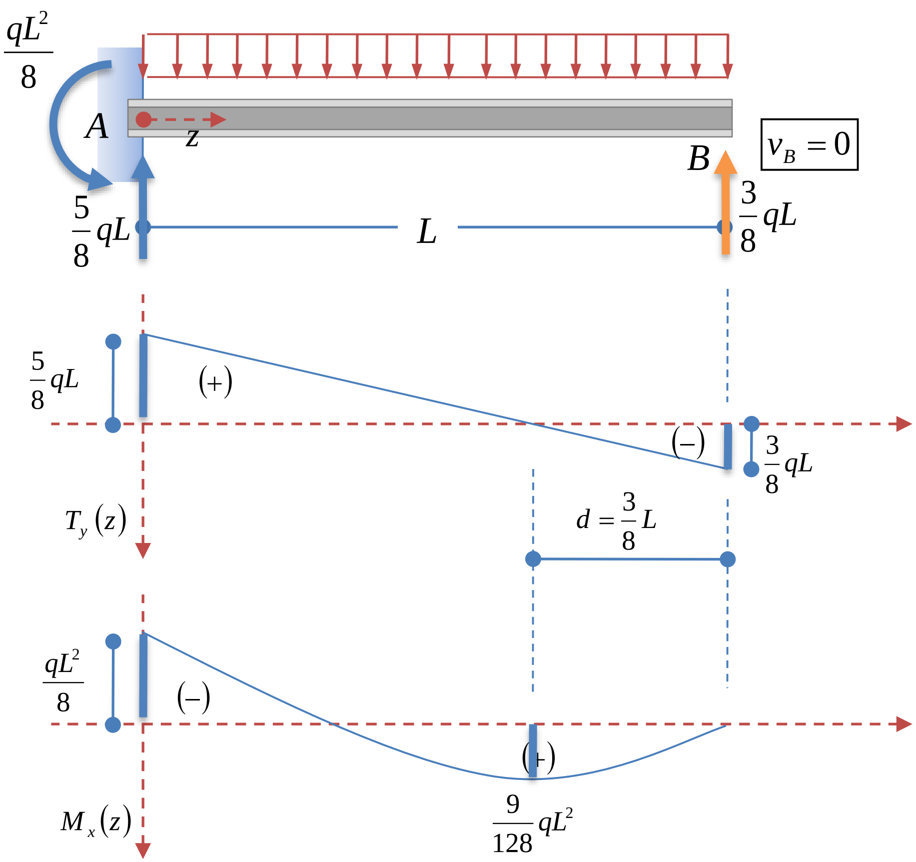
e quindi

$$v_{\max} < L/200$$

Anche la verifica di deformabilità è allora soddisfatta.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio - soluzione



Si osservi che, per come è stato determinato il valore dell'incognita iperstatica, l'espressione della linea elastica è tale da soddisfare anche le condizioni vincolari imposte dal carrello presente della sezione B. Si ha infatti

$$v_B = v_0(z = L) = 0$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

La risoluzione dei sistemi iperstatici

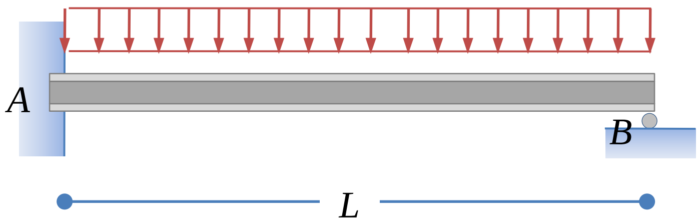
Dalla risoluzione dell'esercizio proposto nella presente lezione è evidente che la risoluzione di un sistema iperstatico attraverso il metodo della congruenza è leggermente più articolata rispetto alla risoluzione dei sistemi isostatici solo in quanto è necessaria la preventiva determinazione delle incognite iperstatiche (punti 1 e 2 dell'esercizio proposto). Tutte le successive analisi (progetto o verifica) sono effettuate su un sistema isostatico equivalente a quello di partenza e quindi possono essere utilizzate tutte le procedure di analisi descritte nelle precedenti lezioni.

Per tale motivo, a scopo di sintesi, nelle prossime applicazioni potremo risolvere i sistemi strutturali fino alla determinazione delle incognite iperstatiche sott'intendendo che il fine ultimo dell'analisi è quello della verifica o del progetto (per resistenza e/o per deformabilità) dei sistemi strutturali che saranno proposti.

