

Telai piani



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Scuola di Architettura
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.



Trave continua su più appoggi:
equazione dei tre momenti



Sommario

Attraverso il precedente esempio, è stata descritta una procedura di risoluzione di sistemi iperstatici inflessi basata sulla definizione di un opportuno sistema isostatico equivalente e sulla imposizione di equazioni di congruenza che stabiliscono l'equivalenza tra tale sistema isostatico ed il sistema strutturale dato. Tale approccio è inquadrabile nei così detti "metodi delle forze" in quanto considera come variabili primarie del problema strutturale alcune forze (azioni "iperstatiche") le quali vengono determinate attraverso opportune equazioni di congruenza (e di equilibrio).

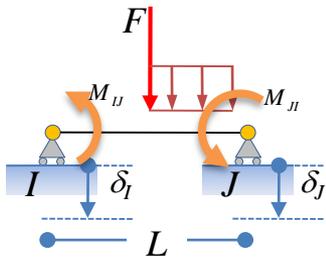
In particolare il procedimento risolutivo descritto nella precedente lezione si basa sulla applicazione della così detta "equazione dei tre momenti" e può essere schematicamente descritto come riportato nella prossima slide.



Il metodo delle forze attraverso l'equazione dei tre momenti

Data una struttura n-volte iperstatica costituita da travi coassiali caricate trasversalmente,

1. si "inseriscono" delle sconnessioni in corrispondenza degli appoggi intermedi e degli incastri di estremità esplicitando i relativi valori del momento flettente;
2. si scrivono esplicitamente le equazioni di equilibrio alla rotazione dei nodi di cui al punto precedente e le equazioni di congruenza e compatibilità con i vincoli presenti nel sistema iperstatico di partenza affinché il sistema in esame sia equivalente a quello da analizzare;
3. si esplicitano i legami tra le rotazioni degli estremi della singola trave e tutte le azioni (esterne e sollecitazioni iperstatiche) presenti su di essa. Per la generica trave IJ tali relazioni possono essere sempre espresse nella seguente forma:



$$\varphi_{IJ} = M_{IJ} \frac{L}{3EI_x} - M_{JI} \frac{L}{6EI_x} + \frac{\delta_I - \delta_J}{L} + \phi_{IJ}$$

$$\varphi_{JI} = M_{JI} \frac{L}{3EI_x} - M_{IJ} \frac{L}{6EI_x} + \frac{\delta_I - \delta_J}{L} + \phi_{JI}$$

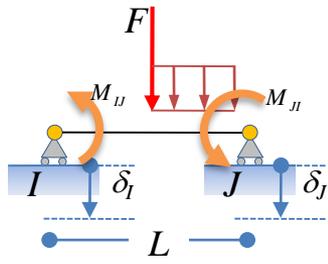
I termini E , I_x ed L sono ovviamente quelli relativi alla trave IJ in esame. Le rotazioni ϕ_{IJ} e ϕ_{JI} rappresentano i contributi dovuti alle azioni esterne (positivi se concordi con i momenti indicati in figura).



Il metodo delle forze attraverso l'equazione dei tre momenti

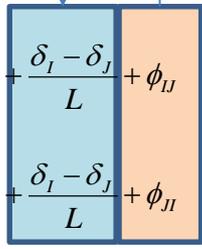
Contributo alla rotazione dovuto a (eventuali) cedimenti vincolari

Contributo alla rotazione dovuto alle (eventuali) rotazioni impresse agli estremi della trave (incastri con cedimenti rotazionali)



$$\varphi_{II} = M_{II} \frac{L}{3EI_x} - M_{JI} \frac{L}{6EI_x} + \frac{\delta_I - \delta_J}{L} + \phi_{II}$$

$$\varphi_{JI} = M_{JI} \frac{L}{3EI_x} - M_{II} \frac{L}{6EI_x} + \frac{\delta_I - \delta_J}{L} + \phi_{JI}$$





Il metodo delle forze attraverso l'equazione dei tre momenti

Sostituendo le equazioni di legame nelle equazioni di congruenza e mettendo queste a sistema con le equazioni di equilibrio si ottiene un sistema da cui è possibile determinare le reazioni iperstatiche di cui al punto 1 del precedente schema. Note tali reazioni è possibile determinare le sollecitazioni e gli spostamenti delle sezioni trasversali della struttura.

Il procedimento descritto nella precedente slide è generalizzabile per l'analisi dei telai piani.



Università degli Studi di Firenze

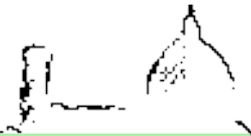
Corso di Laurea: Architettura (quinquennale)
Insegnamento: Scienza delle Costruzioni
Docente: Mario Fagone
Argomento: Analisi di telai iperstatici:
metodo delle forze



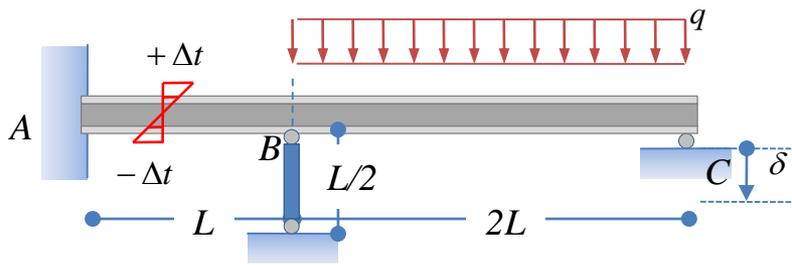
Facoltà di Architettura

Sommario

Di seguito, applicheremo il procedimento descritto nelle precedenti slide all'analisi di un sistema iperstatico in cui sono presenti vincoli elasticamente cedevoli.



