

# Telai piani



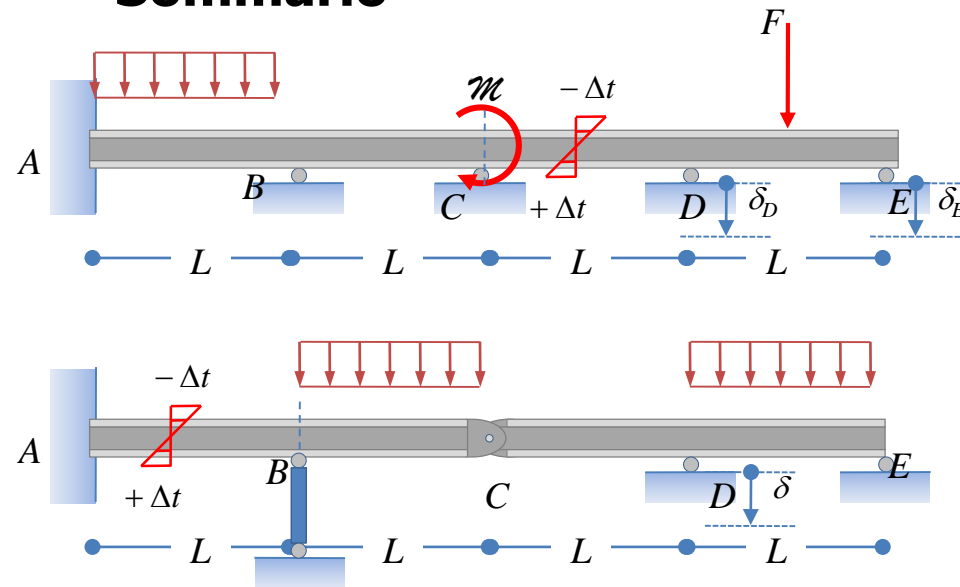
UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
FIRENZE

Scuola di Architettura  
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.

Trave continua su più appoggi:  
equazione dei tre momenti  
(sistemi “a nodi fissi”)



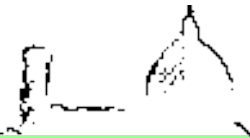
## Sommario



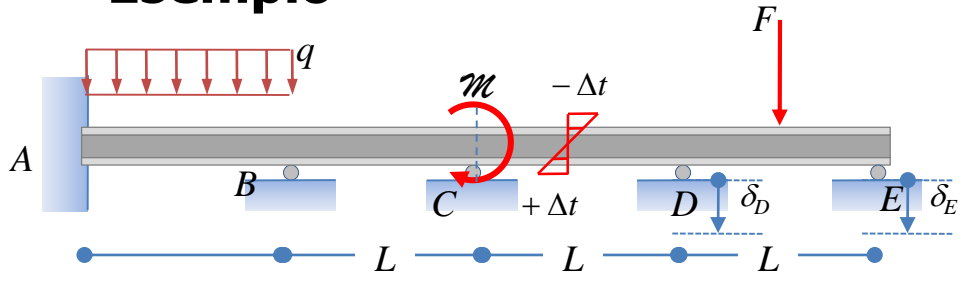
In precedenza, abbiamo descritto un metodo di risoluzione di sistemi strutturali iperstatici basato sulla definizione di un sistema isostatico equivalente e sull'imposizione di equazioni di congruenza che rappresentano le condizioni di equivalenza fra i due sistemi. In accordo con tale metodo (delle forze), il medesimo sistema iperstatico può essere risolto attraverso infinite possibilità per quanto concerne la definizione del sistema isostatico equivalente.

Esiste però una procedura (relativa sostanzialmente ad una particolare scelta del sistema isostatico equivalente) che, per la sua semplicità e ripetitività, è particolarmente adatta alla risoluzione di sistemi strutturali costituiti da travi a molte campate (e quindi molte volte iperstatiche) del tipo indicato in figura.

Nel seguito descriveremo tale metodo in maniera applicativa riferendoci ad un particolare sistema strutturale.

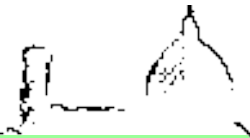


### Esempio

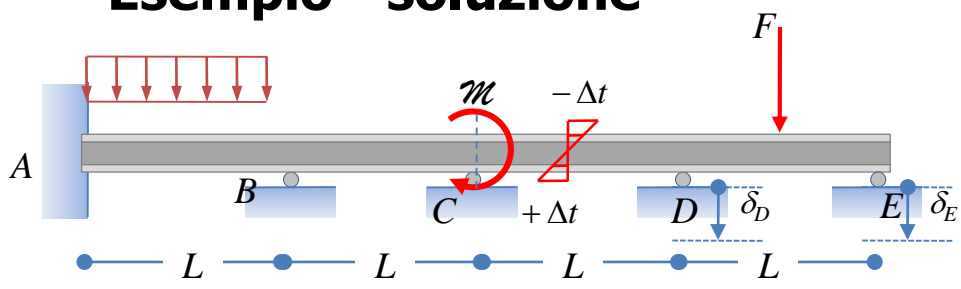


La trave in acciaio schematizzata in figura ha sezione trasversale IPE 140 ( $E=210GPa, I_x=541,0cm^4, \alpha=11.7 \times 10^{-6}C^{-1}$ ). Si risolvi la struttura e si verifichi che la massima tensione normale dovuta alla flessione sia inferiore a  $160 MPa$ .

- $L = 1.5 m$
- $q = 20.0 kN/m$
- $M = 10.0 kNm$
- $F = 10.0 kN$
- $\Delta t = 20^\circ C$
- $\delta_D = 1.0 mm$
- $\delta_E = 2.0 mm$



## Esempio - soluzione



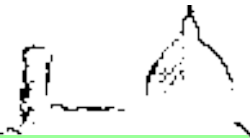
La struttura in esame è quattro volte iperstatica.

La risoluzione di tale struttura attraverso il metodo delle forze richiede la definizione di una struttura isostatica equivalente a quella indicata in figura e quindi l'imposizione di quattro equazioni di congruenza. Al fine di minimizzare l'impegno computazionale è conveniente scegliere un sistema isostatico che dà luogo ad espressioni delle equazioni di congruenza basate, per quanto possibile, su valori di spostamento (o rotazioni) noti (in quanto già determinati nelle precedenti lezioni), in modo da poter applicare direttamente il metodo della sovrapposizione degli effetti. Si utilizza allora la procedura descritta di seguito.

