



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
FIRENZE

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE

## ESERCIZI DI FISICA I

*per il corso di Fisica I di Ingegneria  
Elettronica e delle Telecomunicazioni*

*Davide Rindori  
2018*

---

davide.rindori@unifi.it

# Indice

<b>Esercizi del 12/10/18</b>	<b>3</b>
Esercizio 01 . . . . .	3
Esercizio 02 . . . . .	4
Esercizio 03 . . . . .	5
Esercizio 04 . . . . .	6
Esercizio 05 . . . . .	8
<b>Esercizi del 19/10/18</b>	<b>11</b>
Esercizio 06 . . . . .	11
Esercizio 07 . . . . .	13
Esercizio 08 . . . . .	15
<b>Esercizi del 25/10/18</b>	<b>18</b>
Esercizio 09 . . . . .	18
Esercizio 10 . . . . .	20
Esercizio 11 . . . . .	22
Esercizio 12 . . . . .	25
<b>Esercizi del 09/11/18</b>	<b>29</b>
Esercizio 13 . . . . .	29
Esercizio 14 . . . . .	33
<b>Esercizi del 16/11/18</b>	<b>37</b>
Esercizio 15 . . . . .	37
Esercizio 16 . . . . .	40
<b>Esercizi del 23/11/18</b>	<b>44</b>
Esercizio 17 . . . . .	44
Esercizio 18 . . . . .	50
<b>Esercizi del 30/11/18</b>	<b>53</b>
Esercizio 19 . . . . .	53
Esercizio 20 . . . . .	57
<b>Esercizi del 07/12/18</b>	<b>61</b>
Esercizio 21 . . . . .	61
Esercizio 22 . . . . .	67
<b>Esercizi del 14/12/18</b>	<b>71</b>
Esercizio 23 . . . . .	71
Esercizio 24 . . . . .	73
Esercizio 25 . . . . .	74
Esercizio 26 . . . . .	76

## Esercizi del 12/10/18

### Esercizio 01

(ordini di grandezza)

Supponiamo che la Terra sia una sfera di raggio  $R \simeq 6.400$  km e immaginiamo di cingere l'equatore (o un qualunque meridiano) con una corda lunga esattamente quanto la circonferenza terrestre  $C \simeq 40.000$  km. Consideriamo un'altra corda lunga 1 m in più della precedente che cinge di nuovo l'equatore (o un qualunque meridiano), e supponiamo di tenerla sollevata da Terra quanto serve per far sì che descriva anch'essa una circonferenza. Di quanto sta sollevata dal suolo la seconda corda?

[ $\Delta R \simeq 16$  cm]

#### Svolgimento

La lunghezza della prima corda è data dalla circonferenza della Terra  $C = 2\pi R$ . Possiamo scrivere la lunghezza della seconda corda come  $C' = C + \Delta C$ , dove  $C$  è la lunghezza della prima corda e  $\Delta C = 1$  m. Questa è la circonferenza di una sfera di raggio  $R'$ , ossia  $C' = 2\pi R'$ . D'altra parte  $R' = R + \Delta R$ , dove  $R$  è il raggio della Terra, cioè della circonferenza descritta dalla prima corda, e  $\Delta R$  è ciò che il testo ci chiede di calcolare. Mettendo tutto insieme abbiamo

$$C + \Delta C = C' = 2\pi R' = 2\pi(R + \Delta R) = 2\pi R + 2\pi \Delta R \quad (1)$$

$$\cancel{C} + \Delta C = \cancel{2\pi R} + 2\pi \Delta R \quad (2)$$

$$\Delta R = \frac{\Delta C}{2\pi} = \frac{1 \text{ m}}{2\pi} \simeq 0,16 \text{ m} = 16 \text{ cm}. \quad (3)$$

L'intuizione potrebbe far pensare che 1 m in più su 40.000 km di lunghezza facciano una differenza assai piccola, pertanto una risposta istintiva avrebbe potuto essere dell'ordine dei mm o dei  $\mu\text{m}$  o anche meno. In effetti l'intuizione non è del tutto sbagliata, infatti  $\Delta R/R \simeq 2,5 \times 10^{-8}$ , cioè 16 cm sono un aumento piccolissimo rispetto a 6.400 km.

Non è invece scontato che  $\Delta R$  sia indipendente da  $R$ . Ciò significa che qualunque sia il valore del raggio, se la corrispondente circonferenza subisce un allungamento (o accorciamento) di 1 m, il raggio subisce un allungamento (o accorciamento) di 16 cm.

## Esercizio 02

(ordini di grandezza)

Consideriamo un foglio di carta, il cui spessore è dell'ordine di 0,1 mm. Supponiamo che sia sufficientemente grande da poterlo piegare a metà un numero arbitrario di volte. Quante volte è necessario piegarlo a metà affinché lo spessore diventi pari alla distanza media fra la Terra e la Luna, che vale circa 384.000 km?

[ $n \simeq 42$ ]

### Svolgimento

All'inizio lo spessore vale  $s = 0,1 \text{ mm} = 10^{-4} \text{ m}$ . Ad ogni piega raddoppia, dunque

$$\begin{aligned} 1 \text{ piega} & : & s_1 &= 2s \\ 2 \text{ pieghe} & : & s_2 &= 2s_1 = 4s = 2^2s \\ 3 \text{ pieghe} & : & s_3 &= 2s_2 = 8s = 2^3s \\ 4 \text{ pieghe} & : & s_4 &= 2s_3 = 16s = 2^4s \\ & & & \vdots \\ n \text{ pieghe} & : & s_n &= 2^n s. \end{aligned} \tag{4}$$

Il testo ci chiede di trovare il valore di  $n$  tale per cui  $s_n$  è uguale a  $d = 384.000 \text{ km} \simeq 3,8 \times 10^8 \text{ m}$ . Imponiamo quindi  $s_n = d$  e risolviamo per  $n$

$$s_n = 2^n s = d \quad n = \log_2 \left( \frac{d}{s} \right). \tag{5}$$

Naturalmente possiamo calcolare il logaritmo in base 2, ma per esercizio traduciamo tutto in base naturale e  $\simeq 2,71$  e proviamo a fare il calcolo semplicemente a ordini di grandezza, senza preoccuparci dei valori precisi

$$\begin{aligned} n &= \frac{\ln \left( \frac{d}{s} \right)}{\ln 2} \simeq \frac{1}{\ln 2} \ln \left( \frac{3,8 \times 10^8 \text{ m}}{10^{-4} \text{ m}} \right) \simeq \frac{1}{0,7} \ln (3,8 \times 10^{12}) \simeq \\ &\simeq 1,4 (\ln 3,8 + \ln(10^{12})) = 1,4 (\ln 3,8 + 12 \ln 10) \simeq \\ &\simeq 1,4(1,3 + 12 \times 2,3) \simeq 1,4 \times 29 \simeq 42. \end{aligned} \tag{6}$$

Riassumendo, se partiamo da un foglio di spessore 0,1 mm, è sufficiente piegarlo a metà circa 42 volte per far sì che lo spessore diventi pari alla distanza media fra la Terra e la Luna. L'intuizione avrebbe potuto far pensare ad un valore di  $n$  ben più grande, ma di fatto la crescita dello spessore segue potenze del 2, quindi è quasi esponenziale.