Non esiste una regola precisa circa la scelta delle incognite iperstatiche: l'unica richiesta è che il sistema isostatico equivalente sia effettivamente isostatico. Si osservi che, come incognite iperstatiche, è possibile scegliere sia le reazioni vincolari che le caratteristiche della sollecitazione presenti in una sezione trasversale. A titolo esemplificativo di seguito si procede alla risoluzione dell'esercizio proposto nella presente lezione effettuando un'altra scelta per la reazione iperstatica.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

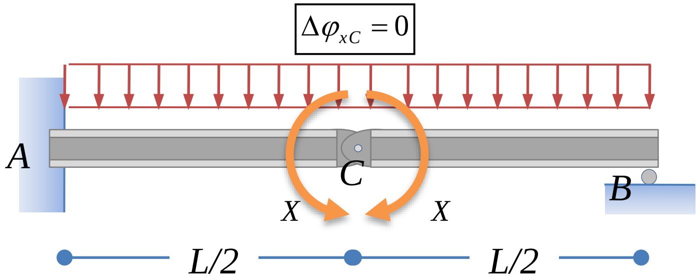
Esempio 2



Si vuole risolvere la struttura in figura (una volta iperstatica) scegliendo come incognita iperstatica il valore del momento flettente presente nella sezione di mezzeria.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio 2



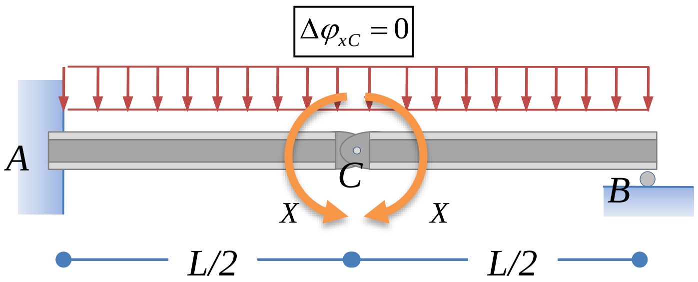
Si vuole risolvere la struttura in figura (una volta iperstatica) scegliendo come incognita iperstatica il valore del momento flettente presente nella sezione di mezzeria.

A tal fine si esplicita tale sollecitazione (di segno arbitrario). Consideriamo ad esempio che in C sia presente un momento flettente di modulo X che tende le fibre inferiori come indicato in figura. La relazione di congruenza che rende il sistema isostatico in figura equivalente alla struttura di partenza è la seguente:

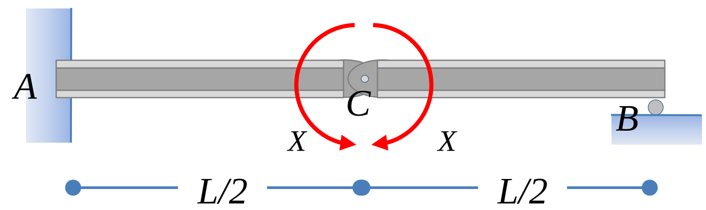
$$\varphi_{xC}^{(s)} = \varphi_{xC}^{(d)} \rightarrow \Delta\varphi_{xC} = 0$$

Procediamo allora determinando le precedenti rotazioni nel sistema isostatico equivalente ed imponendo la condizione di compatibilità con tutti i vincoli presenti nella struttura di partenza. Si procede utilizzando il metodo della forza unitaria.

Esempio 2



(s)