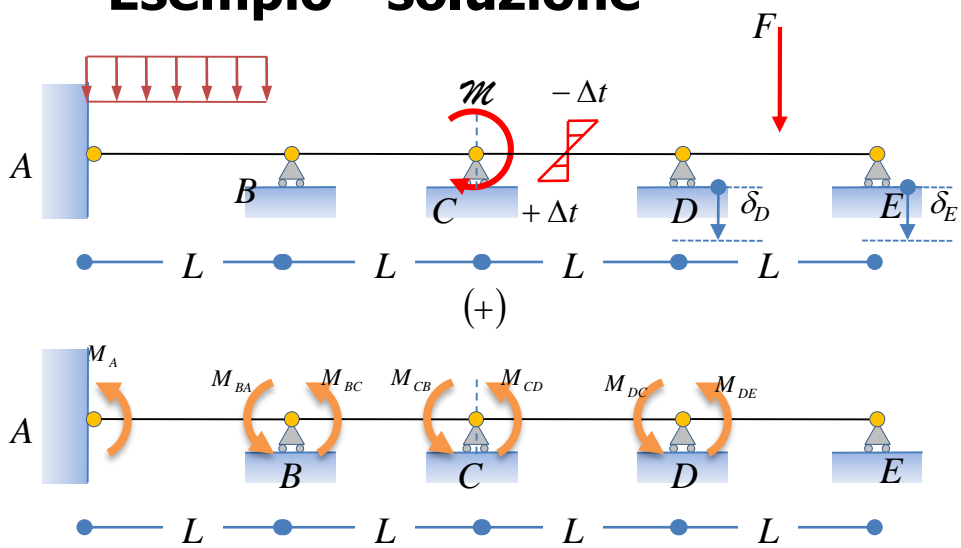
$$g.d.l.-g.d.v. = \ell-i$$

$$g.d.l.=3; \quad g.d.v.=7 \rightarrow \ell-i = -4$$

$$\ell = 0 \quad \rightarrow \quad i = 4$$

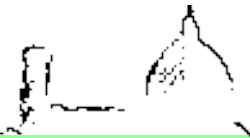


## Esempio - soluzione

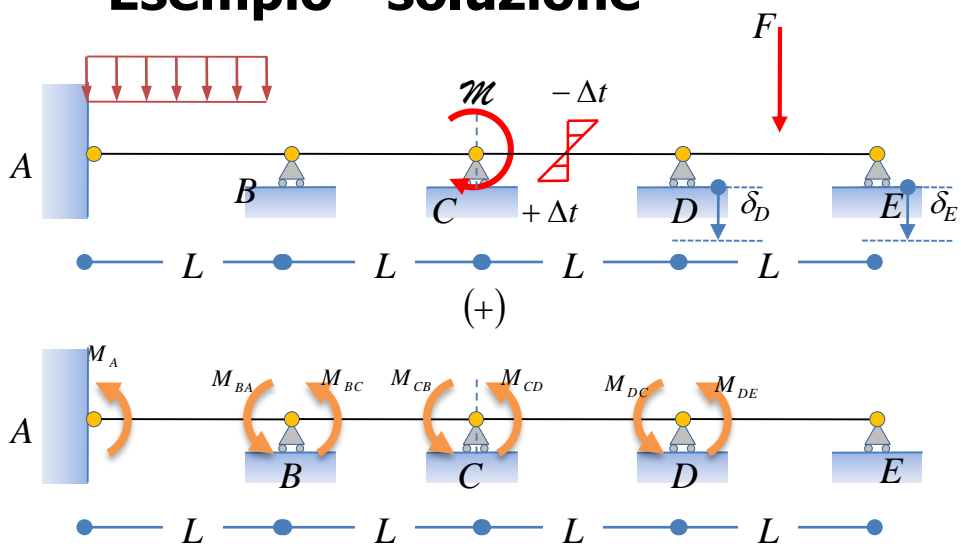


1. Definizione del sistema isostatico equivalente.  
 Si considerano come incognite iperstatiche le sollecitazioni flessionali (momento flettente interno) presenti nei nodi della struttura. Il sistema isostatico equivalente è allora ottenuto "introducendo" delle cerniere interne in corrispondenza dei nodi. Per chiarezza rappresentativa in figura ci siamo riferiti alla linea d'asse delle travi

e abbiamo indicato i carichi esterni e le incognite iperstatiche in due schemi differenti anche se ovviamente essi sono contemporaneamente presenti sulla struttura. Si osservi che, per il sistema in esame, la struttura ottenuta "introducendo" delle cerniere nei nodi della struttura di partenza è isostatica. In questo caso il sistema iperstatico di partenza si dice "a nodi fissi" in quanto gli spostamenti verticali di tutti i suoi nodi sono noti a-priori. Questa condizione può non essere sempre verificata.



## Esempio - soluzione



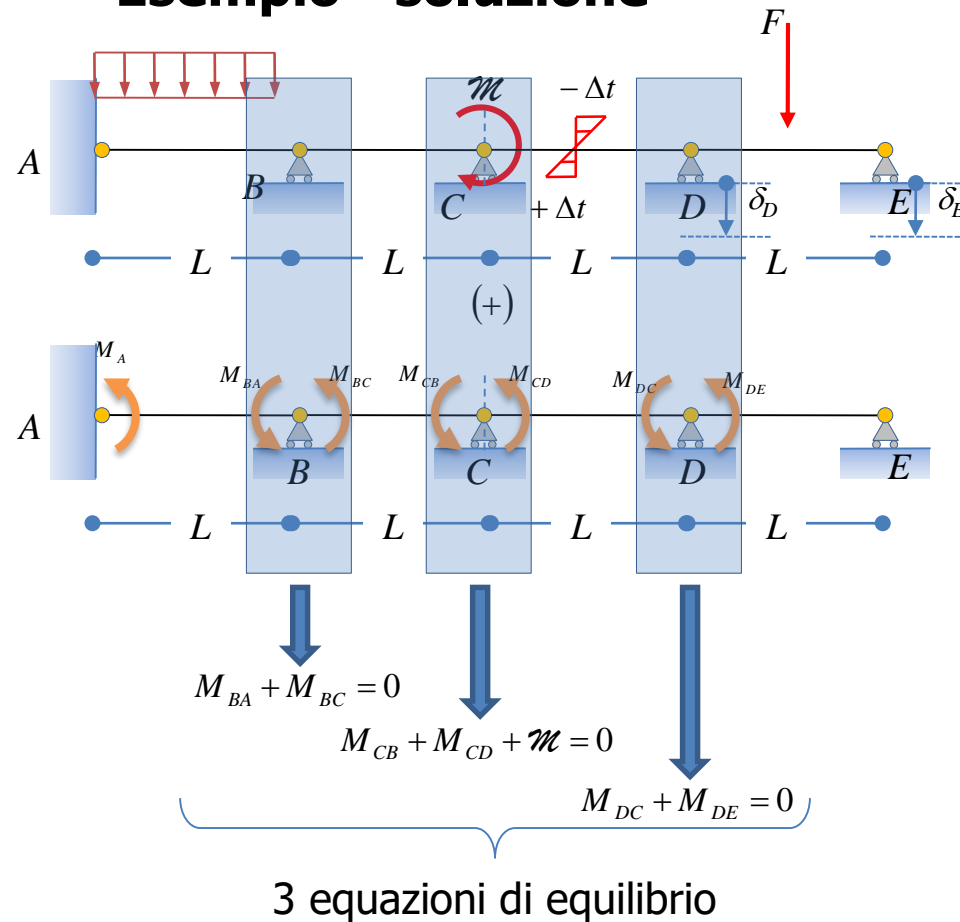
- $M_A$
- $M_{BA}$
- $M_{BC}$
- $M_{CB}$
- $M_{CD}$
- $M_{DC}$
- $M_{DE}$

7 incognite

- Definizione del sistema isostatico equivalente.  
 Al fine di generalizzare la procedura risolutiva, in corrispondenza di ogni nodo della struttura abbiamo differenziato il momento flettente presente alla sua destra ed alla sua sinistra. In tal modo, ad esempio,  $M_{BA}$  indica il momento flettente presente sulla sezione "immediatamente a sinistra" del nodo  $B$ , mentre  $M_{BC}$  indica il momento flettente presente sulla sezione "immediatamente a destra" del nodo  $B$ . Indicazioni analoghe valgono ovviamente per tutti i nodi della struttura. Tali azioni rappresentano le incognite del problema e sono state ipotizzate antiorarie.



### Esempio - soluzione

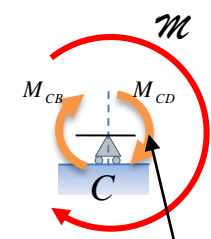
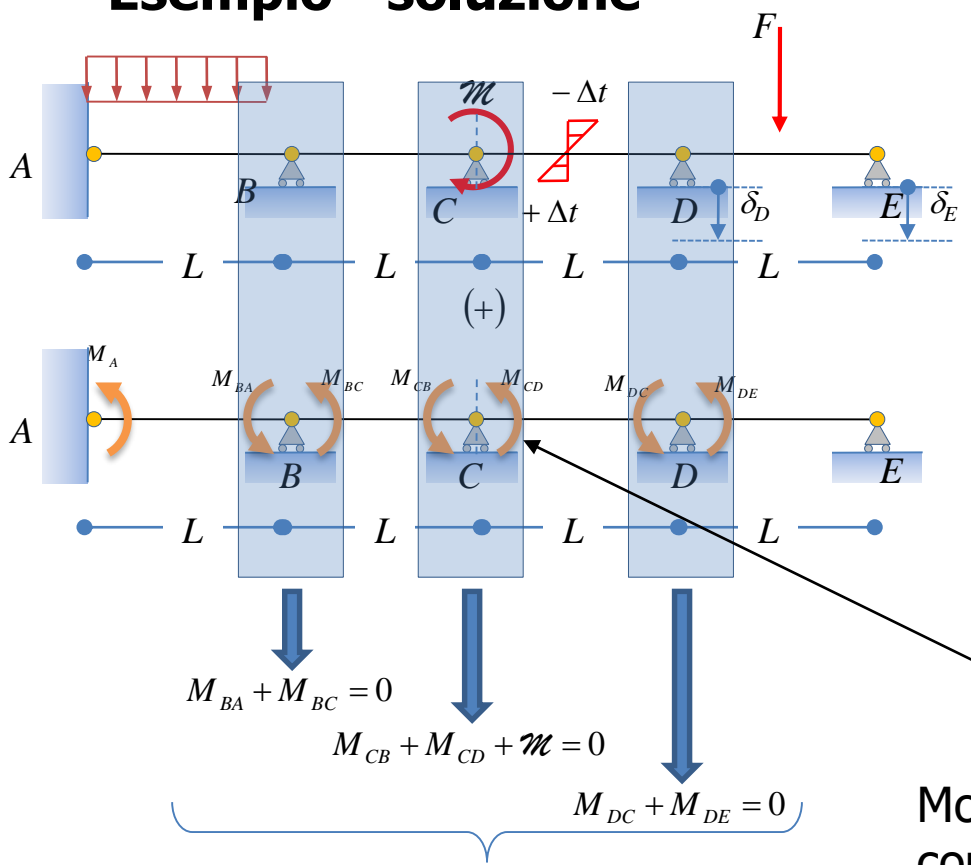


