Telai piani

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI FIRENZE

Scuola di Architettura
Corso di Laurea Magistrale quinquennale c.u.

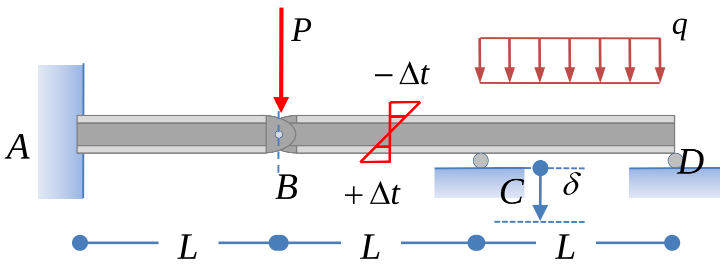
Trave continua su più appoggi: equazione dei tre momenti sistemi a nodi spostabili

Sommario

Nelle precedenti due lezioni è stato descritto un metodo di risoluzione di strutture iperstatiche basato sulla definizione di un particolare sistema strutturale isostatico equivalente a quello di partenza e sulla applicazione della così detta "equazione dei tre momenti". Il procedimento risolutivo prevede l'imposizione di equazioni di congruenza e di compatibilità (duali alle "sconnessioni" idealmente introdotte nella struttura esplicitando la sollecitazione flessionale interna). Nella precedente lezione si è visto che, nel caso in cui alcuni dei vincoli della struttura siano elasticamente cedevoli, al fine di risolvere la struttura attraverso l'approccio proposto, è necessario imporre anche delle equazioni di equilibrio "duali" al cedimento elastico.

Per gli esempi trattati nelle due precedenti lezioni, le strutture "ausiliarie" (ossia quelle ottenute "introducendo" delle sconnessioni flessionali in corrispondenza dei nodi della struttura di partenza) erano isostatiche. Nella precedente lezione analizzeremo una struttura alla quale corrisponde un sistema "ausiliario" labile. Strutture siffatte si dicono "a nodi spostabili".

Esempio



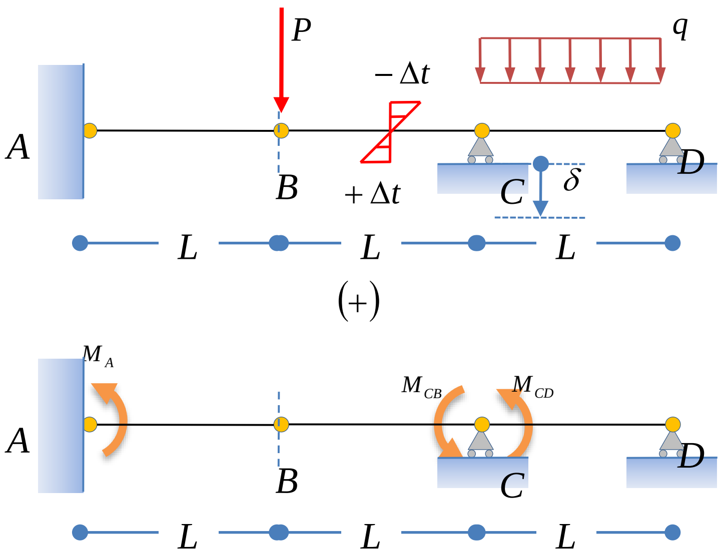
La trave in acciaio schematizzata in figura ha sezione trasversale IPE 140 ($E=210GPa$, $I_x=541{,}0cm^4$, $\alpha=11.7\times10^{-6}°C^{-1}$).

Si risolvi la struttura e si verifichi che la massima tensione normale dovuta alla flessione sia inferiore a $160\ MPa$.

$L = 2.0\ m$
$q = 10.0\ kN/m$
$P = 5\ kN$
$\Delta t = 10°C$
$\delta = 0.2\ mm$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio - soluzione



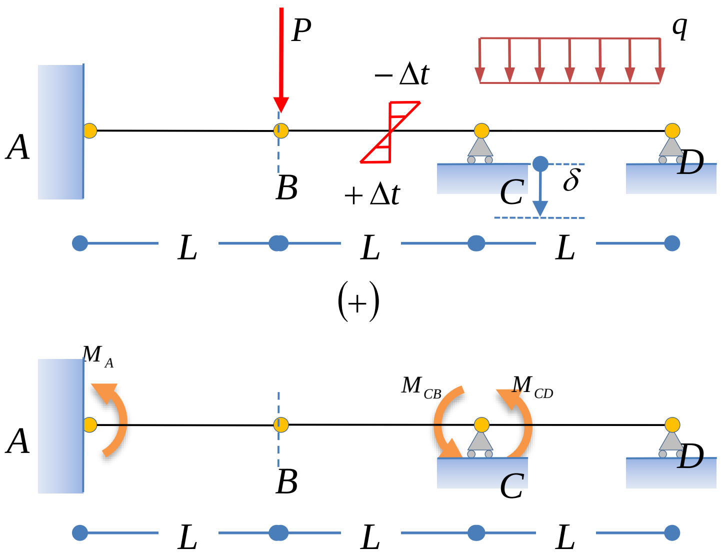
1. "Inseriamo" delle sconnessioni in corrispondenza degli appoggi intermedi e degli incastri di estremità esplicitando i relativi valori del momento flettente;