Esempio



- $L = 1.5 \text{ m}$
- $q = 5.0 \text{ kN/m}$
- $\Delta t = 20^\circ\text{C}$
- $\delta = 0.5 \text{ mm}$

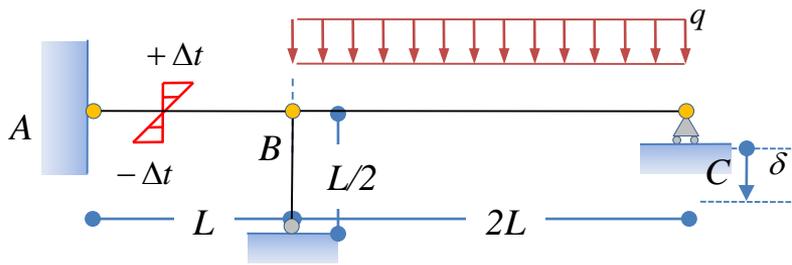
La trave in acciaio schematizzata in figura ha sezione trasversale IPE 120 ($E=210\text{GPa}$, $I_x=318,0\text{cm}^4$, $\alpha=11.7\times 10^{-6}^\circ\text{C}^{-1}$).

La sezione in B appoggia su un'asta anch'essa in acciaio avente sezione trasversale circolare di diametro pari a 20mm.

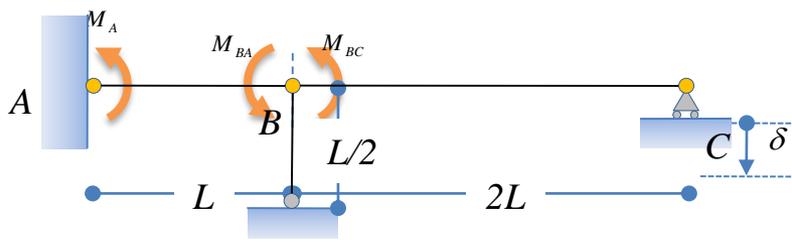
Si risolva la struttura e si verifichi che la massima tensione normale dovuta alla flessione sia inferiore a 160 MPa.



Esempio - soluzione



(+)

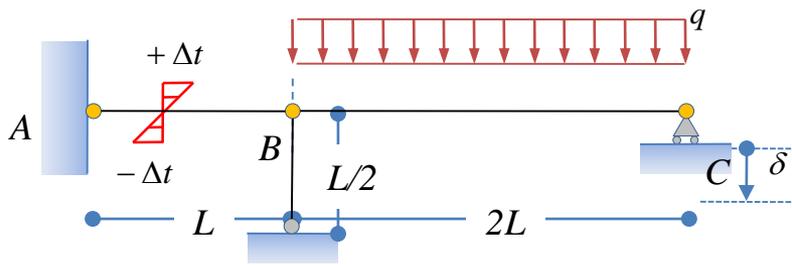


1. "Inseriamo" delle sconnessioni in corrispondenza degli appoggi intermedi e degli incastrati di estremità esplicitando i relativi valori del momento flettente;

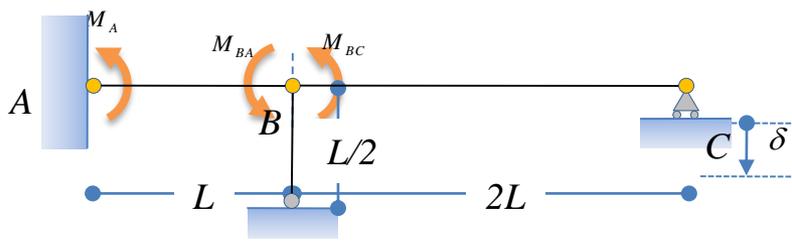
Si osservi che, anche in questo caso, la struttura ottenuta "introducendo" delle cerniere in corrispondenza dei nodi della struttura di partenza è isostatica. Ciononostante, gli spostamenti verticali di alcuni dei nodi della struttura non sono noti a-priori. Lo spostamento verticale del nodo B è infatti proporzionale alla reazione della biella (ossia allo sforzo normale in essa presente).



Esempio - soluzione



(+)

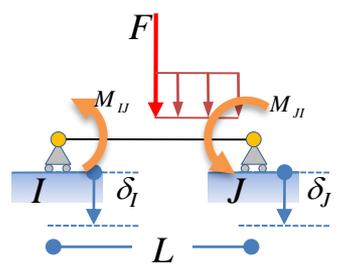


$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_{BA} \\ M_{BC} \\ v_B \end{bmatrix}$$

4 incognite

1. "Inseriamo" delle sconnessioni in corrispondenza degli appoggi intermedi e degli incastri di estremità esplicitando i relativi valori del momento flettente;

Tale spostamento (v_B ip. positivo se verso il basso) è pertanto una ulteriore incognita del problema in quanto la sua conoscenza è necessaria al fine della valutazione delle rotazioni delle sezioni di estremità delle aste della struttura schematizzata in figura attraverso l'equazione "dei tre momenti".