1. Definizione del sistema isostatico equivalente.

Nella definizione delle equazioni di equilibrio per la trave abbiamo visto che il diagramma del momento flettente è continuo in corrispondenza delle sezioni in cui non è applicato un momento esterno, mentre presenta un "salto" in corrispondenza delle sezioni in cui si ha una coppia concentrata. L'ampiezza di tale salto è uguale al modulo della coppia applicata. Utilizzando delle considerazioni analoghe si ottiene che le incognite iperstatiche del problema in esame devono soddisfare le equazioni di equilibrio alla rotazione dei nodi indicate a fianco (v. figura nella slide successiva)



### Esempio - soluzione



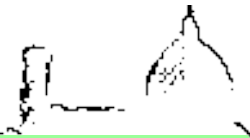
Momenti "applicati" sul nodo

$$\begin{aligned}
 M_{BA} + M_{BC} &= 0 \\
 M_{CB} + M_{CD} + m &= 0 \\
 M_{DC} + M_{DE} &= 0
 \end{aligned}$$

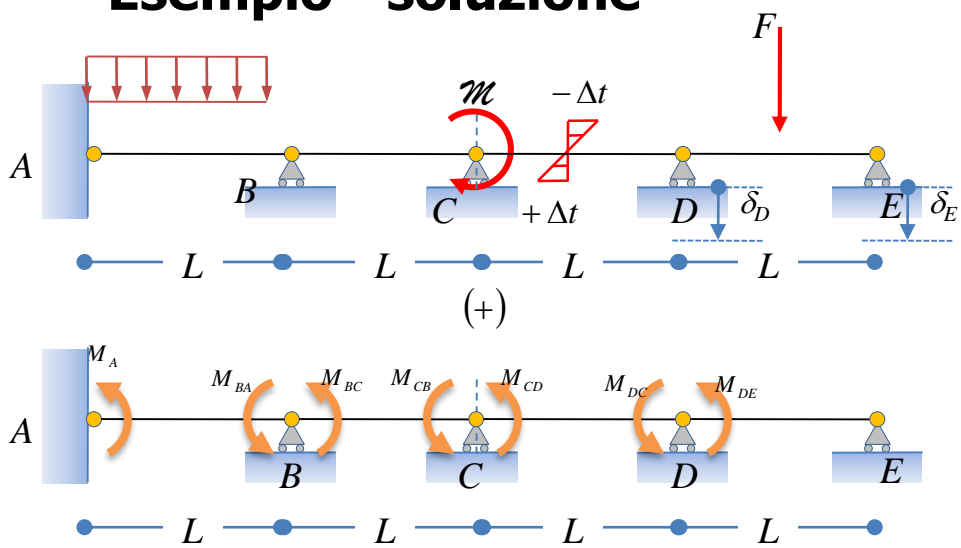
3 equazioni di equilibrio

Momenti "applicati" in corrispondenza degli estremi delle travi appoggiate-appoggiate





## Esempio - soluzione



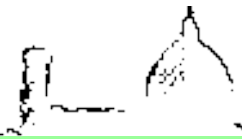
2. Equazioni di congruenza.  
 Le equazioni di congruenza, ossia le condizioni che impongono che la struttura schematizzata a fianco sia equivalente a quella di partenza, sono le seguenti:
- compatibilità con i vincoli esterni  
 $\varphi_A = 0$
  - continuità delle rotazioni in corrispondenza dei nodi interni

“svincolati” (si assumono positive le rotazioni antiorarie, ossia concordi con i momenti indicati in figura)

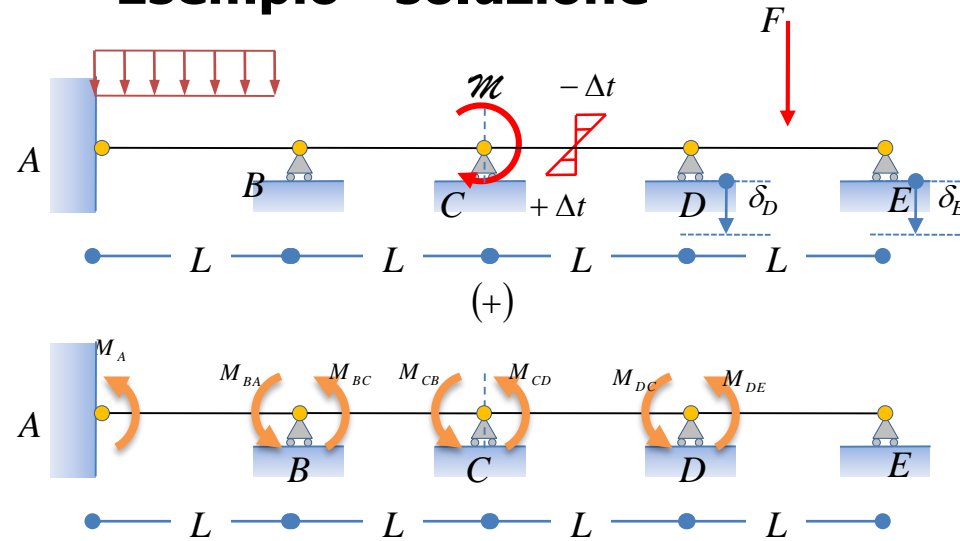
$$\varphi_{BA} = \varphi_{BC} \qquad \varphi_{CB} = \varphi_{CD} \qquad \varphi_{DC} = \varphi_{DE}$$

La denominazione delle precedenti rotazioni è analoga a quella dei momenti indicati in figura: ad esempio  $\varphi_{BA}$  indica la rotazione della sezione “immediatamente a sinistra” del nodo  $B$ .

In totale possiamo allora scrivere quattro equazioni di congruenza e compatibilità con i vincoli.



## Esempio - soluzione



equilibrio

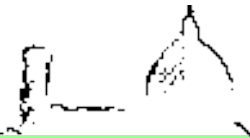
$$\begin{cases} M_{BA} + M_{BC} = 0 \\ M_{CB} + M_{CD} + \mathcal{M} = 0 \\ M_{DC} + M_{DE} = 0 \end{cases}$$

Congruenza e compatibilità

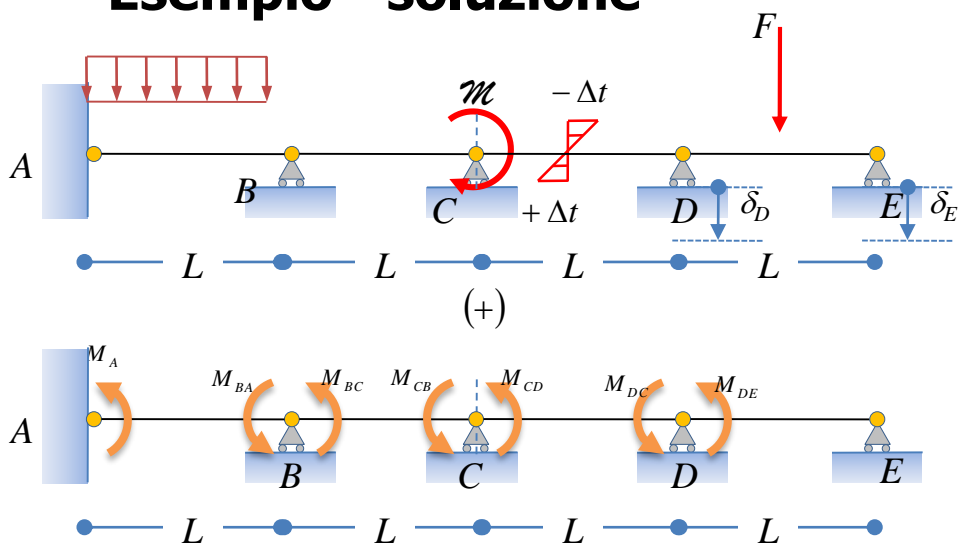
$$\begin{cases} \varphi_A = 0 \\ \varphi_{BA} = \varphi_{BC} \\ \varphi_{CB} = \varphi_{CD} \\ \varphi_{DC} = \varphi_{DE} \end{cases}$$

Riassumendo, le equazioni che definiscono il problema strutturale in esame sono quelle indicate a fianco. In totale abbiamo sette incognite (i momenti indicati in figura) che possono essere determinate utilizzando le sette equazioni linearmente indipendenti che abbiamo ottenuto (tre equazioni di equilibrio e quattro equazioni di compatibilità e congruenza).

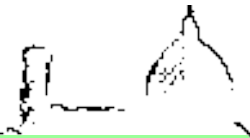
Al fine di determinare i momenti incogniti (nel metodo delle forze le variabili primarie sono delle forze) dobbiamo esprimere, attraverso i legami costitutivi, le rotazioni nodali in funzione dei momenti.