Si osservi che, a differenza quanto si è visto nelle precedenti lezioni, in questo caso la struttura "ausiliaria" è labile. È infatti possibile un moto rigido nel quale il nodo B trasla verticalmente.

Visto che la struttura ausiliaria è una volta labile, il sistema strutturale di partenza viene detto "ad un nodo spostabile".

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio - soluzione

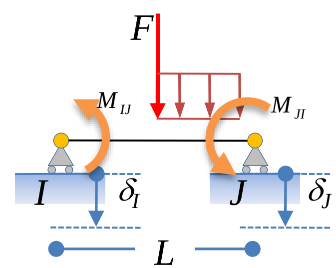


1. "Inseriamo" delle sconnessioni in corrispondenza degli appoggi intermedi e degli incastri di estremità esplicitando i relativi valori del momento flettente;

Tale spostamento (v_B ip. positivo se verso il basso) è pertanto una ulteriore incognita del problema in quanto la sua conoscenza è necessaria al fine della valutazione delle rotazioni delle sezioni di estremità delle aste della struttura schematizzata in figura attraverso l'equazione "dei tre momenti".

$$\begin{bmatrix} M_A \\ M_{CB} \\ M_{CD} \\ v_B \end{bmatrix}$$

4 incognite

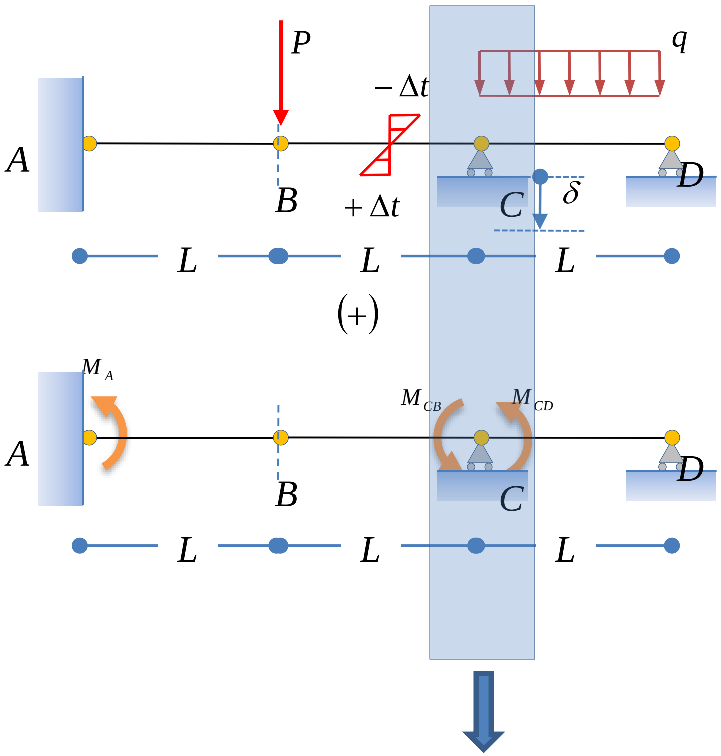


$$\varphi_{IJ} = M_{IJ}\frac{L}{3E\,I_x} - M_{JI}\frac{L}{6E\,I_x} + \frac{\delta_I - \delta_J}{L} + \phi_{IJ}$$

$$\varphi_{JI} = M_{JI}\frac{L}{3E\,I_x} - M_{IJ}\frac{L}{6E\,I_x} + \frac{\delta_I - \delta_J}{L} + \phi_{JI}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio - soluzione



