

**PROGRAMMA DETTAGLIATO DI ANALISI MATEMATICA
1 a.a. 2018-19, CdS INGEGNERIA CEA**

LIBRO DI TESTO: M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli, Analisi Matematica, McGraw-Hill

APPUNTI IN RETE (<https://e-l.unifi.it/>) su Equazioni Differenziali.

INSIEMI. Unione. Intersezione. Differenza. Complementare. Prodotto cartesiano.

Insiemi numerici. Gli insiemi numerici N , Z , Q . Operazioni. Ordinamento. Proprietà di Archimede. Allineamenti decimali. Rappresentazione degli elementi di Q mediante allineamenti decimali. Definizione di R . La retta reale. Intervalli limitati e illimitati. Ampiezza di un intervallo limitato. Valore assoluto, sue proprietà e significato geometrico. Sottoinsiemi di R superiormente limitati, inferiormente limitati, limitati, maggioranti (minoranti) massimo (minimo), estremo superiore (inferiore) di un insieme. Proprietà di completezza dei numeri reali. Definizione della radice n -esima di un numero reale. Potenze ad esponente reale. Logaritmi di numeri positivi.

GENERALITÀ SULLE FUNZIONI. Definizione di funzione (o applicazione) da un insieme X a un insieme Y , dominio, codominio, immagine, grafico. Funzione identità. Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche. Funzione composta. Proprietà associativa dell'operazione di composizione. Funzioni reali di una variabile reale: notazioni, dominio, immagine, grafico, equazione del grafico.

FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE. Convenzione sul dominio (dominio naturale, campo di esistenza) e proprietà del grafico. Funzioni monotone. Esempi di grafici di funzioni elementari: funzione parte intera, funzione di Heaviside, funzione segno, valore assoluto. Grafici di potenze intere, radici, funzioni esponenziale e logaritmo, funzioni trigonometriche. Funzioni definite a tratti. Funzioni pari, dispari, periodiche. Funzioni superiormente (inferiormente) limitate. Estremo superiore e estremo inferiore, massimo e minimo di una funzione. Funzione inversa. Grafico di una funzione inversa. Inverse di funzioni trigonometriche e loro grafici. il principio di induzione. Fattoriale di un numero naturale. Coefficienti binomiali. Il binomio di Newton (**senza dimostrazione**). La disuguaglianza di Bernoulli (**senza dimostrazione**).

CENNI DI TOPOLOGIA DELLA RETTA. Interni di un punto. Punti di accumulazione, punti isolati, punti interni, punti esterni, punti di frontiera di un insieme. Il teorema di Bolzano Weierstrass (**senza dimostrazione**). La retta reale estesa.

LIMITI DI FUNZIONI E DI SUCCESSIONI. Definizione di limite mediante il concetto di intorno e usando le disuguaglianze. Limiti di successioni. Teorema dell'unicità del limite (**con dimostrazione**). Limite per eccesso e limite per difetto. Limite destro e limite sinistro. Principio di localizzazione. Il

teorema della permanenza del segno (**con dimostrazione**). Limitatezza locale di funzioni con limite finito (**senza dimostrazione**). Teorema del confronto (**con dimostrazione**). Algebra ed algebra estesa dei limiti. Limiti delle funzioni elementari. Teorema del limite di una funzione monotona (**dimostrazione nel caso delle successioni**). Il numero di Neper. Successioni estratte. Cenni alle relazioni tra i limiti di funzioni e i limiti di successioni. Non esistenza di alcuni limiti di funzioni e di successioni. Limiti notevoli trigonometrici (**con dimostrazione**). Il teorema del limite di una funzione composta (**senza dimostrazione**). Definizione di infinitesimo e di infinito. Il teorema del limite del prodotto di una funzione limitata per una funzione infinitesima (**con dimostrazione**). Limiti notevoli per funzione esponenziale e logaritmo. Infinitesimi e infiniti. Definizione di $o(1)$ e di altri simboli di Landau. Confronto tra infinitesimi. Principio di sostituzione degli infinitesimi (**con dimostrazione**).

FUNZIONI CONTINUE. Definizione di funzione continua. Operazioni sulle funzioni continue (**dimostrazione nel caso della somma di funzioni**). Continuità della funzione composta (**senza dimostrazione**). Tipi di discontinuità: discontinuità eliminabile, di prima specie, di seconda specie. Discontinuità di funzioni monotone. Teorema degli zeri (**dimostrazione con il metodo di bisezione**). Teorema dei valori intermedi (**con dimostrazione**). Applicazioni del teorema degli zeri. Continuità della funzione inversa (**senza dimostrazione**). Continuità delle funzioni inverse delle funzioni trigonometriche. Il teorema di Weierstrass nel caso di intervalli chiusi e limitati (**senza dimostrazione**). Definizione delle funzioni iperboliche $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$.