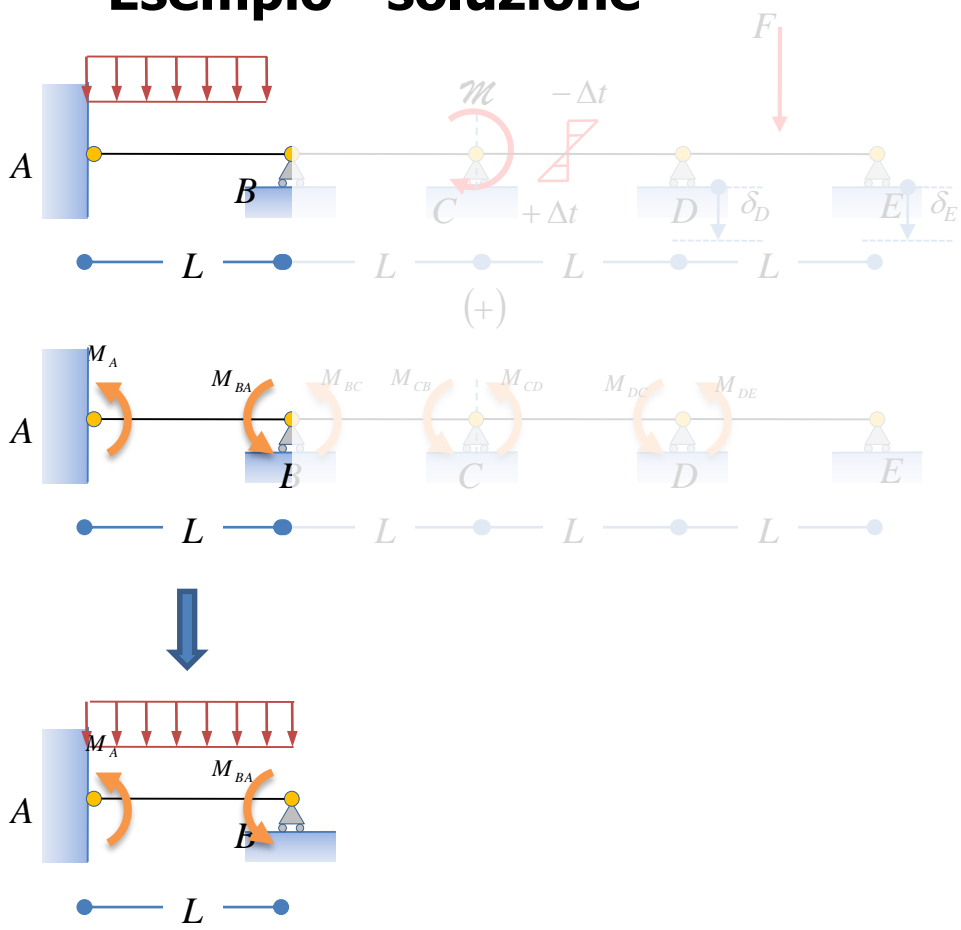
## Esempio - soluzione



Si osservi che il sistema isostatico equivalente indicato in figura è stato ottenuto "inserendo" delle cerniere in corrispondenza dei nodi. In tal modo le travi costituenti il sistema isostatico equivalente sono "sconnesse" dal punto di vista rotazionale: le rotazioni degli estremi della singola trave dipendono solo dai carichi direttamente applicati su di essa. È facile allora determinare le rotazioni nodali contenute nelle equazioni di congruenza attraverso il metodo della sovrapposizione degli effetti (per l'esempio in figura dobbiamo considerare quattro travi appoggiate-appoggiate caricate da azioni i cui effetti sono noti in quanto determinati nelle precedenti lezioni).



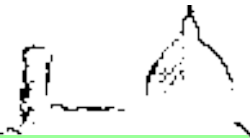
### Esempio - soluzione



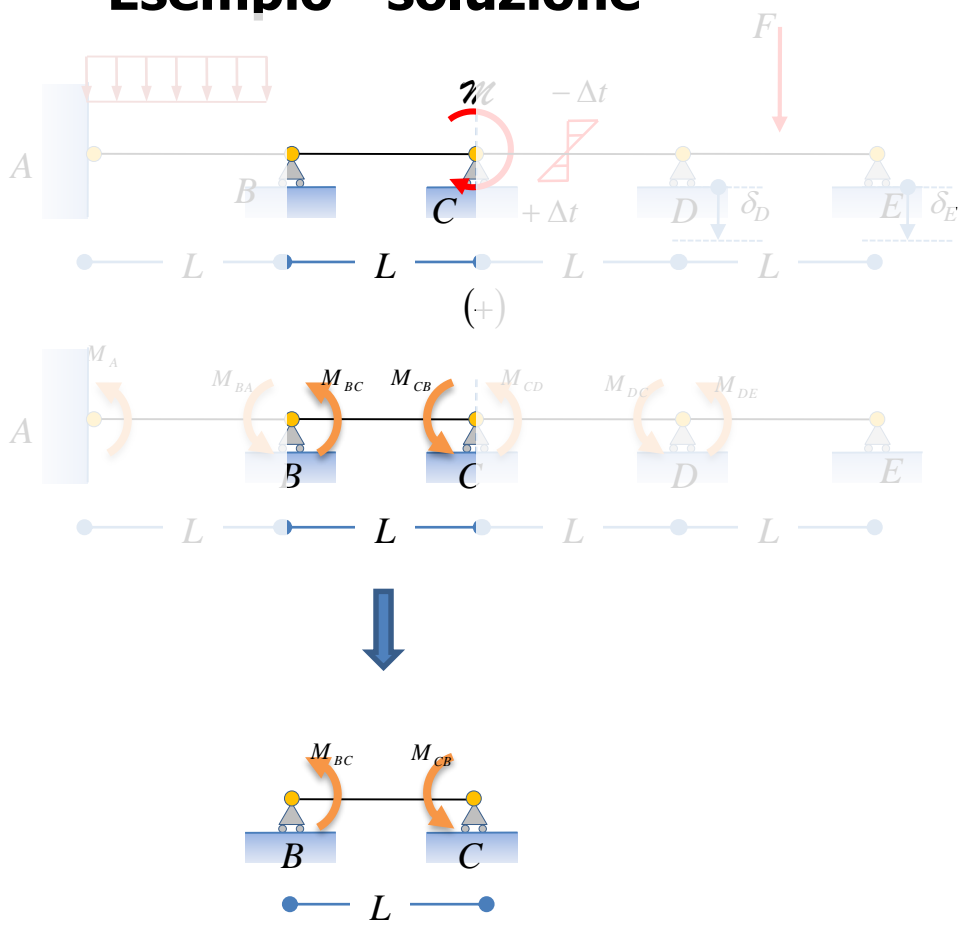
Utilizzando il metodo della sovrapposizione degli effetti possiamo calcolare le rotazioni (positive se antiorarie) degli estremi dei singoli tratti come segue:

$$\varphi_A = M_A \frac{L}{3EI_x} - M_{BA} \frac{L}{6EI_x} - \frac{qL^3}{24EI_x}$$

$$\varphi_{BA} = M_{BA} \frac{L}{3EI_x} - M_A \frac{L}{6EI_x} + \frac{qL^3}{24EI_x}$$



## Esempio - soluzione



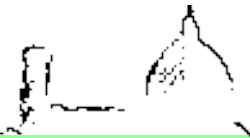
Utilizzando il metodo della sovrapposizione degli effetti possiamo calcolare le rotazioni (positive se antiorarie) degli estremi dei singoli tratti come segue:

$$\varphi_A = M_A \frac{L}{3EI_x} - M_{BA} \frac{L}{6EI_x} - \frac{qL^3}{24EI_x}$$