$$M_{CB} + M_{CD} = 0$$

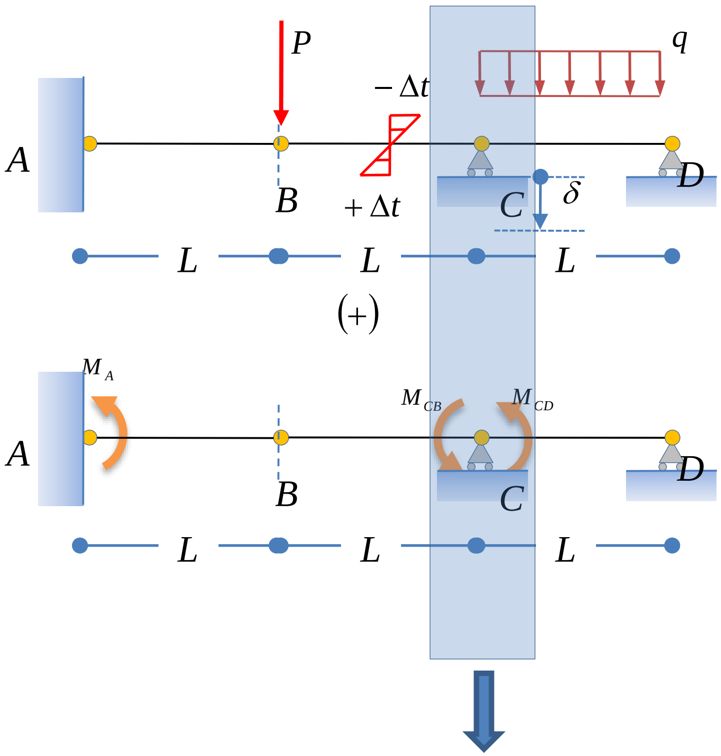
2. si scrivono esplicitamente le equazioni di equilibrio alla rotazione dei nodi di cui al punto precedente e le equazioni di congruenza e compatibilità con i vincoli presenti nel sistema iperstatico di partenza affinché il sistema in esame sia equivalente a quello da analizzare;

È possibile scrivere direttamente

- 1 equazione di equilibrio (alla rotazione del nodo C);

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio - soluzione



$$M_{CB} + M_{CD} = 0$$

2. si scrivono esplicitamente le equazioni di equilibrio alla rotazione dei nodi di cui al punto precedente e le equazioni di congruenza e compatibilità con i vincoli presenti nel sistema iperstatico di partenza affinché il sistema in esame sia equivalente a quello da analizzare;

È possibile scrivere direttamente

- 1 equazione di equilibrio (alla rotazione del nodo C);
- 1 equazione di congruenza in corrispondenza del nodo intermedio C

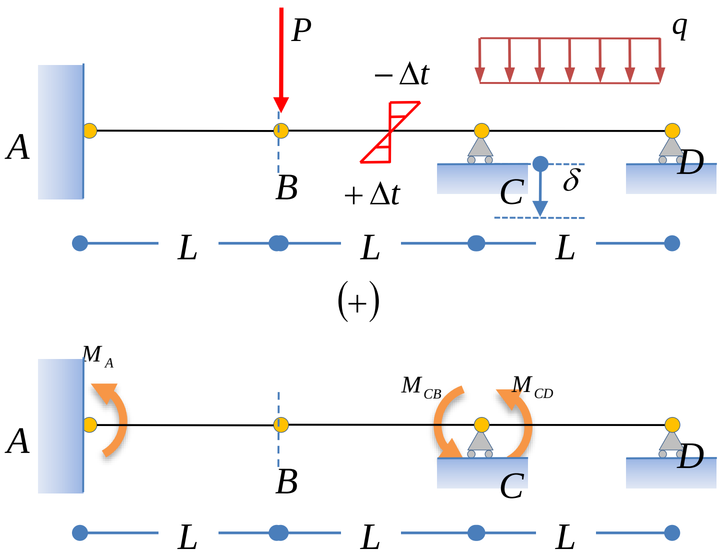
$$\varphi_{CB} = \varphi_{CD}$$

- 1 equazione di compatibilità in corrispondenza del nodo A.

$$\varphi_A = 0$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio - soluzione



3. si esplicitano i legami tra le rotazioni degli estremi della singola trave e tutte le azioni (esterne e sollecitazioni iperstatiche) presenti su di essa;

Utilizzando l'equazione dei tre momenti si ha

$$\varphi_A = M_A \frac{L}{3E\,I_x} - \frac{v_B}{L}$$

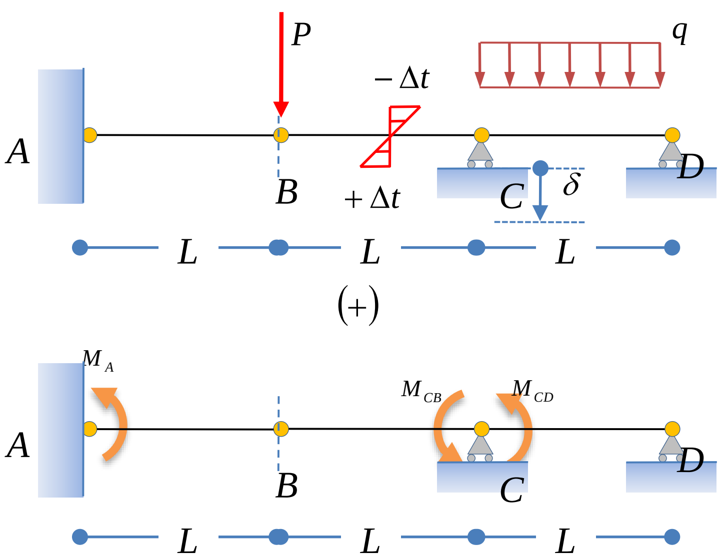
$$\varphi_{CB} = M_{CB} \frac{L}{3E\,I_x} + \frac{v_B - \delta}{L} + \frac{\alpha\,\Delta t}{h} L$$