### Esercizio 03

(ordini di grandezza)

Supponendo che la Terra sia una sfera di raggio  $R \simeq 6.400$  km, quanto si muove veloce un osservatore sull'equatore a causa del moto di rotazione? E sapendo che Firenze si trova a una latitudine di circa  $43^\circ$  N, a quale velocità ci stiamo muovendo?

$$[v \simeq 1,6 \times 10^3 \text{ km/h}, \\ v_{\text{FI}} \simeq 1,2 \times 10^3 \text{ km/h}]$$

#### Svolgimento

Il moto di rotazione terrestre è un moto uniforme, dunque possiamo scrivere la velocità come lo spazio percorso diviso il tempo necessario a percorrerlo. In particolare è un moto circolare uniforme e il periodo di una rotazione completa è  $T = 24$  h, da cui

$$v = \frac{C}{T} = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \times 6 \times 10^3 \text{ km}}{24 \text{ h}} = \frac{\pi}{2} \times 10^3 \text{ km/h} \simeq 1,6 \times 10^3 \text{ km/h}. \quad (7)$$

Una velocità di circa  $1.600$  km/h è più sostenuta di quanto l'intuizione potrebbe far credere. Possiamo facilmente tradurre questa velocità in m/s sapendo che in 1 h ci sono 60 min e in ciascuno dei quali 60 s, e che 1 km equivale a  $10^3$  m

$$1 \text{ km/h} = \frac{10^3 \text{ m}}{60 \times 60 \text{ s}} = \frac{10^3 \text{ m}}{3,6 \times 10^3 \text{ s}} = \frac{1}{3,6} \text{ m/s} \quad (8)$$

$$v = \frac{1,6 \times 10^3}{3,6} \text{ m/s} \simeq 4,5 \times 10^2 \text{ m/s}. \quad (9)$$

Facendo i calcoli con più accuratezza si trova che  $v \simeq 1.674$  km/h  $\simeq 465$  m/s.

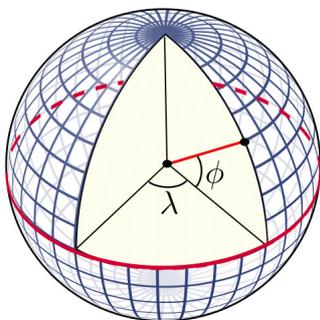


Figura 1: Gli angoli  $\phi$  e  $\lambda$  rappresentano rispettivamente la latitudine e la longitudine del punto sulla sfera. Il parallelo di riferimento per la latitudine è l'equatore, mentre il meridiano di riferimento per la longitudine è il meridiano di Greenwich.

Un osservatore che si trovi a Firenze, essendo ad una latitudine  $\phi \simeq 43^\circ$  N, in un giorno descrive una circonferenza  $C_{\text{FI}}$  di raggio  $R_{\text{FI}} = R \cos \phi$ , da cui

$$R_{\text{FI}} = R \cos \phi \quad \Rightarrow \quad C_{\text{FI}} = 2\pi R_{\text{FI}} = 2\pi R \cos \phi = C \cos \phi \quad (10)$$

$$v_{\text{FI}} = \frac{C_{\text{FI}}}{T} = \frac{C}{T} \cos \phi = v \cos \phi \simeq \frac{v}{\sqrt{2}} \simeq \frac{v}{1,4} \simeq \frac{1,6 \times 10^3}{1,4} \text{ km/h} \simeq \\ \simeq 1,2 \times 10^3 \text{ km/h} \simeq \frac{1,2 \times 10^3}{3,6} \text{ m/s} \simeq 3,3 \times 10^2 \text{ m/s} \quad (11)$$

dove abbiamo approssimato  $\phi \simeq \pi/4$ . Facendo il calcolo in modo più preciso troviamo  $v_{\text{FI}} \simeq 1.209$  km/h  $\simeq 335,8$  m/s.

## Esercizio 04

(analisi dimensionale)

La velocità di fuga di un pianeta è la velocità iniziale minima che un corpo sulla sua superficie deve avere per vincere definitivamente l'attrazione gravitazionale del pianeta. Sapendo che la velocità di fuga dipende solo dal raggio  $R$  del pianeta e dalla sua accelerazione di gravità  $g$  al livello della superficie, determinare quali tra le seguenti formule potrebbe fornire la velocità di fuga:

$$\begin{array}{ll} 1) v_f = \frac{gR}{4} & , \quad 2) v_f = \sqrt{\frac{3g}{R}}, \\ 3) v_f = \sqrt{2gR} & , \quad 4) v_f = 2(gR)^2. \end{array}$$

$$[3) v_f = \sqrt{2gR}]$$

### Svolgimento

Per risolvere questo esercizio usiamo l'analisi dimensionale. Le formule candidate per descrivere la velocità di fuga saranno quelle che al secondo membro avranno le dimensioni di una velocità: a priori potrebbe essercene una, alcune o nessuna. Le dimensioni fondamentali sono la massa  $M$ , la lunghezza  $L$  e il tempo  $T$ , da cui

$$[R] = L, \quad [g] = LT^{-2}. \quad (12)$$

I coefficienti numerici sono adimensionali. Analizziamo le quattro formule:

$$\left[ \frac{gR}{4} \right] = LT^{-2}L = L^2T^{-2} = (LT^{-1})^2, \quad (13)$$

$$\left[ \sqrt{\frac{3g}{R}} \right] = (LT^{-2}L^{-1})^{1/2} = (T^{-2})^{1/2} = T^{-1}, \quad (14)$$

$$\left[ \sqrt{2gR} \right] = (LT^{-2}L)^{1/2} = (L^2T^{-2})^{1/2} = LT^{-1}, \quad (15)$$

$$[2(gR)^2] = (LT^{-2}L)^2 = (L^2T^{-2})^2 = L^4T^{-4} = (LT^{-1})^4. \quad (16)$$

La 1) ha le dimensioni di una velocità al quadrato, la 2) di una frequenza, la 3) di una velocità e la 4) di una velocità alla quarta. Ne segue che soltanto la 3) ha le dimensioni corrette, dunque soltanto lei è una candidata velocità di fuga. Usiamo la parola "candidata" perché tutto ciò che può fare l'analisi dimensionale è verificare che le dimensioni siano corrette, ma non può dire niente riguardo i coefficienti numerici, che sono adimensionali. Se avessimo avuto un'ulteriore formula dove al posto di  $\sqrt{2}$  ci fosse stato un altro coefficiente numerico, l'analisi dimensionale non avrebbe saputo distinguere le due formule, che sarebbero risultate candidate entrambe. Il corretto coefficiente numerico può essere ricavato soltanto da un'analisi cinematica, che in questo caso fornirebbe proprio  $\sqrt{2}$ , dunque la 3) è effettivamente la corretta espressione della velocità di fuga.