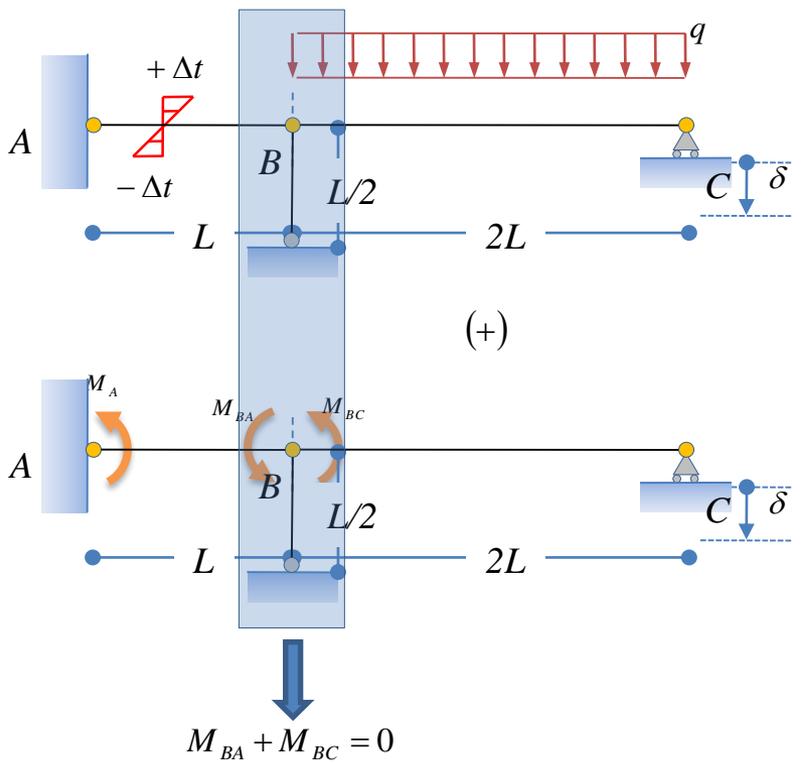


$$\varphi_{IJ} = M_{IJ} \frac{L}{3EI_x} - M_{JI} \frac{L}{6EI_x} + \frac{\delta_I - \delta_J}{L} + \phi_{IJ}$$

$$\varphi_{JI} = M_{JI} \frac{L}{3EI_x} - M_{IJ} \frac{L}{6EI_x} + \frac{\delta_I - \delta_J}{L} + \phi_{JI}$$



Esempio - soluzione



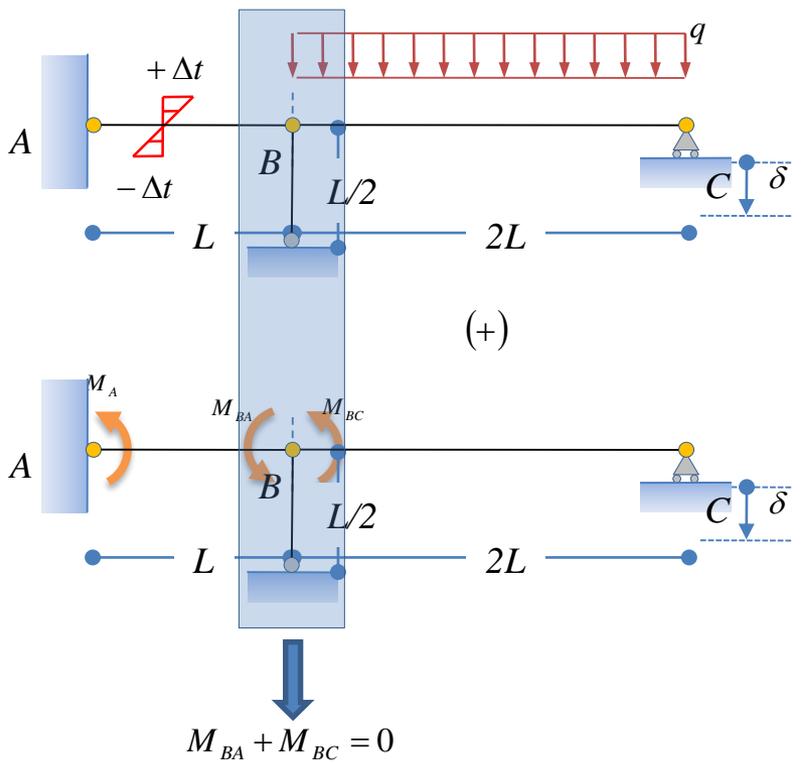
2. si scrivono esplicitamente le equazioni di equilibrio alla rotazione dei nodi di cui al punto precedente e le equazioni di congruenza e compatibilità con i vincoli presenti nel sistema iperstatico di partenza affinché il sistema in esame sia equivalente a quello da analizzare;

È possibile scrivere direttamente

- 1 equazione di equilibrio (alla rotazione del nodo B);



Esempio - soluzione



2. si scrivono esplicitamente le equazioni di equilibrio alla rotazione dei nodi di cui al punto precedente e le equazioni di congruenza e compatibilità con i vincoli presenti nel sistema iperstatico di partenza affinché il sistema in esame sia equivalente a quello da analizzare;

È possibile scrivere direttamente

- 1 equazione di equilibrio (alla rotazione del nodo B);
- 1 equazione di congruenza in corrispondenza del nodo intermedio B

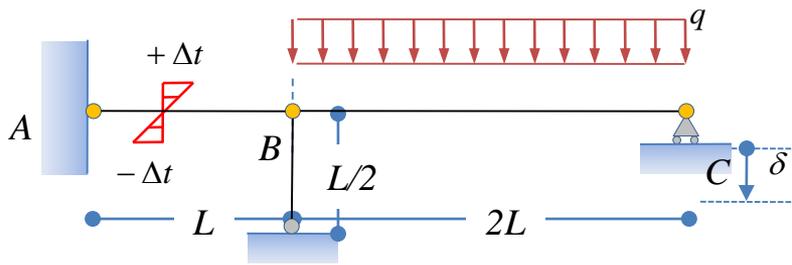
$$\varphi_{BA} = \varphi_{BC}$$

- 1 equazione di compatibilità in corrispondenza del nodo A .