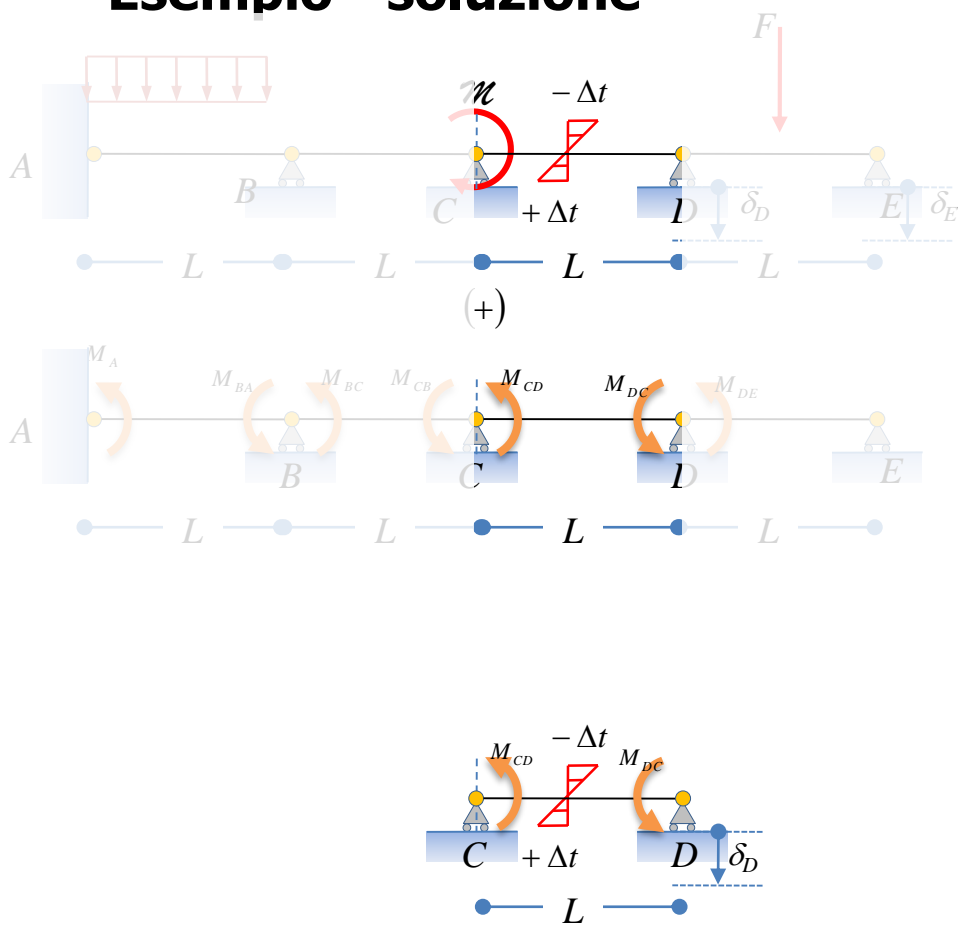
$$\varphi_{BA} = M_{BA} \frac{L}{3EI_x} - M_A \frac{L}{6EI_x} + \frac{qL^3}{24EI_x}$$

$$\varphi_{BC} = M_{BC} \frac{L}{3EI_x} - M_{CB} \frac{L}{6EI_x}$$

$$\varphi_{CB} = M_{CB} \frac{L}{3EI_x} - M_{BC} \frac{L}{6EI_x}$$



## Esempio - soluzione



Utilizzando il metodo della sovrapposizione degli effetti possiamo calcolare le rotazioni (positive se antiorarie) degli estremi dei singoli tratti come segue:

$$\varphi_A = M_A \frac{L}{3EI_x} - M_{BA} \frac{L}{6EI_x} - \frac{qL^3}{24EI_x}$$

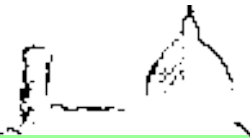
$$\varphi_{BA} = M_{BA} \frac{L}{3EI_x} - M_A \frac{L}{6EI_x} + \frac{qL^3}{24EI_x}$$

$$\varphi_{BC} = M_{BC} \frac{L}{3EI_x} - M_{CB} \frac{L}{6EI_x}$$

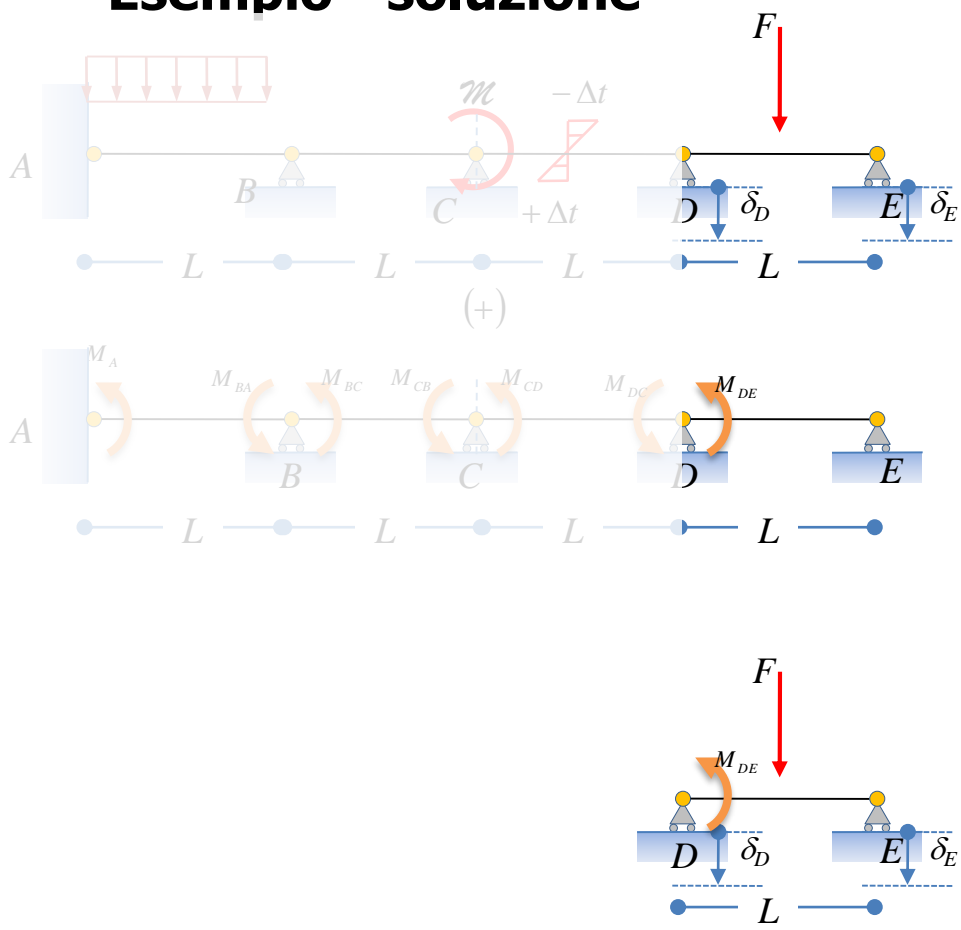
$$\varphi_{CB} = M_{CB} \frac{L}{3EI_x} - M_{BC} \frac{L}{6EI_x}$$

$$\varphi_{CD} = M_{CD} \frac{L}{3EI_x} - M_{DC} \frac{L}{6EI_x} - \frac{\delta_D}{L} - \frac{\alpha \Delta t}{h} L$$

$$\varphi_{DC} = M_{DC} \frac{L}{3EI_x} - M_{CD} \frac{L}{6EI_x} - \frac{\delta_D}{L} - \frac{\alpha \Delta t}{h} L$$



### Esempio - soluzione



Utilizzando il metodo della sovrapposizione degli effetti possiamo calcolare le rotazioni (positive se antiorarie) degli estremi dei singoli tratti come segue:

$$\varphi_A = M_A \frac{L}{3EI_x} - M_{BA} \frac{L}{6EI_x} - \frac{qL^3}{24EI_x}$$

$$\varphi_{BA} = M_{BA} \frac{L}{3EI_x} - M_A \frac{L}{6EI_x} + \frac{qL^3}{24EI_x}$$

$$\varphi_{BC} = M_{BC} \frac{L}{3EI_x} - M_{CB} \frac{L}{6EI_x}$$

$$\varphi_{CB} = M_{CB} \frac{L}{3EI_x} - M_{BC} \frac{L}{6EI_x}$$

$$\varphi_{CD} = M_{CD} \frac{L}{3EI_x} - M_{DC} \frac{L}{6EI_x} - \frac{\delta_D}{L} - \frac{\alpha \Delta t}{h}$$

$$\varphi_{DC} = M_{DC} \frac{L}{3EI_x} - M_{CD} \frac{L}{6EI_x} - \frac{\delta_D}{L} + \frac{\alpha \Delta t}{h}$$

$$\varphi_{DE} = M_{DE} \frac{L}{3EI_x} + \frac{\delta_D - \delta_E}{L} - \frac{FL^2}{16EI_x}$$