	$R$	$g$	$v_f = \sqrt{2gR}$
Terra	6.400 km	9,81 m/s <sup>2</sup>	40.250 km/h $\simeq$ 11.180 m/s
Luna	1.737 km	1,62 m/s <sup>2</sup>	8.550 km/h $\simeq$ 2.375 m/s
Plutone	1.189 km	0,62 m/s <sup>2</sup>	4.370 km/h $\simeq$ 1.210 m/s
Giove	70.000 km	24,79 m/s <sup>2</sup>	216.700 km/h $\simeq$ 60.200 m/s
Sole	695.700 km	273,95 m/s <sup>2</sup>	$2,2 \times 10^6$ km/h $\simeq$ $6,2 \times 10^3$ m/s

L'esercizio è concluso, ma per pura curiosità possiamo sostituire nella 3) i valori di  $R$  e  $g$  di alcuni corpi del nostro sistema solare per avere un'idea dell'ordine di grandezza delle tipiche velocità di fuga. Riportiamo solo alcuni esempi nella tabella sottostante. La Terra non è particolarmente grande rispetto ad altri pianeti, ma essendo rocciosa è piuttosto densa, e questo contribuisce ad una discreta accelerazione di gravità. Complessivamente ha una velocità di fuga dell'ordine di  $10^4$  km/h. La Luna è sia più piccola sia meno densa della Terra, il che si riflette in una velocità di fuga minore. Il pianeta con la velocità di fuga più piccola è Plutone, mentre quello con velocità di fuga più grande è Giove. Il raggio di Giove è circa un fattore 11 più grande di quello della Terra, tuttavia la sua accelerazione di gravità è solo un fattore 2,5 più grande. Ciò significa che Giove ha una densità media relativamente piccola rispetto a quella della Terra, infatti la Terra è rocciosa e Giove è gassoso. Se consideriamo anche il Sole, la velocità di fuga massima è prevedibilmente la sua, dato il grande valore del raggio e dell'accelerazione di gravità.

## Esercizio 05

(geometria sul piano)

Consideriamo una circonferenza di centro  $C = (x_C, y_C)$  e raggio  $R$  e un punto  $P = (x_P, y_P)$  sullo stesso piano su cui giace la circonferenza. Determinare le equazioni delle rette passanti per  $P$  e tangenti alla circonferenza.

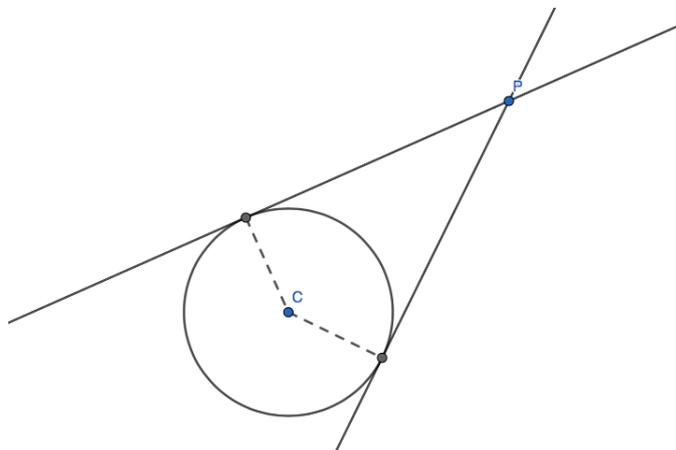


Figura 2: Rette passanti per  $P$  e tangenti alla circonferenza di centro  $C$  e raggio  $R$ .

### Svolgimento

La strategia che scegliamo di adottare è quella di scrivere l'equazione del fascio di rette proprio passanti per  $P$  e richiedere che la sua distanza dal centro  $C$  della circonferenza sia pari al raggio  $R$ . Il fascio di rette proprio  $r$  passante per  $P$  ha equazione

$$r \quad : \quad y - y_P = m(x - x_P). \quad (17)$$

Per determinare il coefficiente angolare  $m$  imponiamo che la distanza fra il fascio di rette e il centro della circonferenza sia pari al raggio. Se una retta  $r$  è scritta in forma implicita  $ax + by + c = 0$ , la sua distanza da un punto  $C$  è data dalla formula

$$d(C, r) = \frac{|ax_C + by_C + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (18)$$

Nel nostro caso:

$$mx - y + y_P - mx_P = 0, \quad (19)$$

$$d(C, r) = \frac{|mx_C - y_C + y_P - mx_P|}{\sqrt{m^2 + 1}}. \quad (20)$$

Se invece una retta è scritta in forma esplicita  $y = mx + q$ , allora la sua distanza da un punto  $C$  è data dalla formula

$$d(C, r) = \frac{|y_C - (mx_C + q)|}{\sqrt{1 + m^2}}. \quad (21)$$

Nel nostro caso:

$$y = mx + y_P - mx_P, \quad (22)$$

$$d(C, r) = \frac{|y_C - (mx_C + y_P - mx_P)|}{\sqrt{1 + m^2}}. \quad (23)$$

Ovviamente la distanza fra un punto e una retta non può dipendere dalla forma in cui si rappresenta la retta, infatti la (20) e la (23) coincidono. Il messaggio è che possiamo prendere una delle due strade indifferentemente. Imponiamo  $d(C, r) = R$  ed eleviamo al quadrato ottenendo

$$(mx_C - y_C + y_P - mx_P)^2 = R^2(1 + m^2). \quad (24)$$

Risolta per  $m$ , questa equazione determina i valori dei coefficienti angolari delle due rette passanti per  $P$  e tangenti alla circonferenza. Notiamo che, come per tutte le equazioni di secondo grado, le soluzioni possono essere due distinte, due coincidenti o nessuna. Cominciamo riordinando i termini

$$[(x_C - x_P)m + (y_P - y_C)]^2 = R^2(1 + m^2) \quad (25)$$

e chiamiamo per semplicità  $\Delta x \equiv x_P - x_C$  e  $\Delta y \equiv y_P - y_C$ , da cui

$$[(-\Delta x)m + \Delta y]^2 = R^2(1 + m^2). \quad (26)$$

$\Delta x$  e  $\Delta y$  rappresentano geometricamente quanto  $P$  è spostato rispetto a  $C$  lungo  $x$  e  $y$  rispettivamente. Riordiniamo l'equazione e risolviamo per  $m$

$$(\Delta x)^2 m^2 - 2 \Delta x \Delta y m + (\Delta y)^2 - R^2 m^2 - R^2 = 0 \quad (27)$$

$$[(\Delta x)^2 - R^2] m^2 - 2 \Delta x \Delta y m + (\Delta y)^2 - R^2 = 0 \quad (28)$$

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= \frac{2 \Delta x \Delta y \pm \sqrt{4(\Delta x)^2(\Delta y)^2 - 4[(\Delta x)^2 - R^2][(\Delta y)^2 - R^2]}}{2[(\Delta x)^2 - R^2]} = \\ &= \frac{\Delta x \Delta y \pm \sqrt{(\Delta x)^2(\Delta y)^2 - (\Delta x)^2(\Delta y)^2 + R^2[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2] - R^4}}{(\Delta x)^2 - R^2} = \\ &= \frac{\Delta x \Delta y \pm R\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 - R^2}}{(\Delta x)^2 - R^2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Riassumendo, la soluzione è

$$m_{1,2} = \frac{\Delta x \Delta y \pm R\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 - R^2}}{(\Delta x)^2 - R^2} \quad (30)$$

con  $\Delta x \equiv x_P - x_C$  e  $\Delta y \equiv y_P - y_C$ . Discutiamo adesso il risultato.