$$\varphi_{CD} = M_{CD} \frac{L}{3E\,I_x} + \frac{\delta}{L} - \frac{qL^3}{24E\,I_x}$$

$$\begin{cases} M_{CB} + M_{CD} = 0 \\ \varphi_{CB} = \varphi_{CD} \\ \varphi_A = 0 \end{cases}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio - soluzione



3. si esplicitano i legami tra le rotazioni degli estremi della singola trave e tutte le azioni (esterne e sollecitazioni iperstatiche) presenti su di essa;

Utilizzando l'equazione dei tre momenti si ha

$$\varphi_A = M_A \frac{L}{3EI_x} - \frac{v_B}{L}$$

$$\varphi_{CB} = M_{CB} \frac{L}{3EI_x} + \frac{v_B - \delta}{L} + \frac{\alpha \Delta t}{h} L$$

$$\varphi_{CD} = M_{CD} \frac{L}{3EI_x} + \frac{\delta}{L} - \frac{qL^3}{24EI_x}$$

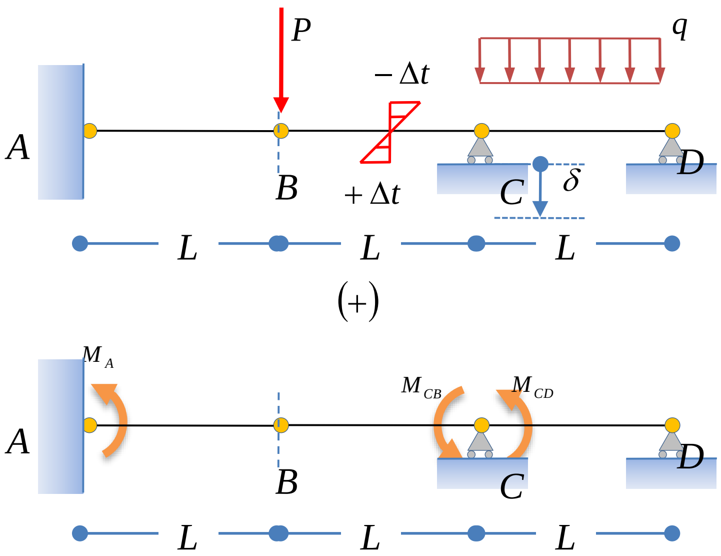
$$\begin{cases} M_{CB} + M_{CD} = 0 \\ \varphi_{CB} = \varphi_{CD} \\ \varphi_A = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Sostituendo le precedenti espressioni nelle equazioni di equilibrio e di congruenza e compatibilità si ha:

$$\begin{cases} M_{CB} + M_{CD} = 0 \\ M_{CB} \frac{L}{3EI_x} + \frac{v_B - \delta}{L} + \frac{\alpha \Delta t}{h} L = M_{CD} \frac{L}{3EI_x} + \frac{\delta}{L} - \frac{qL^3}{24EI_x} \\ M_A \frac{L}{3EI_x} - \frac{v_B}{L} = 0 \end{cases}$$