CALCOLO DIFFERENZIALE. Definizione di funzione derivabile e di derivata in un punto. Continuità delle funzioni derivabili. Non derivabilità in 0 della funzione valore assoluto. Equazione della retta tangente a un grafico in un punto. Migliore approssimazione lineare di una funzione. Tabella di derivate di funzioni elementari. Regole di derivazione di somma, prodotto e quoziente (**con dimostrazione solo per la somma e il prodotto**). Derivazione della funzione composta (**senza dimostrazione**). Derivazione della funzione inversa (**senza dimostrazione**). Punti angolosi e cuspidi. Teorema di Fermat (**con dimostrazione**). Teorema di Rolle (**con dimostrazione**), teorema di Lagrange (**con dimostrazione**). Criteri di monotonia (**con dimostrazione**). Caratterizzazione delle funzioni a derivata nulla in un intervallo (**con dimostrazione**). Teorema di de l'Hopital (**con dimostrazione nel caso "0/0"**). Derivate di ordine superiore. Formula di Taylor e di McLaurin. Teorema di Peano (**con dimostrazione**). Formula di McLaurin per alcune funzioni elementari: e^x , $\log(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^\alpha$, $\sinh x$, $\cosh x$. Formula di Taylor con il resto di Lagrange. Approssimazione del numero di Neper. Convessità e concavità. Criterio di convessità per funzioni derivabili due volte (**senza dimostrazione**). Punti di flesso. Asintoti orizzontali, verticali e obliqui. Studio qualitativo di funzioni.

INTEGRALE SECONDO RIEMANN. Definizione di suddivisione di un intervallo. Somma superiore e inferiore di una funzione limitata su un intervallo relativa ad una suddivisione. Integrabilità secondo Riemann di una funzione limitata e definizione di integrale secondo Riemann (**senza dimostrazioni**). Proprietà di linearità, monotonia e additività dell'integrale secondo Riemann (**senza dimostrazioni**). Teorema sulla integrabilità delle funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato e estensioni (**senza dimostrazione**). Integrabilità delle funzioni monotone su un intervallo chiuso e limitato (**senza dimostrazione**). Teorema fondamentale del calcolo integrale (**con dimostrazione**). Primitive di funzioni. Calcolo di un integrale di una funzione continua a partire da una sua primitiva. Tabella delle primitive. Formule di integrazione per sostituzione (**con dimostrazione**). Integrazione per parti (**con dimostrazione**). Integrazione di funzioni razionali con il metodo di Hermite (**senza dimostrazione**). Integrali indefiniti riconducibili a integrali di funzioni razionali.

INTEGRALI IMPROPRI. Definizione di integrale improprio. Esempi notevoli: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, ecc.. Criterio del confronto e del confronto asintotico (**con dimostrazione**).

SERIE NUMERICHE. Definizione di serie numerica. Carattere di una serie. Serie di Mengoli. Condizione necessaria affinché una serie sia convergente. Serie di Mengoli. Serie geometrica (**con dimostrazioni**). Criterio del confronto e criterio del confronto asintotico per serie a termini positivi. Criterio della radice (**senza dimostrazione**) e del rapporto (**con dimostrazione**). Relazioni tra serie e integrali impropri (**senza dimostrazioni**). Criterio integrale per serie a termini positivi (**senza dimostrazione**). La serie armonica generalizzata. Definizione di assoluta convergenza di una serie numerica. Teorema della convergenza delle serie assolutamente convergenti (**senza dimostrazione**). Serie a termini di segno alterno. Il criterio di Leibniz (**senza dimostrazione**).

NUMERI COMPLESSI. Definizione dell'insieme dei numeri complessi, \mathbb{C} . Operazioni con i numeri complessi. Rappresentazione cartesiana. Modulo e coniugato di un numero complesso. Forma trigonometrica dei numeri complessi. Formula di De Moivre. Cenni alle radici n-esime di un numero complesso. Cenno all'esponenziale complesso.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI. Introduzione alle equazioni differenziali. Equazioni differenziali lineari del primo ordine, formule risolutive. Problema di Cauchy. Problema di Cauchy per equazioni differenziali del primo ordine: Teorema di esistenza e unicità locale (**senza dimostrazione**). Equazioni a variabili separabili. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti: formula dell'integrale generale, metodo ad-hoc.

Si indicano qui di seguito sommariamente i capitoli e i paragrafi del libro di testo nei quali si trovano gli argomenti di cui sopra.

INSIEMI, NUMERI COMPLESSI → CAPITOLO 1

GENERALITÀ SULLE FUNZIONI, FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE → CAPITOLO 2

CENNI DI TOPOLOGIA DELLA RETTA → CAPITOLO 3, paragrafo 3.1

LIMITI DI FUNZIONI E DI SUCCESSIONI → CAPITOLO 3, a partire dal paragrafo 3.2; CAPITOLO 4, paragrafi 4.1, 4.2, 4.3; CAPITOLO 5

FUNZIONI CONTINUE → CAPITOLO 6

CALCOLO DIFFERENZIALE → CAPITOLO 7

INTEGRALE SECONDO RIEMANN, INTEGRALI IMPROPRI → CAPITOLO 8

SERIE NUMERICHE → CAPITOLO 4, paragrafi 4.6, 4.7, 4.8 (tranne il sottoparagrafo 4.8.2 che è sostituito dal paragrafo 9.1)

EQUAZIONI DIFFERENZIALI → APPUNTI IN RETE