La prima osservazione è che la (30) ammette soluzione se l'argomento della radice è non-negativo, cioè

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 - R^2 \geq 0. \quad (31)$$

Ricordando le definizioni di  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , questo significa che  $P$  deve stare all'esterno della circonferenza. Geometricamente ha senso, infatti se  $P$  sta all'interno della circonferenza non c'è modo di disegnare rette passanti per  $P$  e tangenti alla circonferenza. Nel caso limite in cui  $P$  appartiene alla circonferenza, cioè  $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 - R^2 = 0$ , le due soluzioni sono coincidenti e pari a

$$m_1 = m_2 \equiv m = \frac{\Delta x \Delta y}{(\Delta x)^2 - R^2}. \quad (32)$$

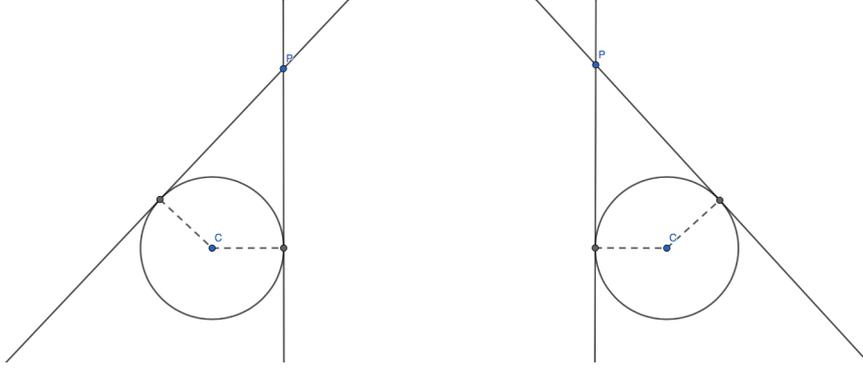


Figura 3: A sinistra il caso  $\Delta x = R$  e a destra il caso  $\Delta x = -R$ . La retta verticale corrisponde alla soluzione  $m = \infty$ , mentre la retta inclinata corrisponde alla (35).

La seconda osservazione è che se  $(\Delta x)^2 = R^2$  dobbiamo fare attenzione, infatti in tal caso il denominatore della (30) si annulla e pertanto  $m = \infty$  è soluzione. Geometricamente,  $(\Delta x)^2 = R^2$  corrisponde ai due casi mostrati in Figura 3. La figura mostra chiaramente la soluzione  $m = \infty$ , ma ci ricorda anche che esiste una seconda soluzione. Questa non emerge dalla (30) in quanto nel passaggio dalla (28) alla (29) abbiamo diviso per una quantità che, per  $(\Delta x)^2 = R^2$ , è zero. Se vogliamo recuperare la seconda soluzione dobbiamo tornare all'espressione (28) e porre  $(\Delta x)^2 = R^2$ , ottenendo

$$\Delta x = \pm R \quad \Rightarrow \quad \mp 2R \Delta y m + (\Delta y)^2 - R^2 = 0 \quad (33)$$

$$\pm 2R \Delta y m = (\Delta y)^2 - R^2. \quad (34)$$

Questa è un'equazione di primo grado in  $m$ , che giustamente ammette al più una soluzione. Se  $\Delta y \neq 0$ , questa è

$$m = \pm \frac{(\Delta y)^2 - R^2}{2R \Delta y} \quad (35)$$

dove il + corrisponde al caso  $\Delta x = R$  e il - al caso  $\Delta x = -R$ . Geometricamente,  $\Delta y \neq 0$  corrisponde al caso in cui  $P$  e  $C$  si trovano a due valori diversi della coordinata  $y$ , come mostrato in Figura 3. Se invece  $\Delta y = 0$  la (34) dà  $0 = R^2$ , che è impossibile, pertanto resta solo la soluzione  $m = \infty$  già discussa. Geometricamente, il caso  $\Delta y = 0$  è mostrato in Figura 4.

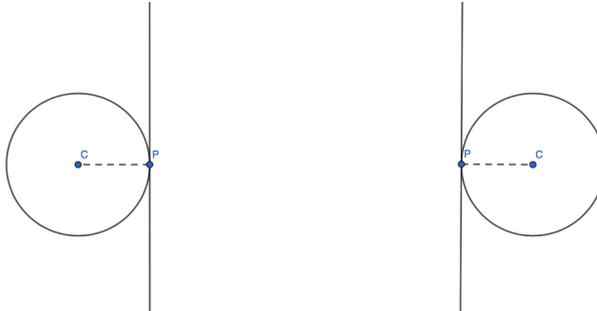


Figura 4: A sinistra il caso  $\Delta x = R$  e a destra il caso  $\Delta x = -R$ .

## Esercizi del 19/10/18

### Esercizio 06

(calcolo vettoriale)

Dimostrare la seguente espressione del doppio prodotto vettoriale

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}). \quad (36)$$

#### Svolgimento

Una strategia è quella di espandere i vettori  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  su una base ortonormale  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ ,

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k} \\ \vec{b} &= b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k} \\ \vec{c} &= c_1 \hat{i} + c_2 \hat{j} + c_3 \hat{k}, \end{aligned} \quad (37)$$

sostituire nel primo membro della (36), svolgere i prodotti, ricomporli e vedere che il risultato è il secondo membro della (36), la quale è quindi dimostrata. Questo calcolo “a forza bruta” è sicuramente corretto, ma lungo e poco istruttivo. Cerchiamo quindi una strategia più intelligente, che consiste nel ragionare sulle proprietà del prodotto scalare e vettoriale. La prima osservazione è che per  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  esistono solo due possibilità: o sono paralleli<sup>1</sup> o non lo sono. Se sono paralleli, cioè se  $\vec{c} = \lambda \vec{b}$ , la (36) è banalmente dimostrata, infatti il primo e il secondo membro sono rispettivamente

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \lambda \vec{b}) = \vec{0} \quad (38)$$

$$\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \lambda \vec{b}) - \lambda \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{0}, \quad (39)$$

dunque otteniamo l'identità  $\vec{0} = \vec{0}$ . Nel calcolo del primo membro abbiamo sfruttato il fatto che il prodotto vettoriale di un vettore con se stesso è nullo. Se  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  non sono paralleli individuano un piano, che chiamiamo  $\Pi$ , e che quindi contiene tutti i vettori dati da combinazioni lineari di  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$ . Guardiamo il primo membro della (36). Il prodotto vettoriale  $\vec{b} \wedge \vec{c}$  è un vettore ortogonale sia a  $\vec{b}$  che a  $\vec{c}$ , dunque ortogonale al piano  $\Pi$ . Ne segue che il prodotto vettoriale  $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$ , che è un vettore ortogonale sia ad  $\vec{a}$  sia a  $\vec{b} \wedge \vec{c}$ , appartiene al piano  $\Pi$ . Di conseguenza possiamo scriverlo come una combinazione lineare di  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  del tipo