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio - soluzione

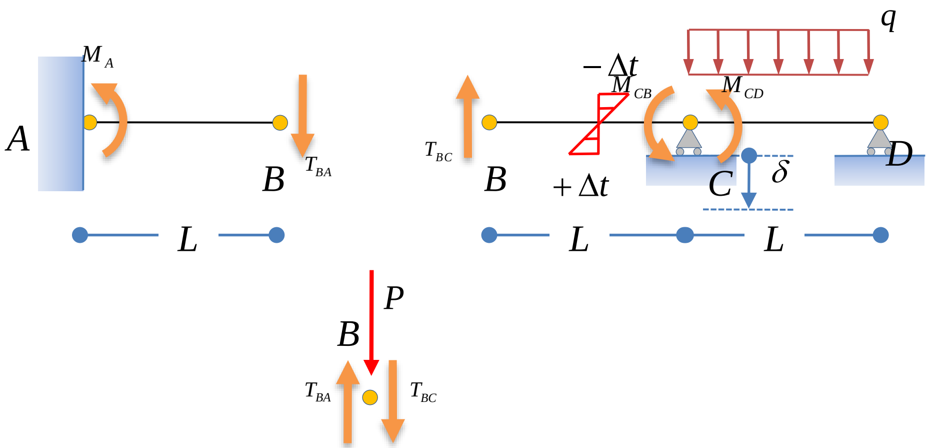


$$\begin{cases} M_{CB} + M_{CD} = 0 \\ M_{CB}\dfrac{L}{3EI_x} + \dfrac{v_B - \delta}{L} + \dfrac{\alpha\,\Delta t}{h}L = M_{CD}\dfrac{L}{3EI_x} + \dfrac{\delta}{L} - \dfrac{qL^3}{24EI_x} \\ M_A\dfrac{L}{3EI_x} - \dfrac{v_B}{L} = 0 \end{cases}$$

Il precedente è un sistema di tre equazioni nelle quattro incognite indicate nelle precedenti slide. Al fine di determinare la soluzione del problema strutturale è necessario considerare una ulteriore equazione. Si osservi che l'esempio in esame presenta come incognita cinematica lo spostamento verticale del nodo B. L'equazione che può essere aggiunta alle precedenti è una equazione di equilibrio "duale" a tale ulteriore incognita, ossia una equazione di equilibrio alla traslazione verticale del nodo B.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio - soluzione



Dall'equilibrio alla traslazione verticale del nodo B si ha:

$$T_{BA} - P - T_{BC} = 0 \rightarrow P = T_{BA} - T_{BC} \qquad (1)$$

Dall'equilibrio alla rotazione del tratto AB attorno al nodo A e del tratto BC attorno al nodo C si ha rispettivamente:

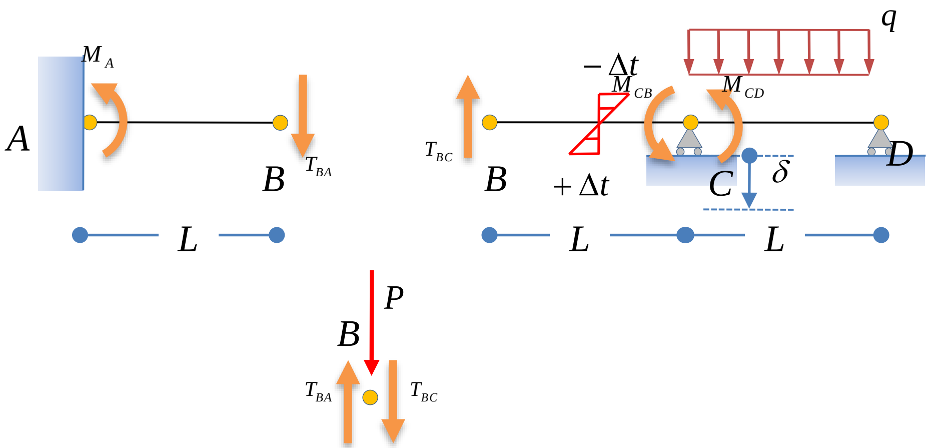
$$M_A - T_{BA} L = 0 \rightarrow T_{BA} = \frac{M_A}{L}$$
$$M_{CB} - T_{BC} L = 0 \rightarrow T_{BC} = \frac{M_{CB}}{L} \qquad (2)$$

Sostituendo le (2) nella (1) si ha

$$P = T_{BA} - T_{BC} = \frac{M_A - M_{CB}}{L}$$

La quale rappresenta una relazione tra le incognite del problema e pertanto può essere aggiunta alle equazioni di equilibrio e di congruenza e compatibilità determinate precedentemente.

Esempio - soluzione



Complessivamente si ha allora il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} M_{CB} + M_{CD} = 0 \\ M_{CB}\dfrac{L}{3EI_x} + \dfrac{v_B - \delta}{L} + \dfrac{\alpha\,\Delta t}{h}L = M_{CD}\dfrac{L}{3EI_x} + \dfrac{\delta}{L} - \dfrac{qL^3}{24EI_x} \\ M_A\dfrac{L}{3EI_x} - \dfrac{v_B}{L} = 0 \\ P = \dfrac{M_A - M_{CB}}{L} \end{cases}$$

la cui soluzione è la seguente:

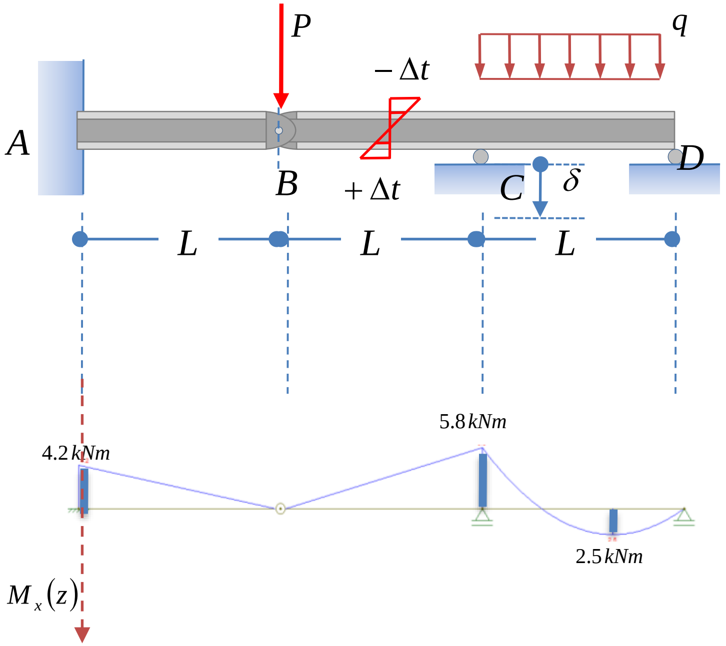
$$M_A \cong 4.2\,kNm$$

$$M_{CB} \cong -5.8\,kNm$$

$$M_{CD} \cong 5.8\,kNm$$

$$v_B \cong 4.9\,mm$$

Esempio - soluzione



Il diagramma del momento presente nella struttura è quello schematizzato a fianco.

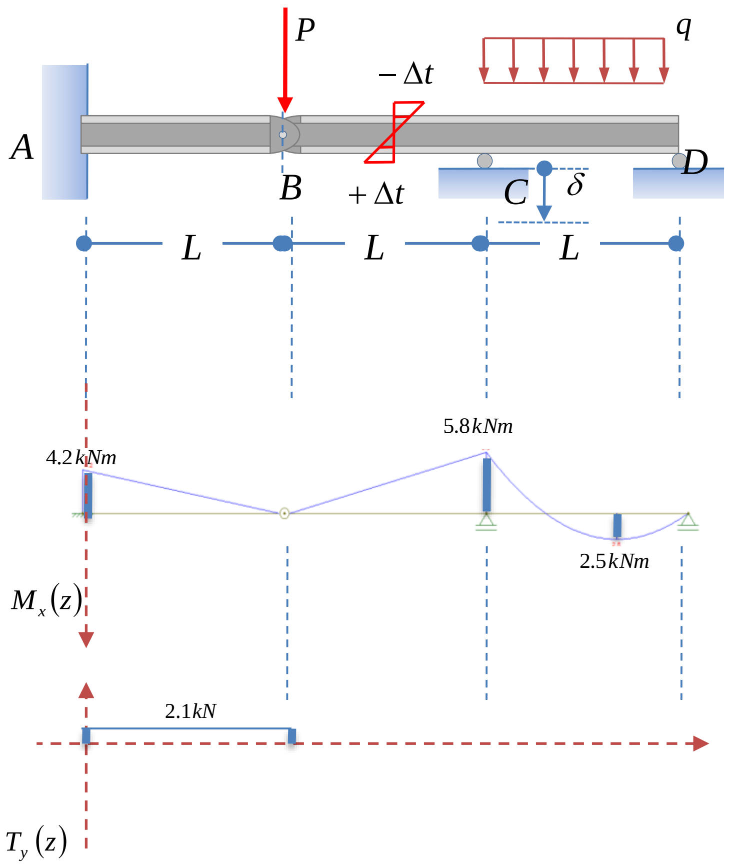
La sezione maggiormente sollecitata a flessione è C, nella quale si ha il seguente valore di tensione normale dovuta alla flessione:

$$\sigma_{z\max} = \frac{M}{I_x}\frac{h}{2} \cong 75.05\,MPa$$

La verifica di resistenza risulta quindi soddisfatta.

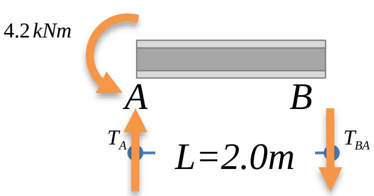
Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio - soluzione