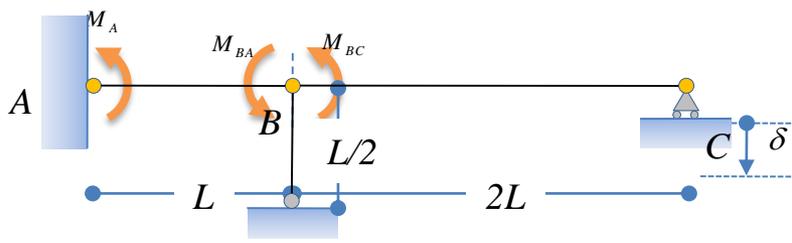
$$\varphi_A = 0$$



Esempio - soluzione



(+)



$$\begin{cases} M_{BA} + M_{BC} = 0 \\ \varphi_{BA} = \varphi_{BC} \\ \varphi_A = 0 \end{cases}$$

3. si esplicitano i legami tra le rotazioni degli estremi della singola travata e tutte le azioni (esterne e sollecitazioni iperstatiche) presenti su di essa;

Utilizzando l'equazione dei tre momenti si ha

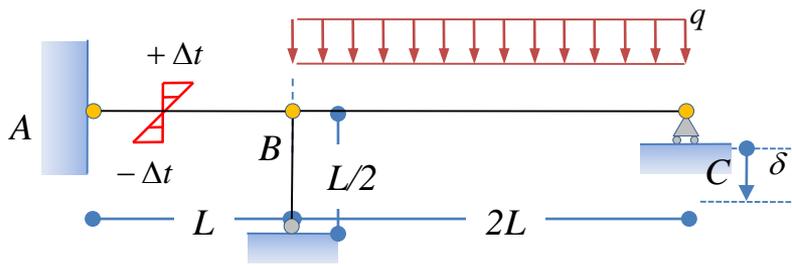
$$\varphi_A = M_A \frac{L}{3EI_x} - M_{BA} \frac{L}{6EI_x} - \frac{v_B}{L} + \frac{\alpha \Delta t}{h} L$$

$$\varphi_{BA} = M_{BA} \frac{L}{3EI_x} - M_A \frac{L}{6EI_x} - \frac{v_B}{L} - \frac{\alpha \Delta t}{h} L$$

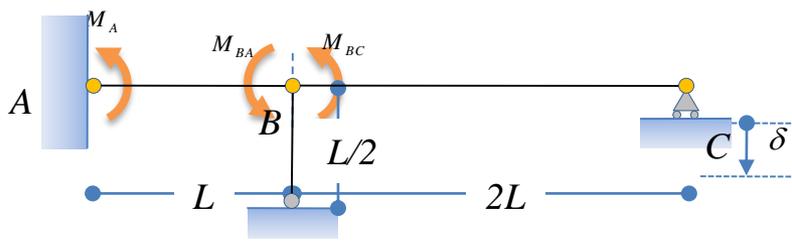
$$\varphi_{BC} = M_{BC} \frac{(2L)}{3EI_x} + \frac{v_B - \delta}{(2L)} - \frac{q(2L)^3}{24EI_x}$$



Esempio - soluzione



(+)



$$\begin{cases} M_{BA} + M_{BC} = 0 \\ \varphi_{BA} = \varphi_{BC} \\ \varphi_A = 0 \end{cases}$$



3. si esplicitano i legami tra le rotazioni degli estremi della singola travata e tutte le azioni (esterne e sollecitazioni iperstatiche) presenti su di essa;

Utilizzando l'equazione dei tre momenti si ha

$$\varphi_A = M_A \frac{L}{3EI_x} - M_{BA} \frac{L}{6EI_x} - \frac{v_B}{L} + \frac{\alpha \Delta t}{h} L$$

$$\varphi_{BA} = M_{BA} \frac{L}{3EI_x} - M_A \frac{L}{6EI_x} - \frac{v_B}{L} - \frac{\alpha \Delta t}{h} L$$

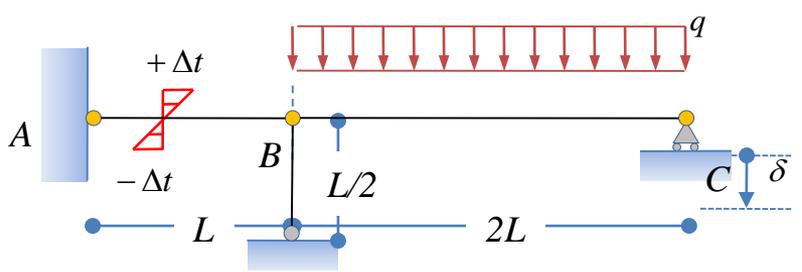
$$\varphi_{BC} = M_{BC} \frac{(2L)}{3EI_x} + \frac{v_B - \delta}{(2L)} - \frac{q(2L)^3}{24EI_x}$$

Sostituendo le precedenti espressioni nelle equazioni di equilibrio e di congruenza e compatibilità si ha:

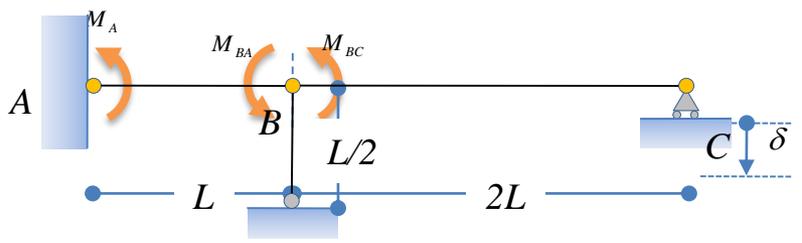
$$\begin{cases} M_{BA} + M_{BC} = 0 \\ M_{BA} \frac{L}{3EI_x} - M_A \frac{L}{6EI_x} - \frac{v_B}{L} - \frac{\alpha \Delta t}{h} L = M_{BC} \frac{(2L)}{3EI_x} + \frac{v_B - \delta}{(2L)} - \frac{q(2L)^3}{24EI_x} \\ M_A \frac{L}{3EI_x} - M_{BA} \frac{L}{6EI_x} - \frac{v_B}{L} + \frac{\alpha \Delta t}{h} L = 0 \end{cases}$$