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = C_1 \vec{b} + C_2 \vec{c} \quad (40)$$

dove  $C_1$  e  $C_2$  sono coefficienti. Essendo  $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$  ortogonale ad  $\vec{a}$ , se ne facciamo il prodotto scalare con  $\vec{a}$  troviamo zero,

$$\vec{a} \cdot [\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})] = C_1 \vec{a} \cdot \vec{b} + C_2 \vec{a} \cdot \vec{c} = 0. \quad (41)$$

Questa equazione è risolta da

$$C_1 = r \vec{a} \cdot \vec{c}, \quad C_2 = -r \vec{a} \cdot \vec{b} \quad (42)$$

---

<sup>1</sup>Notiamo che “paralleli” e “linearmente dipendenti” sono sinonimi.

come si può facilmente verificare, dove  $r$  è una costante arbitraria. Sostituendo la (42) nella (40) troviamo

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = r \left[ (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \right]. \quad (43)$$

D'altra parte i vettori  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  sono vettori qualunque, l'unica ipotesi che abbiamo richiesto è che  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  non siano paralleli. In altre parole, la (43) vale per ogni scelta di  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ , purché  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  non siano paralleli. Allora, per determinare  $r$ , facciamo una scelta particolare di  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  nella quale sappiamo calcolare i prodotti scalari e vettoriali, e il valore di  $r$  che troveremo sarà indipendente da questa scelta. Scegliamo ad esempio

$$\vec{a} \equiv \hat{i}, \quad \vec{b} \equiv \hat{k}, \quad \vec{c} \equiv \vec{a} = \hat{i}, \quad (44)$$

da cui i due membri dell'equazione

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \hat{i} \wedge (\hat{k} \wedge \hat{i}) = \hat{i} \wedge \hat{j} = \hat{k} \quad (45)$$

$$r \left[ (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \right] = r \left[ (\hat{i} \cdot \hat{i})\hat{k} - (\hat{i} \cdot \hat{k})\hat{i} \right] = r\hat{k}. \quad (46)$$

Uguagliandoli troviamo  $r = 1$ , che sostituito nella (43) dà infine la (36).

## Esercizio 07

(calcolo vettoriale)

Dato un vettore  $\vec{v}$ , si conoscono le sue rappresentazioni cartesiane rispetto a due sistemi di riferimento aventi la stessa origine, ma ruotati l'uno rispetto all'altro di un angolo  $\theta$  attorno all'asse  $z$ , il quale è comune ai due sistemi di riferimento. Determinare l'espressione dell'angolo di rotazione  $\theta$  in funzione delle componenti di  $\vec{v}$  nei due sistemi di riferimento.

$$\left[ \tan \theta = \frac{\frac{v'_x}{v'_y} - \frac{v_x}{v_y}}{1 + \frac{v_x v'_x}{v_y v'_y}} \right]$$

Svolgimento

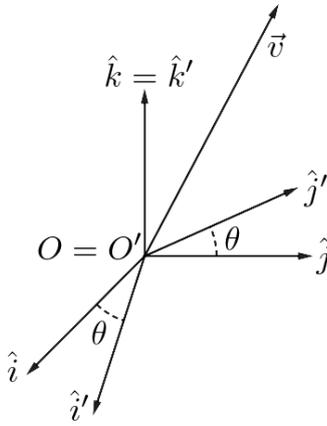


Figura 5

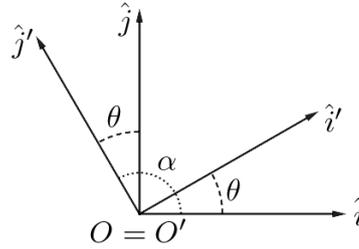


Figura 6

Ciò che il testo dice è che la situazione è quella mostrata in Figura 5, ciò che conosciamo è  $v_x, v_y, v_z, v'_x, v'_y, v'_z$  e ciò che vogliamo trovare è  $\theta$ . La strategia consiste nel legare le componenti di  $\vec{v}$  in un sistema di riferimento a quelle nell'altro facendo comparire  $\theta$ , dopodiché risolvere per  $\theta$  e scrivere  $\theta$  uguale a una funzione di  $v_x, v_y, v_z, v'_x, v'_y, v'_z$ . È chiaro che le componenti  $v_z, v'_z$  non danno alcuna informazione su  $\theta$ , quindi ci concentriamo sulle altre. Partiamo esprimendo  $\hat{i}', \hat{j}'$  in funzione di  $\hat{i}, \hat{j}, \theta$ . Per riuscirci è più facile immaginare di guardare la Figura 5 “dall'alto”, ossia considerare la Figura 6. Da essa troviamo

$$\hat{i}' = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}, \quad (47)$$

$$\hat{j}' = \cos \alpha \hat{i} + \sin \alpha \hat{j} = \cos \left( \frac{\pi}{2} + \theta \right) \hat{i} + \sin \left( \frac{\pi}{2} + \theta \right) \hat{j} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}. \quad (48)$$

Adesso proiettiamo  $\vec{v}$  su  $\hat{i}', \hat{j}'$  e troviamo  $v'_x, v'_y$  in funzione di  $v_x, v_y, \theta$

$$v'_x = \vec{v} \cdot \hat{i}' = \vec{v} \cdot (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}) = v_x \cos \theta + v_y \sin \theta, \quad (49)$$

$$v'_y = \vec{v} \cdot \hat{j}' = \vec{v} \cdot (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) = -v_x \sin \theta + v_y \cos \theta. \quad (50)$$

Sono due equazioni nelle variabili  $(\cos \theta, \sin \theta)$ , possiamo combinarle per ottenere una sola equazione in una sola funzione di  $\theta$ . Una scelta possibile è quella di raccogliere il termine

in  $\cos \theta$  da entrambe e dividere la prima per la seconda

$$v'_x = v_x \cos \theta \left( 1 + \frac{v_y}{v_x} \tan \theta \right), \quad v'_y = v_y \cos \theta \left( 1 - \frac{v_y}{v_x} \tan \theta \right) \quad (51)$$

$$\frac{v'_x}{v'_y} = \frac{v_x \cancel{\cos \theta} \left( 1 + \frac{v_y}{v_x} \tan \theta \right)}{v_y \cancel{\cos \theta} \left( 1 - \frac{v_y}{v_x} \tan \theta \right)} = \frac{v_x \left( 1 + \frac{v_y}{v_x} \tan \theta \right)}{v_y \left( 1 - \frac{v_y}{v_x} \tan \theta \right)}. \quad (52)$$