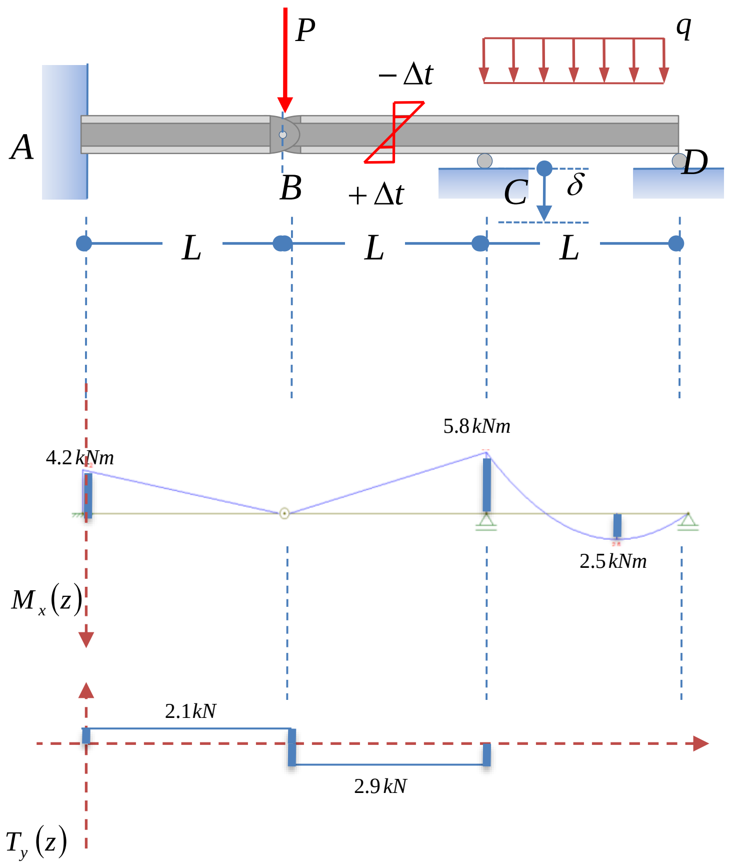
Noti i valori dei momenti flettenti di estremità del singolo tratto, è possibile determinare il diagramma del taglio attraverso semplici considerazioni di equilibrio come segue:

Tratto AB:



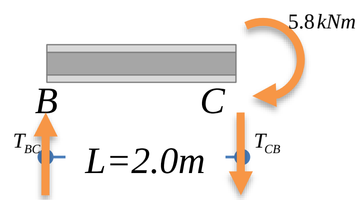
$$\begin{cases} \sum M_{(A)} = 0 \rightarrow -T_{BA}\, L + 4.2 = 0 \\ \sum M_{(B)} = 0 \rightarrow -T_A\, L + 4.2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_A = 2.1 kN \\ T_{BA} = 2.1 kN \end{cases}$$

Esempio - soluzione



Noti i valori dei momenti flettenti di estremità del singolo tratto, è possibile determinare il diagramma del taglio attraverso semplici considerazioni di equilibrio come segue:

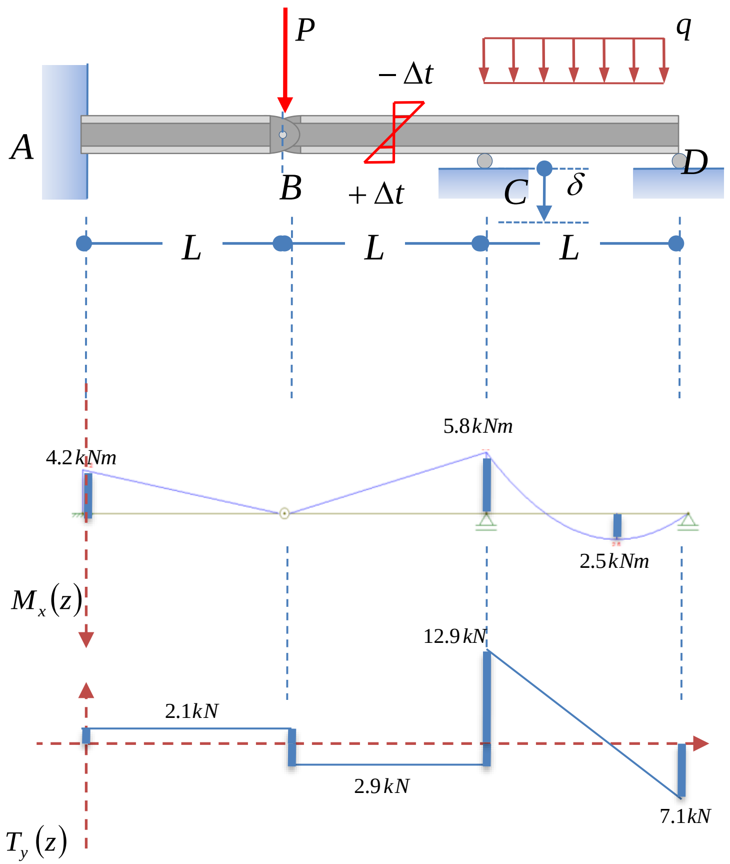
Tratto BC:



$$\begin{cases} \sum M_{(B)} = 0 \rightarrow T_{CB}\, L + 5.8kNm = 0 \\ \sum M_{(C)} = 0 \rightarrow T_{BC}\, L + 5.8kNm = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{CB} = -2.9\, kN \\ T_{BC} = -2.9\, kN \end{cases}$$