Esempio - soluzione



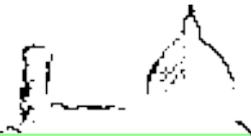
(+)



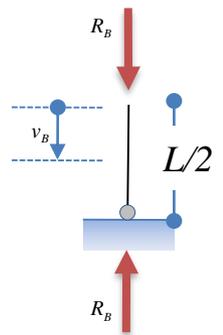
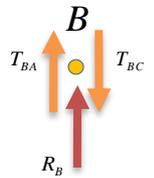
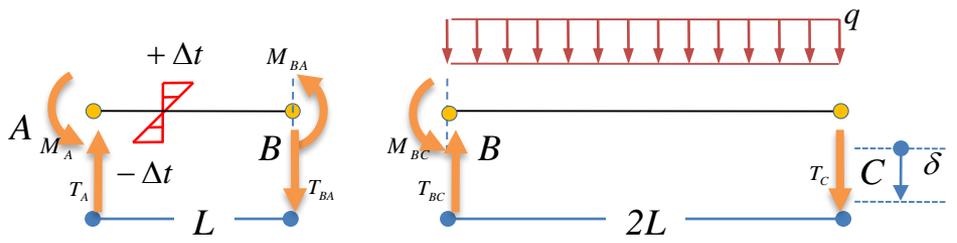
$$\begin{cases} M_{BA} + M_{BC} = 0 \\ M_{BA} \frac{L}{3EI_x} - M_A \frac{L}{6EI_x} - \frac{v_B}{L} - \frac{\alpha \Delta t}{h} L = M_{BC} \frac{(2L)}{3EI_x} + \frac{v_B - \delta}{(2L)} - \frac{q(2L)^3}{24EI_x} \\ M_A \frac{L}{3EI_x} - M_{BA} \frac{L}{6EI_x} - \frac{v_B}{L} + \frac{\alpha \Delta t}{h} L = 0 \end{cases}$$

Il precedente è un sistema di tre equazioni nelle quattro incognite indicate nelle precedenti slide. Al fine di determinare la soluzione del problema strutturale è necessario considerare una ulteriore equazione. Si osservi che, rispetto al problema considerato nella precedente lezione, nell'esempio in esame è presente

una ulteriore incognita cinematica, ossia lo spostamento verticale del nodo B. L'equazione che può essere aggiunta alle precedenti è una equazione di equilibrio "duale" a tale ulteriore incognita, ossia una equazione di equilibrio alla traslazione verticale del nodo B.



Esempio - soluzione



Indicando con R_B la reazione verticale della biella B (ip. verso l'alto) e con A_B l'area della sua sezione trasversale, lo spostamento verticale della sezione B (ip. positiva se verso il basso) può essere calcolato come segue:

$$v_B = \frac{R_B(L/2)}{E A_B} \quad (1)$$

Dall'equilibrio alla traslazione verticale della sezione B si ha:

$$T_{BA} + R_B - T_{BC} = 0 \rightarrow R_B = T_{BC} - T_{BA} \quad (2)$$

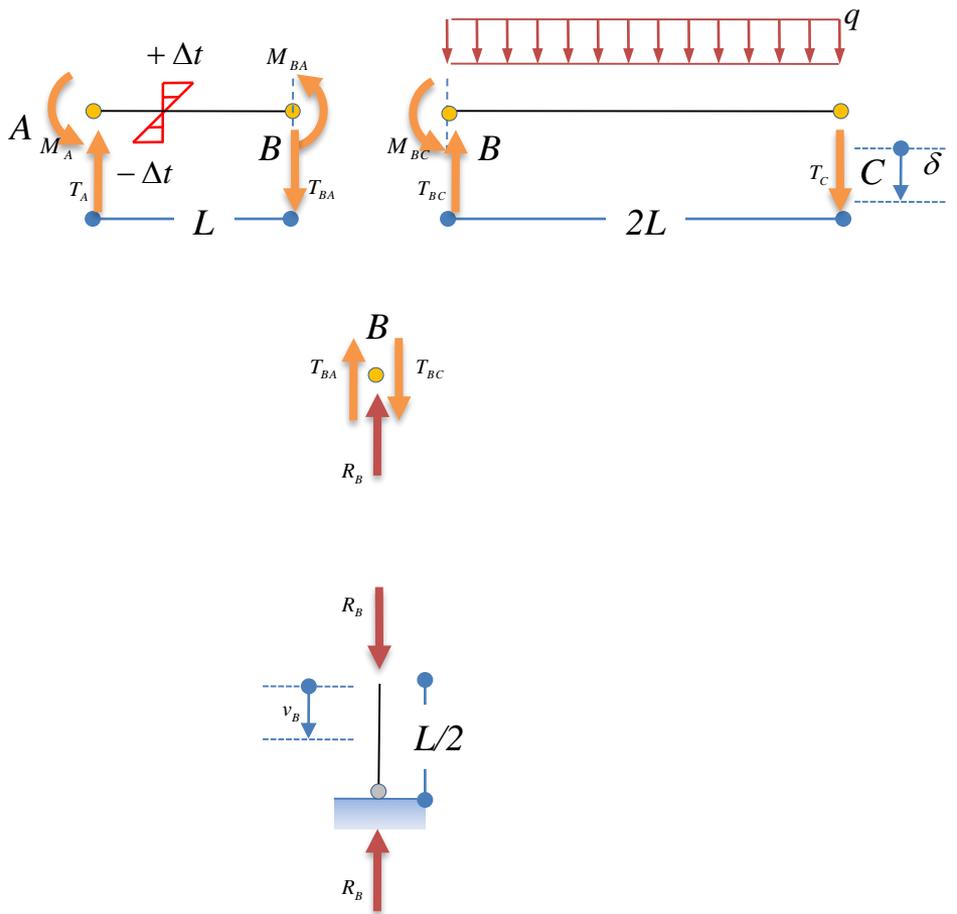
Dall'equilibrio alla rotazione del tratto AB attorno al nodo A e del tratto BC attorno al nodo C si ha rispettivamente:

$$M_A + M_{BA} - T_{BA}L = 0 \rightarrow T_{BA} = \frac{M_A + M_{BA}}{L} \quad (3)$$

$$M_{BC} + \frac{q(2L)^2}{2} - T_{BC}2L = 0 \rightarrow T_{BC} = \frac{M_{BC} + 2qL^2}{2L}$$