A questo punto, con un po' di algebra esplicitiamo  $\tan \theta$

$$1 + \frac{v_y}{v_x} \tan \theta = \frac{v'_x}{v'_y} \frac{v_y}{v_x} \left( 1 - \frac{v_y}{v_x} \tan \theta \right) \quad (53)$$

$$1 + \frac{v_y}{v_x} \tan \theta = \frac{v'_x}{v'_y} \frac{v_y}{v_x} - \frac{v'_x}{v'_y} \frac{v_y}{v_x} \tan \theta \quad (54)$$

$$\left( \frac{v_y}{v_x} + \frac{v'_x}{v'_y} \frac{v_y}{v_x} \tan \theta \right) \tan \theta = \frac{v'_x}{v'_y} \frac{v_y}{v_x} - 1 \quad (55)$$

$$\frac{v'_y}{v'_x} \left( 1 + \frac{v_x v'_x}{v_y v'_y} \right) \tan \theta = \frac{v'_y}{v'_x} \left( \frac{v'_x}{v'_y} - \frac{v_x}{v_y} \right) \quad (56)$$

$$\tan \theta = \frac{\frac{v'_x}{v'_y} - \frac{v_x}{v_y}}{1 + \frac{v_x v'_x}{v_y v'_y}}. \quad (57)$$

L'angolo di rotazione  $\theta$  sarà l'arctan di questa espressione, ma possiamo equivalentemente scegliere di lasciare la soluzione espressa nella forma (57).

## Esercizio 08

(cinematica)

Un punto compie il moto descritto dal seguente vettore posizione

$$\vec{r}(t) = 2 \cos(4t) \hat{i} + 2 \sin(4t) \hat{j} + (t - 3) \hat{k} \quad (58)$$

dove tutti i coefficienti numerici sono espressi nelle opportune unità di misura del SI. Calcolare l'espressione del versore tangente, del versore normale e del raggio di curvatura.

$$\left[ \begin{aligned} \hat{u}_t(t) &= \frac{1}{\sqrt{65}} \left( -8 \sin(4t) \hat{i} + 8 \cos(4t) \hat{j} + \hat{k} \right) \\ \hat{u}_n(t) &= -\cos(4t) \hat{i} - \sin(4t) \hat{j} \\ R(t) &= \frac{65}{32} \end{aligned} \right]$$

### Svolgimento

Innanzitutto, dall'espressione (58) della traiettoria, ci rendiamo conto che il moto è la composizione di un moto circolare sul piano  $xy$  e rettilineo uniforme lungo la direzione  $z$ , perciò è elicoidale di ampiezza costante, come mostrato in Figura 7.

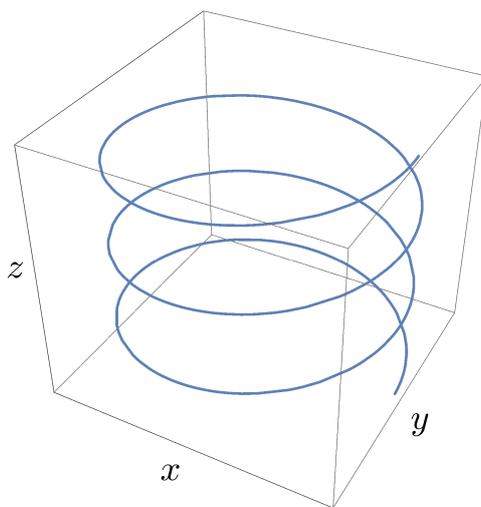


Figura 7: Moto curvilineo elicoidale di ampiezza costante.

Per quanto riguarda il calcolo del versore tangente  $\hat{u}_t(t)$ , ci ricordiamo che la velocità è in ogni punto tangente alla traiettoria. Allora possiamo esprimerlo come il vettore velocità diviso per il suo modulo, così che abbia direzione e verso tangenziali e modulo unitario, ossia

$$\hat{u}_t(t) = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)} \quad (59)$$

dove  $v(t) = |\vec{v}(t)|$ . Per trovare  $\vec{v}(t)$  usiamo la definizione di velocità come derivata della traiettoria rispetto al tempo

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = -8 \sin(4t) \hat{i} + 8 \cos(4t) \hat{j} + \hat{k}, \quad (60)$$

da cui il modulo

$$\begin{aligned} v(t) = |\vec{v}(t)| &= \sqrt{\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)} = \sqrt{64 \sin^2(4t) + 64 \cos^2(4t) + 1} = \\ &= \sqrt{64 (\sin^2(4t) + \cos^2(4t)) + 1} = \sqrt{64 + 1} = \sqrt{65}. \end{aligned} \quad (61)$$

Notiamo che il modulo della velocità è costante nel tempo, quindi il moto è curvilineo uniforme. Sostituiamo  $\vec{v}(t)$  e  $v(t)$  nell'espressione di  $\hat{u}_t(t)$  e troviamo quindi

$$\hat{u}_t(t) = \frac{1}{\sqrt{65}} \left( -8 \sin(4t) \hat{i} + 8 \cos(4t) \hat{j} + \hat{k} \right). \quad (62)$$

Passiamo adesso al calcolo del versore normale  $\hat{u}_n(t)$ . Dalla definizione di accelerazione come derivata della velocità rispetto al tempo, sappiamo che in un moto curvilineo l'accelerazione ha in generale una componente tangente alla traiettoria e una normale<sup>2</sup>:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (v(t) \hat{u}_t(t)) = \underbrace{\frac{dv(t)}{dt} \hat{u}_t(t)}_{\equiv \vec{a}_t(t)} + v(t) \underbrace{\frac{d\hat{u}_t(t)}{dt}}_{\equiv \vec{a}_c(t)} = \vec{a}_t(t) + \vec{a}_c(t), \quad (63)$$

dove  $\vec{a}_n(t)$  è normale alla traiettoria perché la derivata di un versore è sempre normale al versore stesso. Notiamo che mentre l'*accelerazione tangenziale*  $\vec{a}_t(t)$  può eventualmente essere nulla (questo succede se  $v(t)$  è costante nel tempo, cioè se il moto è uniforme), l'*accelerazione centripeta*  $\vec{a}_c(t)$  non può mai essere nulla, infatti, se il moto è curvilineo,  $d\hat{u}_t(t)/dt \neq \vec{0}$  sempre. In altre parole, un oggetto curva se e solo se ha un'accelerazione centripeta. Nel nostro caso il moto è uniforme ( $v(t)$  è costante nel tempo), quindi  $\vec{a}_t(t) = \vec{0}$  e  $\vec{a}(t) = \vec{a}_c(t)$ , cioè l'accelerazione è solo centripeta, ossia solo diretta in modo normale alla traiettoria. Possiamo quindi usare lo stesso metodo che abbiamo usato per calcolare il versore tangente