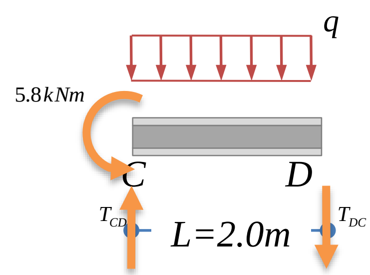
Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esempio - soluzione



Noti i valori dei momenti flettenti di estremità del singolo tratto, è possibile determinare il diagramma del taglio attraverso semplici considerazioni di equilibrio come segue:

Tratto BC:



$$\begin{cases}\sum M_{(C)} = 0 \rightarrow 5.8\,kNm - T_{DC}\,L - q\,L^2/2 = 0 \\ \sum M_{(D)} = 0 \rightarrow 5.8\,kNm + q\,L^2/2 - T_{CD}\,L = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{DC} = -7.1\,kN \\ T_{CD} = 12.9\,kN\end{cases}$$

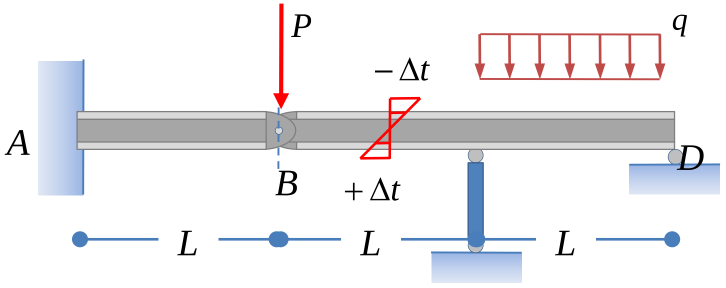
Telai piani

"Equazione dei tre momenti": struttura a nodi spostabili

Esercizi proposti

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esercizio

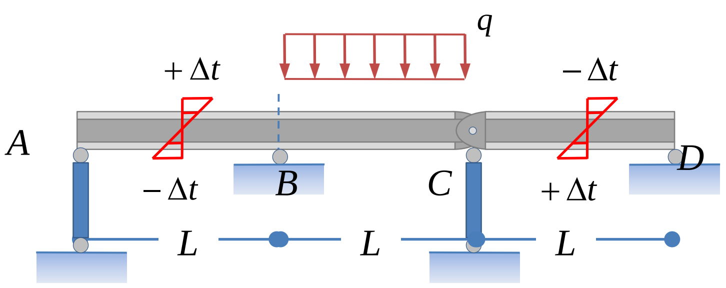


La struttura schematizzata in figura ha sezione costante ed è costituita in materiale omogeneo.

Si risolva la struttura utilizzando il metodo dell’equazione dei tre momenti descritta nella sessione teorica della presente lezione.

Si ipotizzino dei valori plausibili per i materiali e per le dimensioni della struttura.

Esercizio



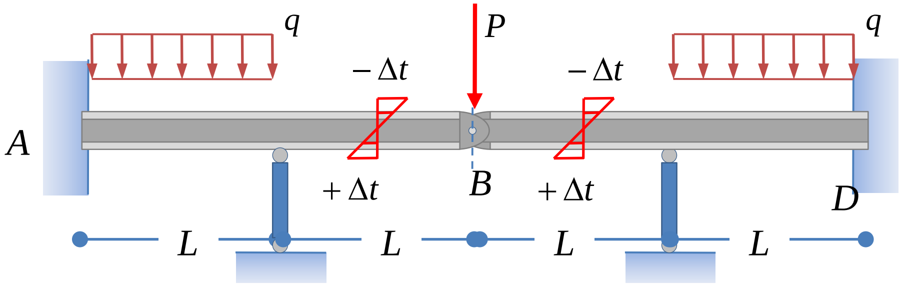
La struttura schematizzata in figura ha sezione costante ed è costituita in materiale omogeneo.

Si risolva la struttura utilizzando il metodo dell'equazione dei tre momenti descritta nella sessione teorica della presente lezione.

Si ipotizzino dei valori plausibili per i materiali e per le dimensioni della struttura.

Mario Fagone
Università di Firenze
e-mail: mario.fagone@unifi.it; tel. 055 2756831

Esercizio



La struttura schematizzata in figura ha sezione costante ed è costituita in materiale omogeneo.

Si risolva la struttura utilizzando il metodo dell’equazione dei tre momenti descritta nella sessione teorica della presente lezione.

Si ipotizzino dei valori plausibili per i materiali e per le dimensioni della struttura.