Esempio - soluzione



Sostituendo la (3) nella (2) si ha

$$R_B = \frac{M_{BC} + 2qL^2}{2L} - \frac{M_A + M_{BA}}{L}$$

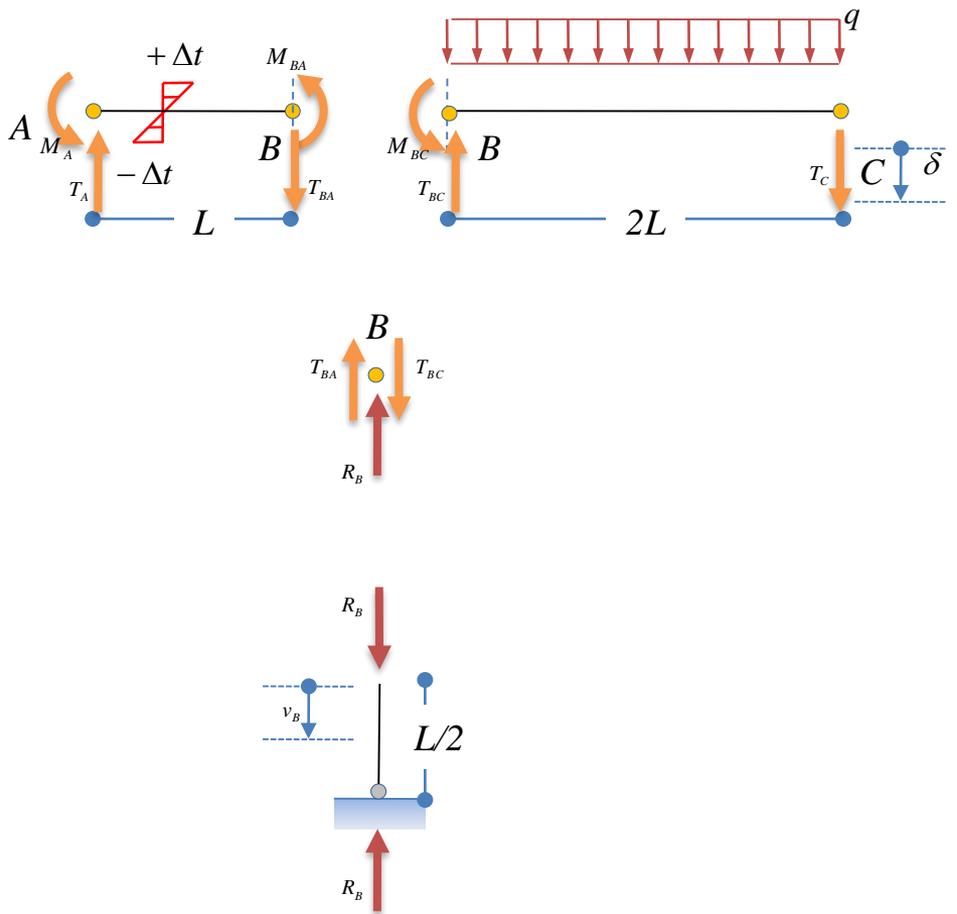
la quale, sostituita nella (1), fornisce

$$v_B = \left(\frac{M_{BC} + 2qL^2}{2L} - \frac{M_A + M_{BA}}{L} \right) \frac{L}{2EA_B}$$

La precedente equazione rappresenta una relazione tra le incognite del problema e pertanto può essere aggiunta alle equazioni di equilibrio e di congruenza e compatibilità determinate precedentemente.



Esempio - soluzione

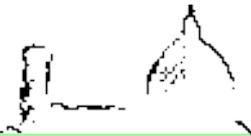


Complessivamente si ha allora il seguente sistema di equazioni

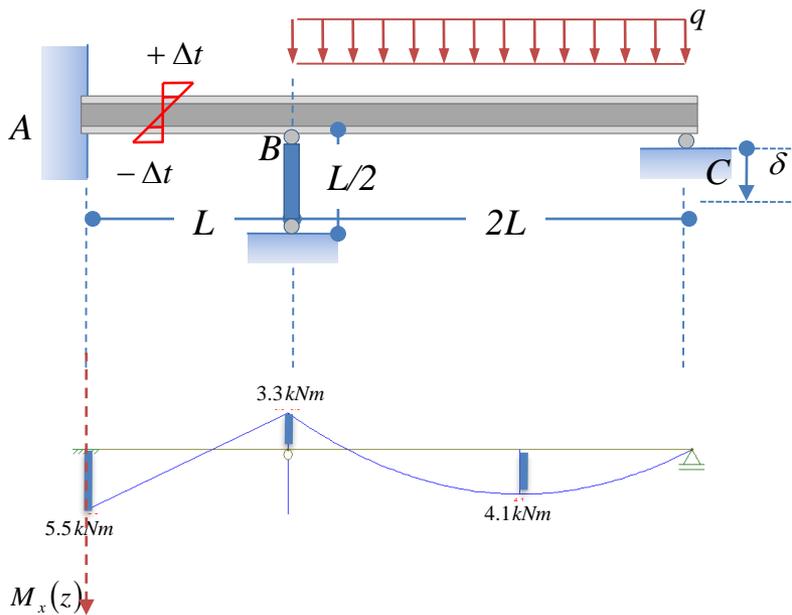
$$\begin{cases} M_{BA} + M_{BC} = 0 \\ M_{BA} \frac{L}{3EI_x} - M_A \frac{L}{6EI_x} - \frac{v_B}{L} - \frac{\alpha \Delta t}{h} L = M_{BC} \frac{(2L)}{3EI_x} + \frac{v_B - \delta}{(2L)} - \frac{q(2L)^3}{24EI_x} \\ M_A \frac{L}{3EI_x} - M_{BA} \frac{L}{6EI_x} - \frac{v_B}{L} + \frac{\alpha \Delta t}{h} L = 0 \\ v_B = \left(\frac{M_{BC} + 2qL^2}{2L} - \frac{M_A + M_{BA}}{L} \right) \frac{L}{2EA_B} \end{cases}$$