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_c(t) = a_c(t) \hat{u}_n(t) \quad \Rightarrow \quad \hat{u}_n(t) = \frac{\vec{a}_c(t)}{a_c(t)} \quad (64)$$

$$\vec{a}_c(t) = \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -32 \cos(4t) \hat{i} - 32 \sin(4t) \hat{j} \quad (65)$$

$$a_c(t) = |\vec{a}_c(t)| = \sqrt{\vec{a}_c(t) \cdot \vec{a}_c(t)} = \sqrt{(32)^2 \cos^2(4t) + (32)^2 \sin^2(4t)} = \sqrt{(32)^2} = 32 \quad (66)$$

$$\hat{u}_n(t) = -\cos(4t) \hat{i} - \sin(4t) \hat{j}. \quad (67)$$

Notiamo che anche il modulo dell'accelerazione centripeta è costante nel tempo. Se vogliamo controllare che il versore tangente e il versore normale (quindi la velocità e l'accelerazione centripeta rispettivamente) siano ortogonali, possiamo farne il prodotto scalare

$$\begin{aligned} \hat{u}_t(t) \cdot \hat{u}_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{65}} \left( -8 \sin(4t) \hat{i} + 8 \cos(4t) \hat{j} + \hat{k} \right) \cdot \left( -\cos(4t) \hat{i} - \sin(4t) \hat{j} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{65}} (8 \sin(4t) \cos(4t) - 8 \cos(4t) \sin(4t)) = 0, \end{aligned} \quad (68)$$

<sup>2</sup>Normale, ortogonale e perpendicolare sono sinonimi.

dunque sono effettivamente ortogonali.

In un moto curvilineo generico, il raggio di curvatura  $R(t)$  varia nel tempo e rappresenta il raggio del cerchio osculatore istante per istante. È legato all'accelerazione centripeta e alla velocità dall'equazione

$$a_c(t) = \frac{v^2(t)}{R(t)} \quad \Rightarrow \quad R(t) = \frac{v^2(t)}{a_c(t)}. \quad (69)$$

Nel nostro caso, sia  $v(t)$  che  $a_c(t)$  sono costanti, dunque anche il raggio di curvatura sarà costante e pari a

$$R(t) = \frac{65}{32}. \quad (70)$$

Potevamo aspettarci che fosse costante, infatti il moto è elicoidale di ampiezza costante. Se l'ampiezza dell'elica fosse dipesa dal tempo, il raggio di curvatura non sarebbe stato costante.

Notazione: se una grandezza  $x(t)$  risulta essere costante nel tempo, solitamente si omette la dipendenza dal tempo e si scrive semplicemente  $x$ . Non c'è alcun motivo di esplicitare una dipendenza temporale che di fatto non c'è. In questo esercizio abbiamo trovato che  $v(t)$ ,  $a_c(t)$ ,  $R(t)$  sono tutti costanti nel tempo, dunque avremmo potuti indicarli equivalentemente con  $v$ ,  $a_c$ ,  $R$  semplicemente.

## Esercizi del 25/10/18

### Esercizio 09

(dinamica)

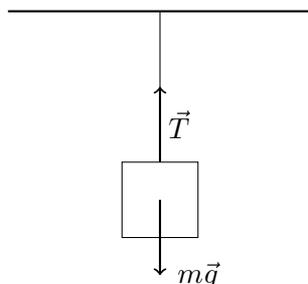
Un ascensore di massa  $m = 300 \text{ kg}$  è appeso a una fune d'acciaio di massa trascurabile. Determinare la tensione della fune quando l'ascensore si muove di moto uniforme e quando sale con un'accelerazione costante  $a = 0,5 \text{ m/s}^2$ .

$$[T = 2.943 \text{ N}]$$

$$T = 3.093 \text{ N}]$$

#### Svolgimento

Il primo passo è disegnare il sistema e le forze che agiscono su di esso, dopodiché la strategia consiste nello scrivere le equazioni di moto  $\vec{F} = m\vec{a}$  nei due casi richiesti, proiettarle lungo la direzione del moto e risolvere per la tensione.



Come mostrato in figura, le uniche due forze che agiscono sull'ascensore sono la forza peso  $m\vec{g}$  e la tensione  $\vec{T}$ . La risultante delle forze<sup>3</sup> è dunque  $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{T}$ .

Nel primo caso il testo dice che il moto è uniforme, cioè la velocità è costante. Ne segue che, essendo il moto rettilineo, l'accelerazione è nulla<sup>4</sup>,  $\vec{a} = \vec{0}$ , da cui le equazioni di moto

$$m\vec{g} + \vec{T} = \vec{0}. \quad (71)$$

Adesso dobbiamo proiettarle. In generale possiamo scegliere una base qualunque lungo cui proiettarle, e naturalmente il risultato non deve dipendere da questa scelta. In pratica solitamente esistono basi più convenienti di altre, nel senso che agevolano il calcolo, dunque merita cercarle. In questo esercizio la forza peso e la tensione agiscono lungo la direzione verticale, la prima verso il basso e la seconda verso l'alto, pertanto il moto è unidimensionale. La direzione lungo cui merita proiettare è quindi la verticale. Dobbiamo

---

<sup>3</sup>Ricordiamo che la risultante delle forze è data dalla somma vettoriale di tutte le forze agenti sul sistema. Esattamente come in geometria la somma vettoriale di due vettori  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  è scritta come  $\vec{v} + \vec{w}$  indipendentemente dalla loro orientazione reciproca, anche nella risultante delle forze i vettori devono sempre essere sommati indipendentemente dalla loro orientazione reciproca. Sarà la proiezione lungo una base scelta a determinare il segno dei corrispondenti moduli, ma finché l'equazione è vettoriale, i vettori devono essere sommati.

<sup>4</sup>Se il moto fosse stato curvilineo, l'uniformità avrebbe implicato che fosse nulla l'accelerazione tangenziale, ma non quella centripeta, pertanto avremmo potuto scrivere solo  $\vec{a}_t = \vec{0}$  e non  $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c = \vec{0}$ .

scegliere un verso positivo e un verso negativo, ma ovviamente il risultato non dipenderà da questa scelta. Per convincercene proviamo prima a scegliere come verso positivo quello verso l'alto, e dopo quello verso il basso. Nel primo caso abbiamo che  $\vec{T}$  è diretta lungo il verso positivo, dunque il suo modulo avrà il segno positivo, mentre  $m\vec{g}$  è diretta lungo il verso negativo, dunque il suo modulo avrà il segno negativo:

$$T - mg = 0. \quad (72)$$

Più formalmente, ciò che abbiamo implicitamente fatto è stato scegliere una base costituita da un versore  $\hat{e}$  diretto lungo la verticale verso l'alto e calcolato il prodotto scalare  $(m\vec{g} + \vec{T}) \cdot \hat{e} = \vec{0} \cdot \hat{e}$ , che dà la (72). Nel secondo caso la situazione è ribaltata, da cui

$$mg - T = 0. \quad (73)$$

Chiaramente la (72) e la (73) coincidono, come volevasi dimostrare. Poiché le due scelte sono equivalenti, spesso si omette di dire quale si adotti, è sufficiente che i segni reciproci dei vari termini siano corretti. Da esse segue

$$T = mg. \quad (74)$$

L'analisi dimensionale conferma facilmente che  $T$  ha le giuste dimensioni, pertanto possiamo sostituire i valori numerici e ottenere il risultato

$$T \simeq 300 \text{ kg} \times 9,81 \text{ m/s}^2 \simeq 2.943 \text{ N}. \quad (75)$$