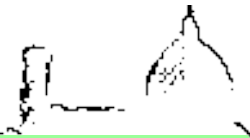


## Esempio - soluzione

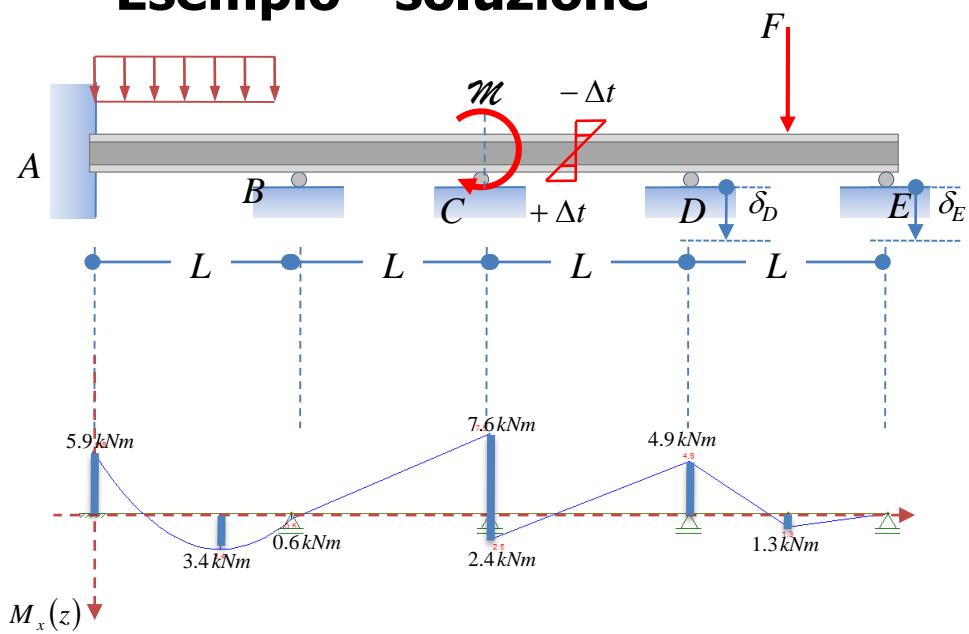
Sostituendo le precedenti espressioni (di legame costitutivo) nelle equazioni di congruenza e mettendole a sistema anche con le equazioni di equilibrio si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 M_{BA} + M_{BC} = 0 \\
 M_{CB} + M_{CD} + \mathcal{M} = 0 \\
 M_{DC} + M_{DE} = 0 \\
 \varphi_A = 0 \rightarrow M_A \frac{L}{3EI_x} - M_{BA} \frac{L}{6EI_x} - \frac{qL^3}{24EI_x} = 0 \\
 \varphi_{BA} = \varphi_{BC} \rightarrow M_{BA} \frac{L}{3EI_x} - M_A \frac{L}{6EI_x} + \frac{qL^3}{24EI_x} = M_{BC} \frac{L}{3EI_x} - M_{CB} \frac{L}{6EI_x} \\
 \varphi_{CB} = \varphi_{CD} \rightarrow M_{CB} \frac{L}{3EI_x} - M_{BC} \frac{L}{6EI_x} = M_{CD} \frac{L}{3EI_x} - M_{DC} \frac{L}{6EI_x} - \frac{\delta_D}{L} - \frac{\alpha \Delta t}{h} L \\
 \varphi_{DC} = \varphi_{DE} \rightarrow M_{DC} \frac{L}{3EI_x} - M_{CD} \frac{L}{6EI_x} - \frac{\delta_D}{L} + \frac{\alpha \Delta t}{h} L = M_{DE} \frac{L}{3EI_x} + \frac{\delta_D - \delta_E}{L} - \frac{FL^2}{16EI_x}
 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l}
 M_A \cong 5.9 \text{ kNm} \\
 M_{BA} \cong 0.6 \text{ kNm} \\
 M_{BC} \cong -0.6 \text{ kNm} \\
 M_{CB} \cong -7.6 \text{ kNm} \\
 M_{CD} \cong -2.4 \text{ kNm} \\
 M_{DE} \cong 4.9 \text{ kNm}
 \end{array} \right.$$





## Esempio - soluzione



Il diagramma del momento flettente presente nella struttura è quello schematizzato a fianco.

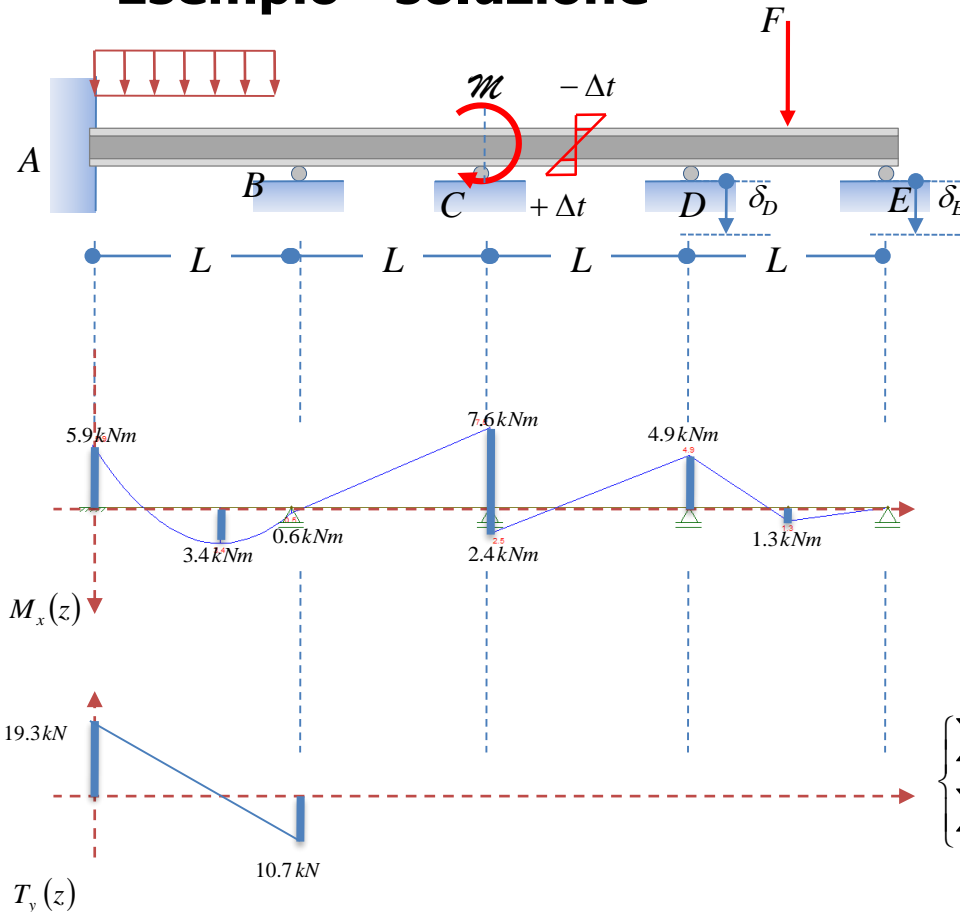
La sezione maggiormente sollecitata a flessione è quella "a sinistra" di C, nella quale si ha il seguente valore di tensione normale dovuta alla flessione:

$$\sigma_{z_{max}} = \frac{M}{I_x} \frac{h}{2} \cong 98.34 \text{ MPa}$$

La verifica di resistenza risulta quindi soddisfatta.

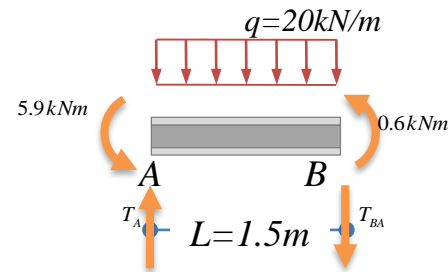


## Esempio - soluzione

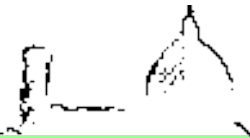


Si osservi che, noti i valori dei momenti flettenti di estremità del singolo tratto, è possibile determinare il diagramma del taglio attraverso semplici considerazioni di equilibrio come segue:

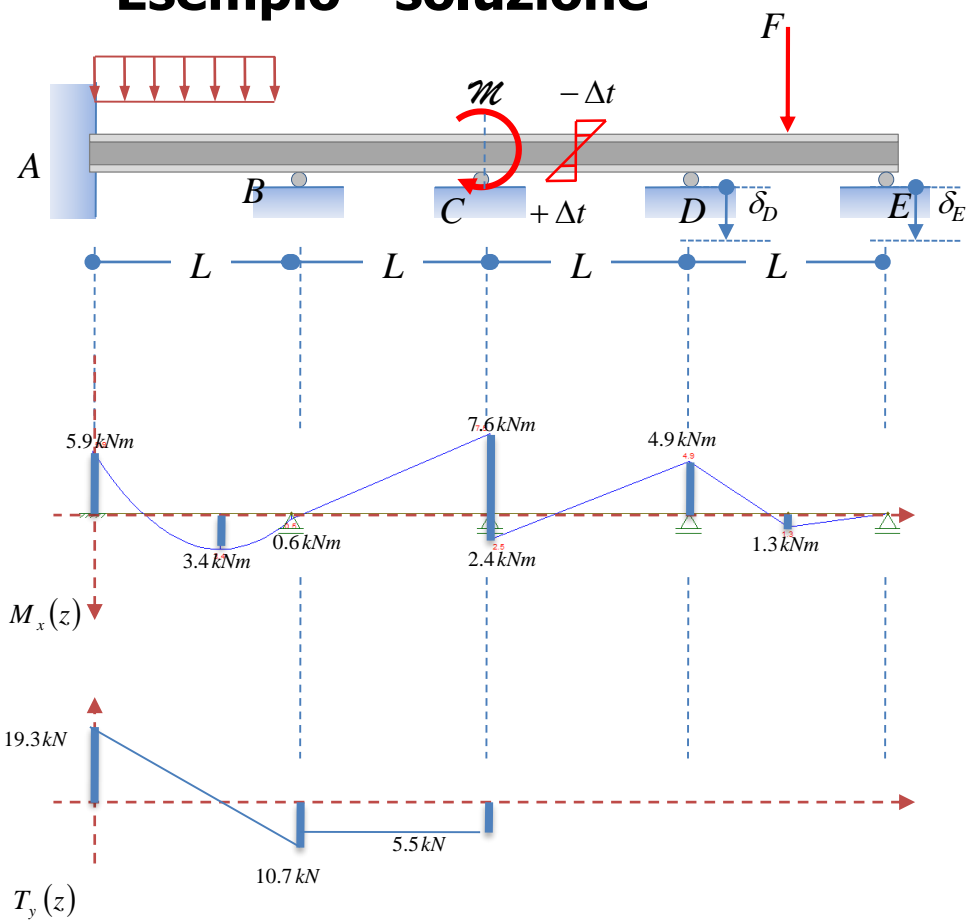
Tratto AB:



$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \rightarrow T_A - qL - T_{BA} = 0 \\ \sum M_{(A)} = 0 \rightarrow 5.9 \text{ kNm} + 0.6 \text{ kNm} - q \frac{L^2}{2} - T_{BA} L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_A = 19.3 \text{ kN} \\ T_{BA} = -10.7 \text{ kN} \end{cases}$$

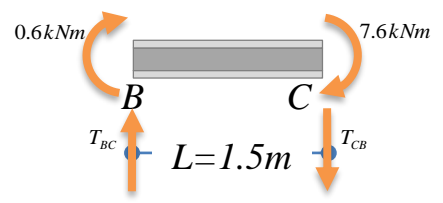


### Esempio - soluzione

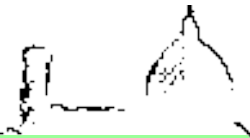


Si osservi che, noti i valori dei momenti flettenti di estremità del singolo tratto, è possibile determinare il diagramma del taglio attraverso semplici considerazioni di equilibrio come segue:

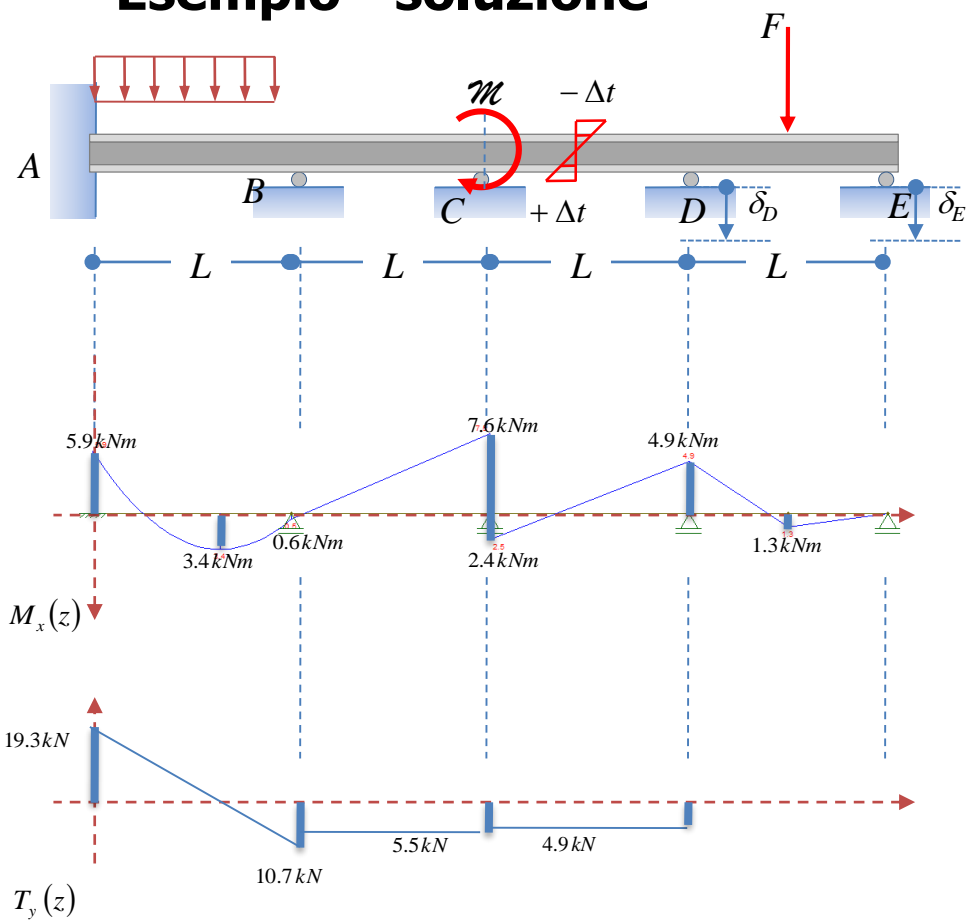
Tratto BC:



$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \rightarrow T_{BC} - T_{CB} = 0 \\ \sum M_{(B)} = 0 \rightarrow 0.6 kN + 7.6 kNm + T_{CB} L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{BC} = -5.5 kN \\ T_{CB} = -5.5 kN \end{cases}$$

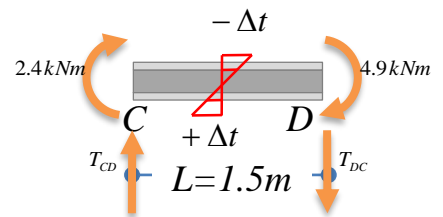


### Esempio - soluzione

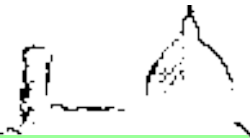


Si osservi che, noti i valori dei momenti flettenti di estremità del singolo tratto, è possibile determinare il diagramma del taglio attraverso semplici considerazioni di equilibrio come segue:

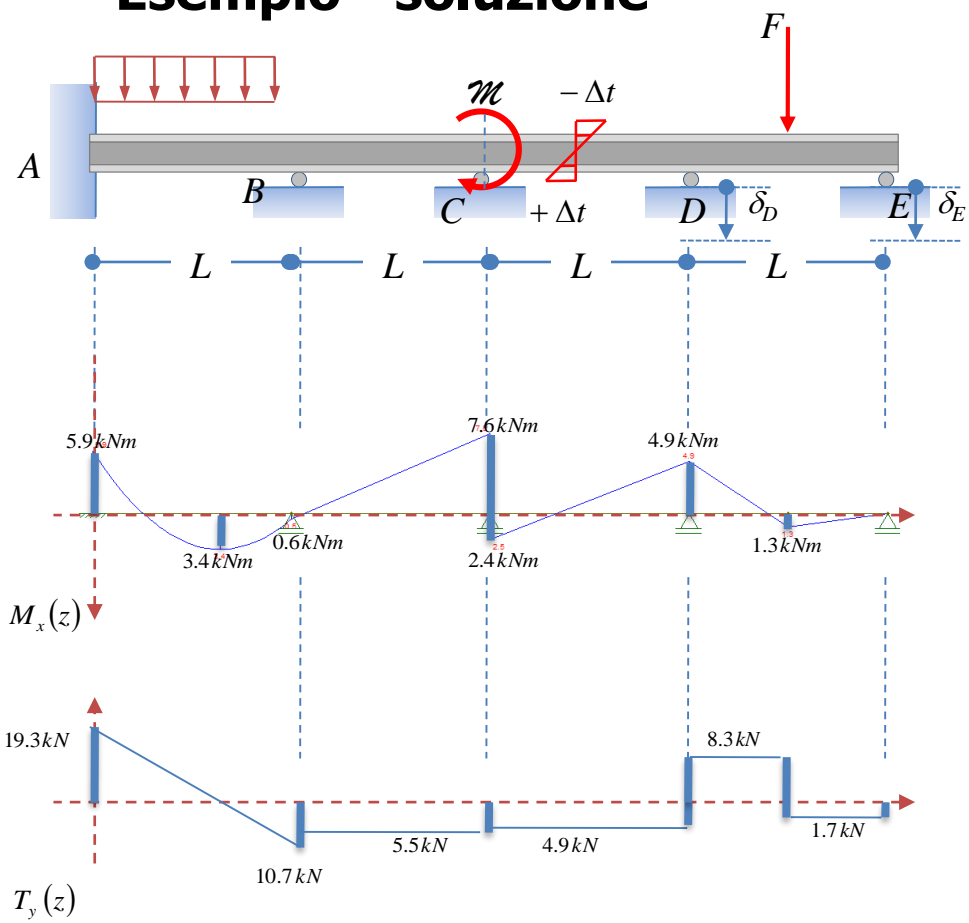
Tratto CD:



$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \rightarrow T_{CD} - T_{DC} = 0 \\ \sum M_{(B)} = 0 \rightarrow 2.4 \text{ kNm} + 4.9 \text{ kNm} + T_{DC} L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{CD} = -4.9 \text{ kN} \\ T_{CB} = -4.9 \text{ kN} \end{cases}$$