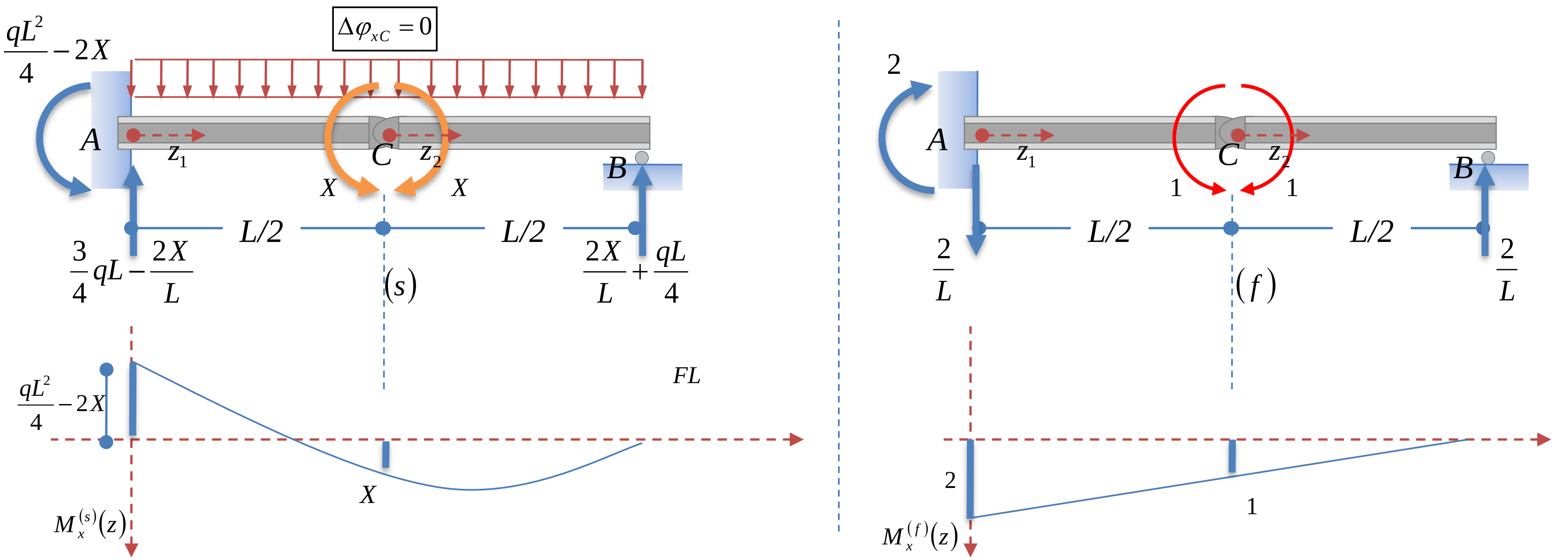


(f)

Introduciamo a tal fine il sistema *forze* indicato in figura. I diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione e le leggi della curvatura corrispondenti ai due sistemi sono riportati nella prossima slide

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

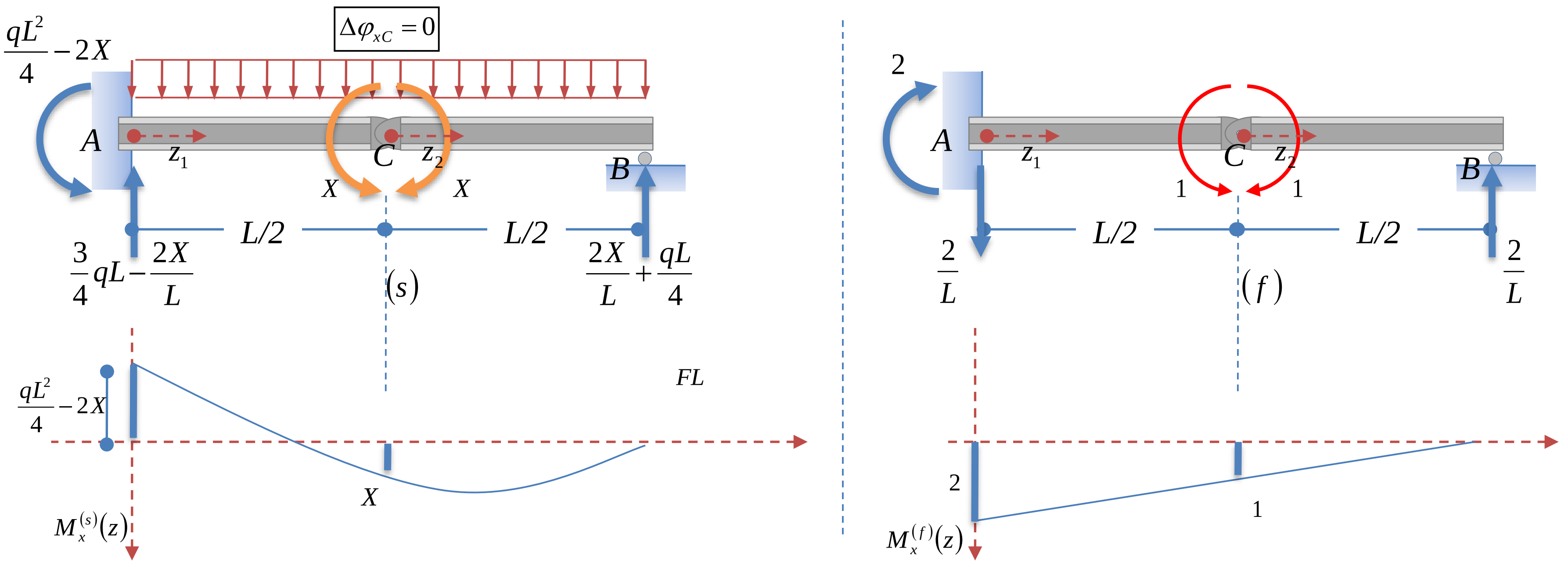
Esempio 2



Tratto	Dominio	$\chi_x^{(s)}$	$M_x^{(f)}$
AC	$0 \le z_1 \le L/2$	$\frac{1}{EI_x}\left(-\frac{qL^2}{4} + \frac{3}{4}qLz_1 - q\frac{z_1^2}{2} + X\left(2 - \frac{2}{L}z_1\right)\right)$	$2 - \frac{2}{L}z_1$
CB	$0 \le z_2 \le L/2$	$\frac{1}{EI_x}\left(-\frac{qz_2^2}{2} + \frac{qL}{4}z_2 + X\left(1 - \frac{2}{L}z_2\right)\right)$	$1 - \frac{2}{L}z_2$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio 2