la cui soluzione è la seguente:

$$\begin{aligned} M_A &\cong -5.5 \text{ kNm} \\ M_{BA} &\cong -3.3 \text{ kNm} \\ M_{BC} &\cong 3.3 \text{ kNm} \\ v_B &\cong 0.17 \text{ mm} \end{aligned}$$



Esempio - soluzione



Il diagramma del momento presente nella struttura è quello schematizzato a fianco.

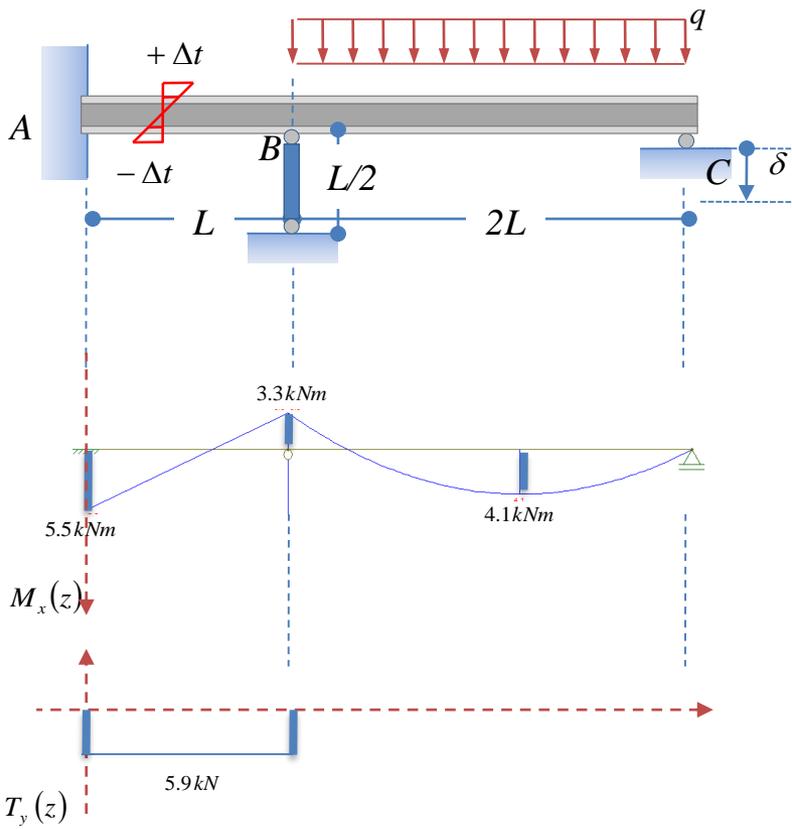
La sezione maggiormente sollecitata a flessione è A, nella quale si ha il seguente valore di tensione normale dovuta alla flessione:

$$\sigma_{z \max} = \frac{M}{I_x} \frac{h}{2} \cong 103.77 \text{ MPa}$$

La verifica di resistenza risulta quindi soddisfatta.

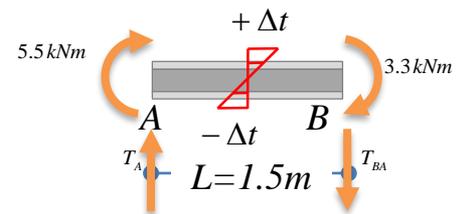


Esempio - soluzione



Noti i valori dei momenti flettenti di estremità del singolo tratto, è possibile determinare il diagramma del taglio attraverso semplici considerazioni di equilibrio come segue:

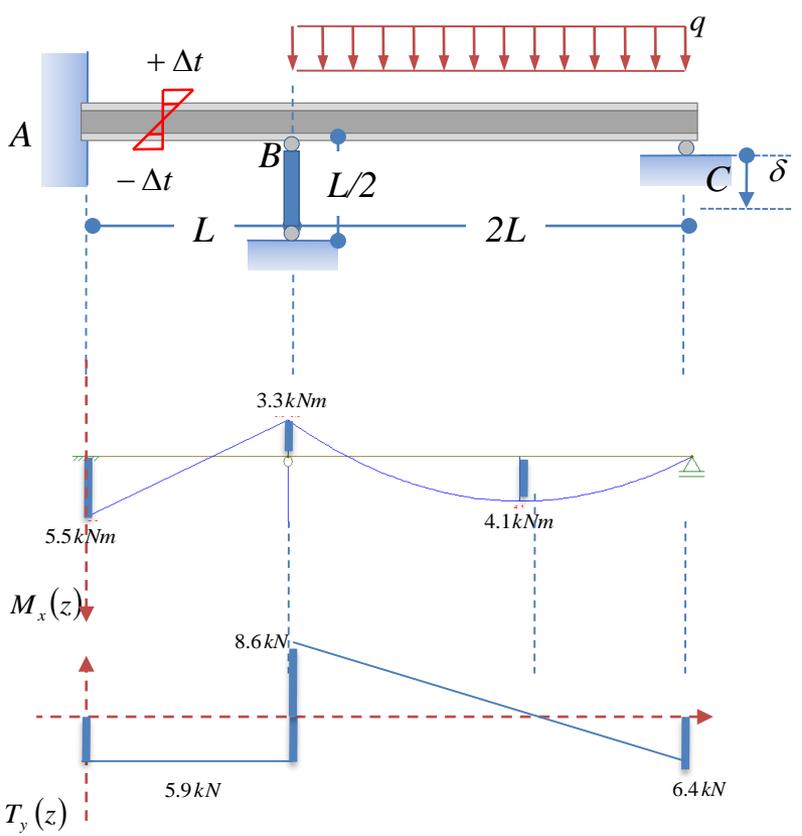
Tratto AB:



$$\begin{cases} \sum M_{(A)} = 0 \rightarrow T_{BA} L + 5.5 + 3.3 = 0 \\ \sum M_{(B)} = 0 \rightarrow T_A L + 5.5 + 3.3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_A = -5.9 \text{ kN} \\ T_{BA} = -5.9 \text{ kN} \end{cases}$$

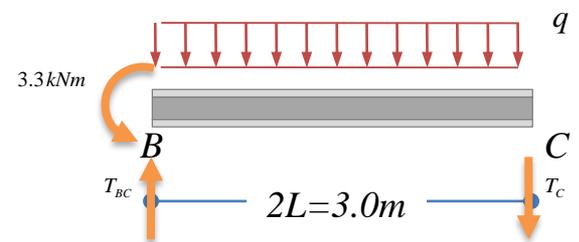


Esempio - soluzione



Noti i valori dei momenti flettenti di estremità del singolo tratto, è possibile determinare il diagramma del taglio attraverso semplici considerazioni di equilibrio come segue:

Tratto BC:



$$\begin{cases} \sum M_{(B)} = 0 \rightarrow T_C \cdot 2L + q \cdot 2L^2 - 3.3 \text{ kNm} = 0 \\ \sum M_{(C)} = 0 \rightarrow 3.3 \text{ kN} + q \cdot 2L^2 - T_{BC} \cdot 2L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_C = -6.4 \text{ kN} \\ T_{BC} = 8.6 \text{ kN} \end{cases}$$



Università degli Studi di Firenze

Corso di Laurea: Architettura (quinquennale)
Insegnamento: Scienza delle Costruzioni
Docente: Mario Fagone
Argomento: Analisi di telai iperstatici:
metodo delle forze



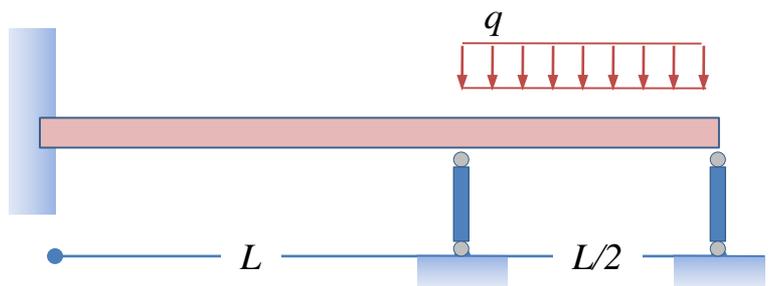
Facoltà di Architettura

Telai piani

“Equazione dei tre momenti”:
vincoli elasticamente cedevoli
Esercizi proposti



Esercizio



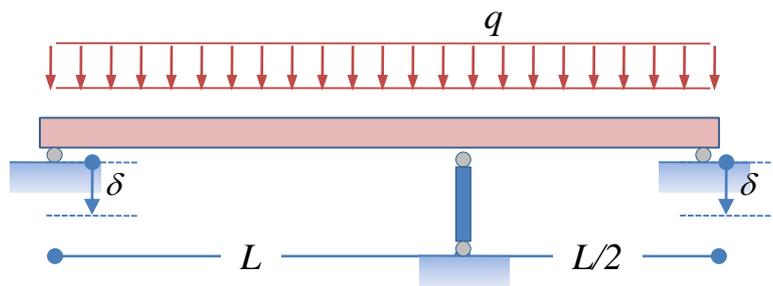
La struttura schematizzata in figura ha sezione costante ed è costituita in materiale omogeneo.

Si risolva la struttura utilizzando il metodo dell'equazione dei tre momenti descritta nella sessione teorica della presente lezione.

Si ipotizzino dei valori plausibili per i materiali e per le dimensioni della struttura.



Esercizio



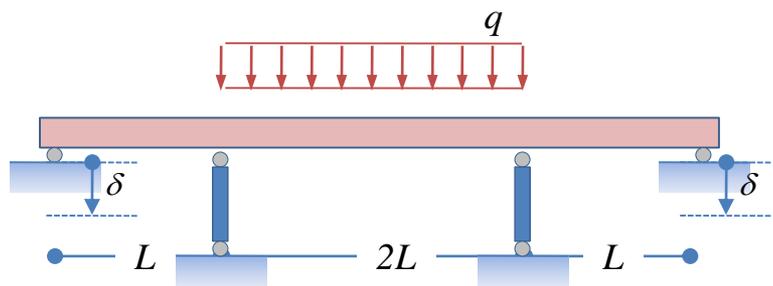
La struttura schematizzata in figura ha sezione costante ed è costituita in materiale omogeneo.

Si risolva la struttura utilizzando il metodo dell'equazione dei tre momenti descritta nella sessione teorica della presente lezione.

Si ipotizzino dei valori plausibili per i materiali e per le dimensioni della struttura.



Esercizio



La struttura schematizzata in figura ha sezione costante ed è costituita in materiale omogeneo.

Si risolva la struttura utilizzando il metodo dell'equazione dei tre momenti descritta nella sessione teorica della presente lezione.

Si ipotizzino dei valori plausibili per i materiali e per le dimensioni della struttura.