ISTITUZIONI DI MATEMATICHE

ESERCIZI DI PREPARAZIONE ALLA PRIMA PROVA PARZIALE

Problema 1. In $\mathbb{R}^3$, considerare il punto $A = (1, 1, 1)$ e la retta

$$r\colon x - 1 = y = z - 2.$$

- Trovare le equazioni parametriche della retta r.
- Trovare l'equazione del piano σ perpendicolare ad r e passante per A. Trovare l'intersezione H di σ con r. Trovare la distanza tra A e H.
- Trovare l'equazione parametrica della retta passante per A e per H. Trovare il punto B tale che H sia il punto medio del segmento AB.
- Trovare le rette passanti per A e per un generico punto della retta r. Tra queste, trovare le rette che intersecano r formando un angolo di $\pi/3$. Trovare i punti C e D di intersezione.
- Trovare l'area di $ABCD$.

Problema 2. Considerare il sistema

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ x - y + 2z = 3 \\ -x - 5y + 12z = 7 \\ x - 4y + 9z = 8 \end{cases}.$$

- Risolvere il sistema usando il metodo di eliminazione di Gauss.
- Dire cosa rappresenta geometricamente l'insieme delle soluzioni, che chiamiamo r.
- Scrivere equazioni cartesiane o parametriche per la retta r' parallela a r e passante per l'origine.

Considerare inoltre la retta s di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases}.$$

- Determinare l'intersezione tra r e s.
- Scrivere equazioni cartesiane per la retta s' parallela a s e passante per l'origine.
- Determinare l'intersezione tra r' e s'.
- Determinare la posizione reciproca di r e s nello spazio.

Problema 3. Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, considerare le rette in $\mathbb{R}^3$ di equazione

$$r\colon \begin{cases} x = 1 + y \\ z = 2y + a \end{cases}, \qquad s\colon \begin{cases} x = 1 - y \\ z = ay + 1 \end{cases}.$$

- Scrivere le coordinate dei vettori che individuano la direzione di r e di s.
- Determinare per quali eventuali valori di a le rette r e s sono parallele, e per quali sono perpendicolari.
- Determinare per quali eventuali valori di a le rette r e s si intersecano, e per quali sono sghembe.
- Per $a = 0$: trovare l'equazione del piano passante per r e parallelo ad s. Trovare l'equazione del piano passante per s e parallelo ad r. Trovare la distanza tra le rette r e s.

Problema 4. In $\mathbb{R}^3$, considerare la retta

$$r\colon \begin{cases} x - 4y = 14 \\ 2y - z = -5 \end{cases}.$$

- Trovare le equazioni parametriche della retta r.
- Determinare la distanza tra il generico punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e il piano
$$\pi\colon 6x - 2y + 3z - 1 = 0.$$
- Determinare la distanza tra il generico punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e l'origine e scrivere l'equazione che individua i punti equidistanti dal piano π e dall'origine.
- Determinare la distanza tra ciascun punto di r e il piano π.
- Trovare gli eventuali punti di r equidistanti dal piano π e dall'origine.

Problema 5. In $\mathbb{R}^3$, considerare i punti $A = (1, 2, 0)$, $B = (3, 5, 4)$, $C = (3, 2, -2)$ e $P = (3, 1, 2)$.

- Trovare l'equazione del piano σ passante per A, B e C.
- Trovare la proiezione ortogonale H di P su σ.
- Trovare il simmetrico di P rispetto a σ, cioè il punto Q tale che H sia il punto medio del segmento PQ.
- Scrivere le equazioni che individuano i punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ equidistanti da A, B e C.
- Determinare il volume del parallelepipedo individuato dai vettori applicati nell'origine di secondo estremo A, B e C.

Problema 6. In $\mathbb{R}^3$, considerare la retta

$$r\colon \begin{cases} x-2y+3z=4 \\ y+z=8 \end{cases}.$$

- Trovare le equazioni parametriche della retta r.
- Trovare la proiezione ortogonale H dell'origine su r.
- Trovare il simmetrico dell'origine rispetto a r, cioè il punto P tale che H sia il punto medio del segmento OP.
- Determinare le rette s_1 e s_2 passanti per P, incidenti ad r e che formano un angolo di $\pi/4$ con r.
- Determinare la retta passante per l'origine e perpendicolare al piano contenente r, s_1 e s_2.

Problema 7. Studiare i seguenti sistemi lineari, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(i)

$$\begin{cases} 2x+(k+1)y-(k+1)z=0 \\ x+y-z=0 \\ (k+1)x+2y-2kz=0 \end{cases};$$

(ii)

$$\begin{cases} kx+2z=1 \\ 2x+y=1 \\ (2k+2)x+z=0 \\ y+z=2 \end{cases}.$$

Problema 8. Data l'applicazione lineare L da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$L(x,y)=(2x-y,3y,x+y)$$

- scrivere la matrice associata a L rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^3$,
- determinare $\dim \mathsf{Im} L$ e $\dim \ker L$.

Problema 9. Dato l'endomorfismo L di $\mathbb{R}^2$ definito da

$$L(x,y)=(2x-y,3y)$$

- scrivere la matrice associata a L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$,
- determinare $\dim \mathsf{Im} L$ e $\dim \ker L$,
- determinare gli autovalori, gli autovettori e dire se L è diagonalizzabile.

Problema 10. Dato l'endomorfismo L di $\mathbb{R}^3$ definito da

$$L(x,y,z)=(2x+y,x+2y+z,x-y-z)$$

- scrivere la matrice associata a L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$,
- determinare $\dim \mathsf{Im} L$ e $\dim \ker L$,
- determinare una base e l'equazione cartesiana di $\mathsf{Im} L$ e $\ker L$,
- determinare gli autovalori, gli autovettori e dire se L è diagonalizzabile.

Problema 11. Dato l'endomorfismo L di $\mathbb{R}^3$ rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- determinare $\dim \mathsf{Im} L$ e $\dim \ker L$,
- determinare gli autovalori, gli autovettori e dire se L è diagonalizzabile.

Problema 12. Dato l'endomorfismo L di $\mathbb{R}^3$ rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- determinare $\dim \mathsf{Im} L$ e $\dim \ker L$,
- determinare una base e l'equazione cartesiana di $\mathsf{Im} L$ e $\ker L$,
- determinare gli autovalori, gli autovettori e dire se L è diagonalizzabile.

Problema 13. Data

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- determinare gli autovalori di A,
- determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A,
- scrivere l'equazione della conica di matrice A e classificarla.

Problema 14. Sia L l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Determinare $\dim \mathsf{Im} L$ e $\dim \ker L$,
- determinare una base e l'equazione cartesiana di $\mathsf{Im} L$ e $\ker L$,
- determinare gli autovalori di A, e dire se L è diagonalizzabile,
- determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A.

Problema 15. Classificare le seguenti coniche

- $x^2 - y^2 + y - 1 = 0$,
- $x^2 - 2xy + y^2 - 2y = 0$,
- $x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x = 0$,
- $3x^2 - 3y^2 - 8xy + 10 = 0$,
- $x^2 + 4xy + 5y^2 + 2x + 5 = 0$,

- $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 5 = 0$.

Problema 16.
- Scrivere l'equazione della circonferenza di centro $C = (1, 2)$ e raggio $r = 2$;
- scrivere l'equazione della sfera di centro $C = (2, -1, -1)$ e raggio $r = 3$.