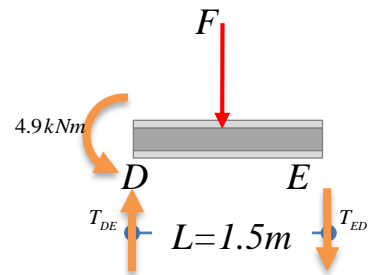


### Esempio - soluzione



Si osservi che, noti i valori dei momenti flettenti di estremità del singolo tratto, è possibile determinare il diagramma del taglio attraverso semplici considerazioni di equilibrio come segue:

Tratto DE:



$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \rightarrow T_{DE} - F - T_{ED} = 0 \\ \sum M_{(B)} = 0 \rightarrow 4.9\text{ kNm} - F L / 2 - T_{ED} L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{DE} = 8.3\text{ kN} \\ T_{ED} = -1.7\text{ kN} \end{cases}$$

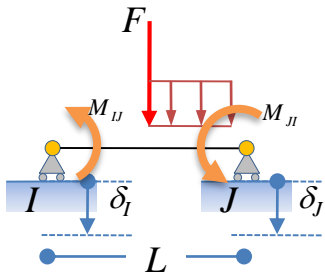


## Il metodo delle forze attraverso l'equazione dei tre momenti

Il procedimento risolutivo utilizzato per analizzare la struttura (quattro volte iperstatica) proposta nella presente lezione può essere schematizzato come segue:

data una struttura n-volte iperstatica costituita da travi coassiali caricate trasversalmente,

1. si "inseriscono" delle sconessioni in corrispondenza degli appoggi intermedi e degli incastri di estremità esplicitando i relativi valori del momento flettente;
2. si scrivono esplicitamente le equazioni di equilibrio alla rotazione dei nodi di cui al punto precedente e le equazioni di congruenza e compatibilità con i vincoli presenti nel sistema iperstatico di partenza affinché il sistema in esame sia equivalente a quello da analizzare;
3. si esplicitano i legami tra le rotazioni degli estremi della singola travata e tutte le azioni (esterne e sollecitazioni iperstatiche) presenti su di essa. Per la generica trave  $IJ$  tali relazioni possono essere sempre espresse nella seguente forma:



$$\varphi_{IJ} = M_{IJ} \frac{L}{3EI_x} - M_{JI} \frac{L}{6EI_x} + \frac{\delta_I - \delta_J}{L} + \phi_{IJ}$$

$$\varphi_{JI} = M_{JI} \frac{L}{3EI_x} - M_{IJ} \frac{L}{6EI_x} + \frac{\delta_I - \delta_J}{L} + \phi_{JI}$$

I termini  $E$ ,  $I_x$  ed  $L$  sono ovviamente quelli relativi alla trave  $IJ$  in esame. Le rotazioni  $\phi_{IJ}$  e  $\phi_{JI}$  rappresentano i contributi dovuti alle azioni esterne (positivi se concordi con i momenti indicati in figura).

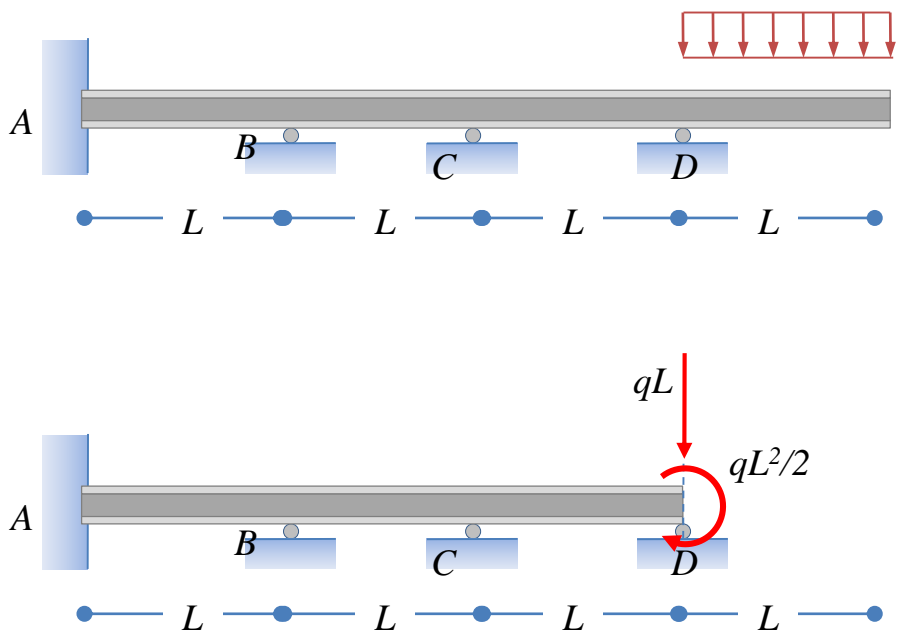


## **Il metodo delle forze attraverso l'equazione dei tre momenti**

Sostituendo le equazioni di legame nelle equazioni di congruenza e mettendo queste a sistema con le equazioni di equilibrio si ottiene un sistema da cui è possibile determinare le reazioni iperstatiche di cui al punto 1 del precedente schema. Note tali reazioni è possibile determinare le sollecitazioni e gli spostamenti delle sezioni trasversali della struttura.



## Osservazione: sbalzo di estremità



Se nella trave continua fosse presente uno sbalzo di estremità, al fine di utilizzare agevolmente l'equazione dei tre momenti, il suo "contributo" può essere considerato utilizzando il metodo descritto nella figura a fianco.

← La forza verticale e il momento applicato in D, equivalente al carico distribuito presente nello sbalzo, rappresentano le caratteristiche della sollecitazione presenti nella sezione immediatamente a destra di D.





*Università degli Studi di Firenze*

Corso di Laurea: Architettura (quinquennale)  
Insegnamento: Scienza delle Costruzioni  
Docente: Mario Fagone  
Argomento: Analisi di telai iperstatici:  
metodo delle forze



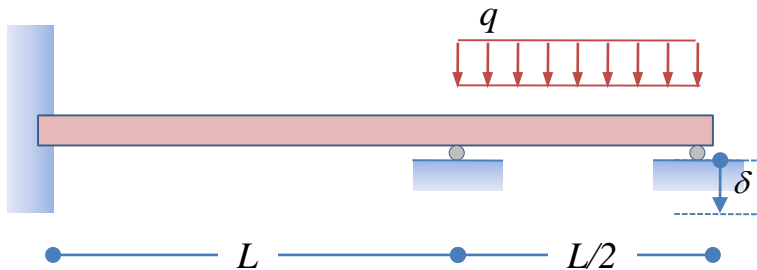
**Facoltà di Architettura**

# Telai piani

“Equazione dei tre momenti”:  
sistemi a nodi fissi  
Esercizi proposti

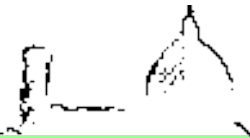


## Esercizio

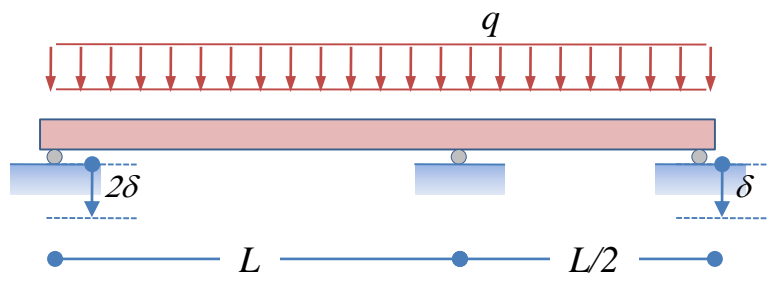


La struttura schematizzata in figura ha sezione costante ed è costituita in materiale omogeneo.

Si risolva la struttura utilizzando il metodo dell'equazione dei tre momenti.



## Esercizio

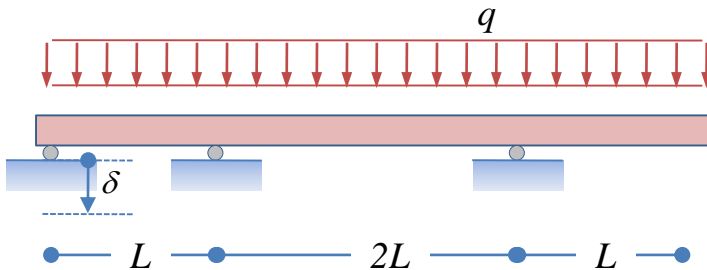


La struttura schematizzata in figura ha sezione costante ed è costituita in materiale omogeneo.

Si risolva la struttura utilizzando il metodo dell'equazione dei tre momenti.



## Esercizio



La struttura schematizzata in figura ha sezione costante ed è costituita in materiale omogeneo.

Si risolva la struttura utilizzando il metodo dell'equazione dei tre momenti.