Per l'equazione dei lavori virtuali si ha

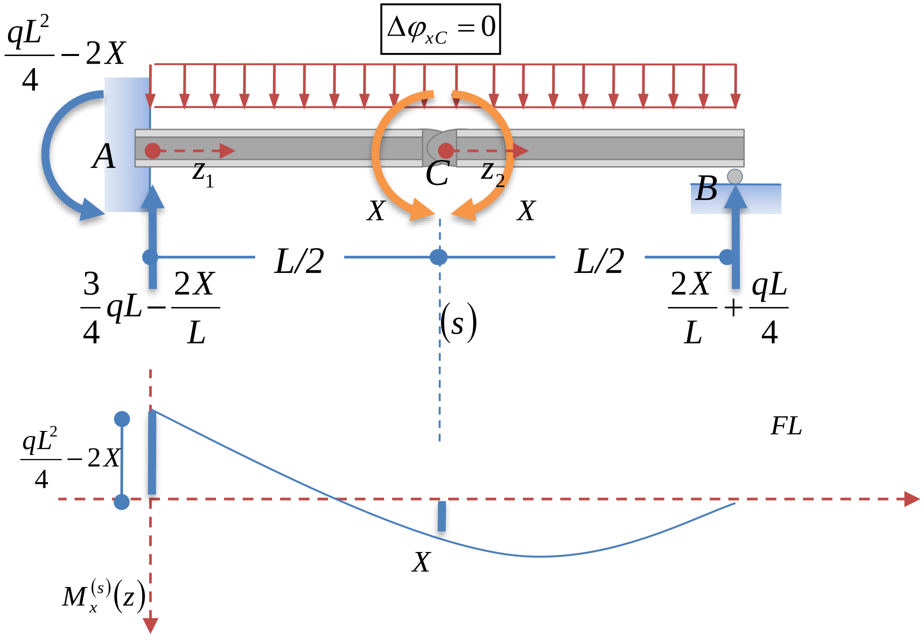
$$L_{vi}=\sum_{i=1}^{2}\int_0^{L/2} M_x^{(f)}(z_i)\cdot\chi_x^{(s)}(z_i)\ dz_i=\frac{4}{3}\frac{L}{E\,I_x}X-\frac{q\,L^3}{12E\,I_x}$$

$$L_{ve}=1\cdot\Delta\varphi_{xC}$$

$$L_{vi}=L_{ve}\rightarrow 1\cdot\Delta\varphi_{xC}=\frac{4}{3}\frac{L}{E\,I_x}X-\frac{q\,L^3}{12E\,I_x}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

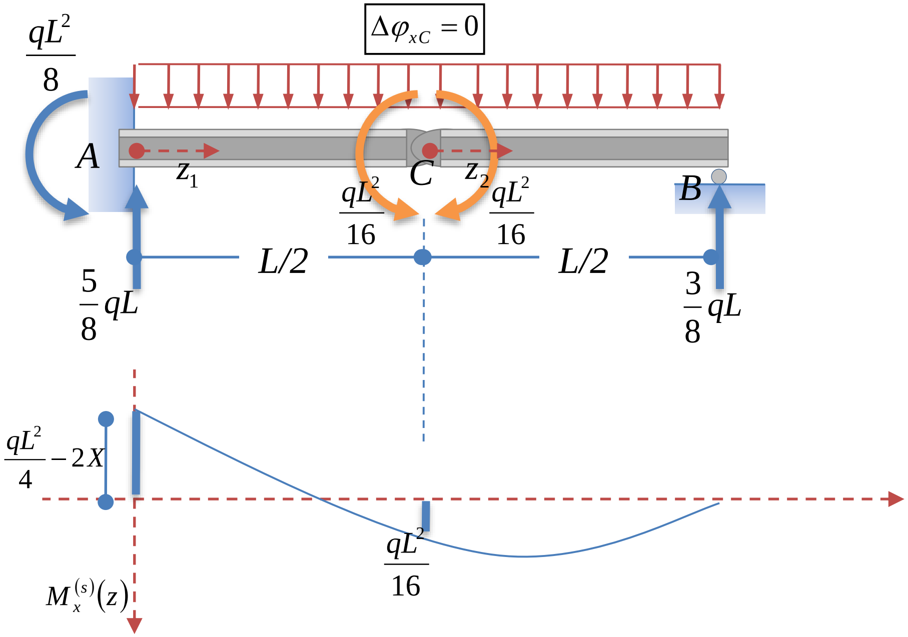
Esempio 2



Imponendo l'equazione di compatibilità con il vincolo (interno) in *C* si ottiene:

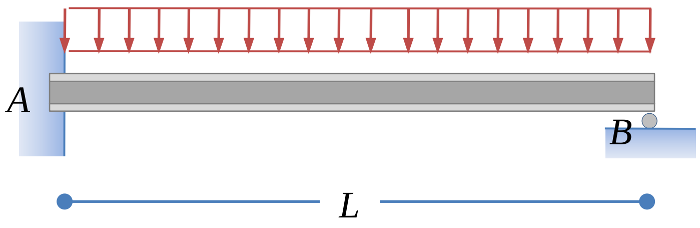
$$\Delta\varphi_{xC} = 0 \rightarrow \frac{4}{3}\frac{L}{E\,I_x}X - \frac{q\,L^3}{12E\,I_x} = 0 \rightarrow X = \frac{qL^2}{16}$$

Esempio 2



Sostituendo il valore della reazione iperstatica così ottenuto nelle espressioni delle reazioni vincolari e nei valori notevoli del momento flettente si ottiene quanto indicato nella figura a fianco che coincide con quanto ottenuto utilizzando la procedura descritta nella prima parte della lezione.

Osservazione



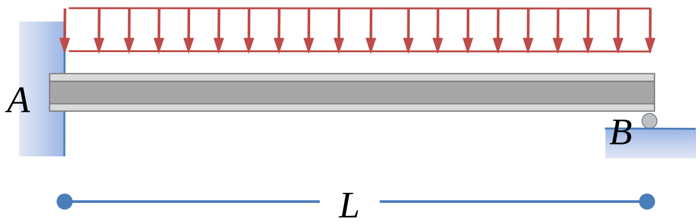
Si osservi che, ovviamente, esistono altri metodi per la risoluzione dei sistemi iperstatici. Ad esempio la struttura schematizzata in figura potrebbe essere agevolmente risolta utilizzando il metodo dell’integrazione della linea elastica del quarto ordine. In tale metodo infatti vengono considerate contemporaneamente tutte le equazioni differenziali che governano il problema delle travi inflesse.

Telai piani

Esercizi proposti

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

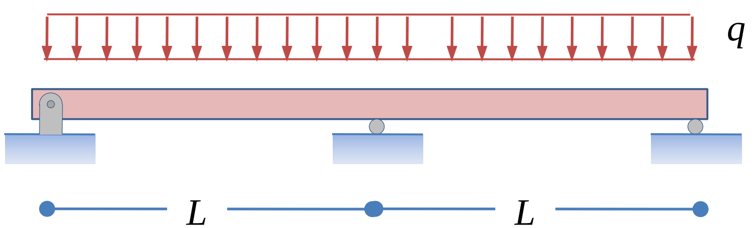
Esercizio



Si risolva la struttura schematizzata in figura utilizzando il metodo delle equazioni di congruenza. Si consideri come incognita iperstatica la reazione a momento dell'incastro *A*.

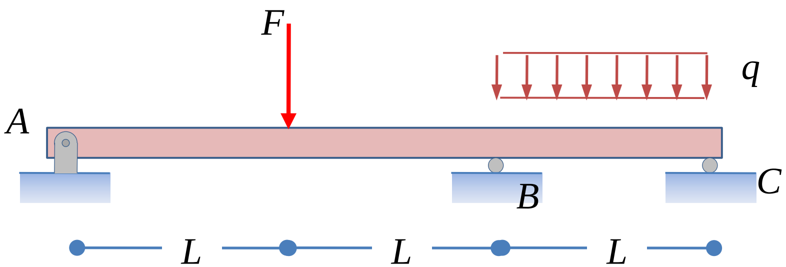
Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esercizio



Utilizzando il metodo delle equazioni di congruenza si risolva la struttura schematizzata in figura. Si consideri come incognita iperstatica la reazione del carrello intermedio.

Esercizio



Utilizzando il metodo delle equazioni di congruenza si risolva la struttura schematizzata in figura. Si consideri come incognita iperstatica il momento flettente presente nella sezione *C*.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831