Nel secondo punto, il testo dice di considerare l'ascensore che sale con accelerazione costante di modulo  $a = 0,5 \text{ m/s}^2$ . Le equazioni di moto sono quindi

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}. \quad (76)$$

Il moto è ancora unidimensionale lungo la verticale, in particolare è rettilineo uniformemente accelerato. Proiettandolo lungo la verticale otteniamo

$$T - mg = ma, \quad (77)$$

da cui la tensione

$$T = m(g + a). \quad (78)$$

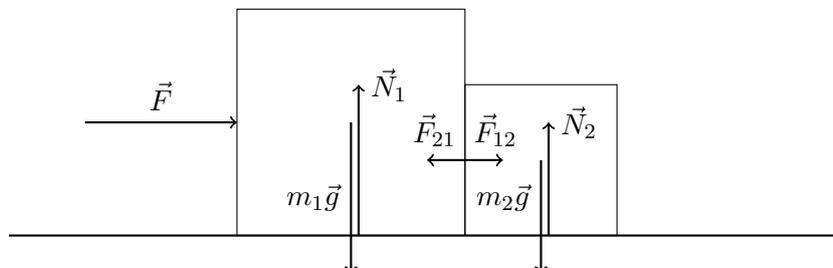
Di nuovo, dimensioni sono corrette, dunque sostituiamo i valori numerici ottenendo

$$T \simeq 300 \text{ kg} (9,81 + 0,5) \text{ m/s}^2 \simeq 3.093 \text{ N}. \quad (79)$$

## Esercizio 10

(dinamica)

Due blocchi di masse rispettivamente  $m_1 = 2 \text{ kg}$  e  $m_2 = 1 \text{ kg}$  sono appoggiati su di un piano orizzontale liscio a contatto uno con l'altro. Una forza orizzontale  $\vec{F}$  di  $3 \text{ N}$  è applicata sul blocco di massa  $m_1$  come in figura.



Determinare l'accelerazione con cui si muovono i due blocchi e la forza che si esercita tra di essi durante il moto.

$$[a = 1 \text{ m/s}^2 \\ F_{12} = F_{21} = 1 \text{ N}]$$

### Svolgimento

La traccia chiede esplicitamente di ricavare un'accelerazione e una forza, il che ci fa immediatamente capire che la strategia consiste nell'utilizzare le leggi di Newton per scrivere le equazioni di moto e ricavare quanto richiesto.

Sul blocco di massa  $m_1$  agiscono la forza peso  $m_1\vec{g}$ , la reazione vincolare  $\vec{N}_1$ , la forza applicata  $\vec{F}$  e la forza  $\vec{F}_{21}$  che, a causa del contatto, viene esercitata dal blocco di massa  $m_2$ . Sul blocco di massa  $m_2$  agiscono la forza peso  $m_2\vec{g}$ , la reazione vincolare  $\vec{N}_2$  e la forza  $\vec{F}_{12}$  esercitata dal blocco  $m_1$  a causa del contatto. La terza legge di Newton ci dice che  $\vec{F}_{12}$  e  $\vec{F}_{21}$  non sono indipendenti, ma sono legate da

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \quad (80)$$

ossia hanno lo stesso modulo ( $F_{12} = F_{21}$ ), la stessa direzione, ma verso opposto ( $\vec{F}_{12} = F_{12}\hat{u}_{12}$ ,  $\vec{F}_{21} = F_{21}\hat{u}_{21}$ ,  $\hat{u}_{12} = -\hat{u}_{21}$ ). Dalla seconda legge di Newton otteniamo quindi le equazioni di moto per i due blocchi

$$\vec{F} + m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{21} = m_1\vec{a}_1 \quad (81a)$$

$$m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{12} = m_2\vec{a}_2, \quad (81b)$$

dove al primo membro riconosciamo le risultanti di tutte le forze agenti sul primo e sul secondo blocco rispettivamente. Dal testo si evince che i due blocchi si muovono insieme: realizzare questa condizione significa imporre

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2 \equiv \vec{a}. \quad (82)$$

Adesso proiettiamo le (81) su una base che ci apprestiamo a scegliere. Come al solito, possiamo scegliere una base qualunque lungo cui proiettare, e il risultato non deve dipendere da questa scelta, tuttavia, come spesso accade, esistono basi più convenienti di altre. Dalla figura nel testo risulta evidente che tutte le forze sono orizzontali o verticali, pertanto merita scegliere una base ortonormale in cui un versore giace lungo la direzione verticale e l'altro lungo l'orizzontale. Resta da scegliere il verso di tali versori, ma naturalmente il risultato non dipende neanche da questa scelta, che dunque non esplicitiamo. È sufficiente che i segni reciproci delle proiezioni delle forze lungo dette direzioni siano corretti. Le proiezioni delle (81) lungo la direzione orizzontale sono

$$F - F_{21} = m_1 a \quad (83a)$$

$$F_{12} = m_2 a, \quad (83b)$$

mentre le proiezioni lungo la direzione verticale sono

$$m_1 g - N_1 = 0 \quad (84a)$$

$$m_2 g - N_2 = 0. \quad (84b)$$

Le (84) forniscono semplicemente il modulo incognito delle reazioni vincolari  $N_1 = m_1 g$  e  $N_2 = m_2 g$ . Dalla terza legge di Newton (80) segue che  $F_{12} = F_{21}$ , pertanto sostituiamo la (83b) nella (83a) e risolviamo per l'accelerazione

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}. \quad (85)$$

Il secondo membro ha giustamente le dimensioni di un'accelerazione. Avendo fatto il controllo dimensionale possiamo sostituire i valori di  $F, m_1, m_2$  ottenendo così

$$a = \frac{3 \text{ N}}{2 \text{ kg} + 1 \text{ kg}} = \frac{3 \text{ N}}{3 \text{ kg}} = 1 \text{ m/s}^2. \quad (86)$$

Per quanto riguarda la seconda richiesta, basta sostituire l'accelerazione appena trovata in una delle (83), ottenendo

$$F_{12} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F. \quad (87)$$

L'analisi dimensionale mostra facilmente che il secondo membro ha le dimensioni di una forza, dunque possiamo sostituire i valori numerici ed ottenere

$$F_{12} = F_{21} = \frac{1 \text{ kg}}{2 \text{ kg} + 1 \text{ kg}} 3 \text{ N} = \frac{1 \text{ kg}}{3 \text{ kg}} 3 \text{ N} = 1 \text{ N}. \quad (88)$$

Discutiamo brevemente il risultato (85). L'equazione mostra che tutto va come se, invece di avere due blocchi di masse  $m_1$  e  $m_2$ , avessimo un unico blocco di massa  $m = m_1 + m_2$ . Questo è coerente con la condizione (82), che esprime il fatto che i due blocchi si muovono insieme. In altre parole, non fa differenza avere due o più blocchi (ciascuno con la sua massa) che si muovono insieme, oppure un unico blocco di massa pari alla somma delle masse dei vari blocchi, come potevamo aspettarci intuitivamente.

## Esercizio 11

(dinamica)

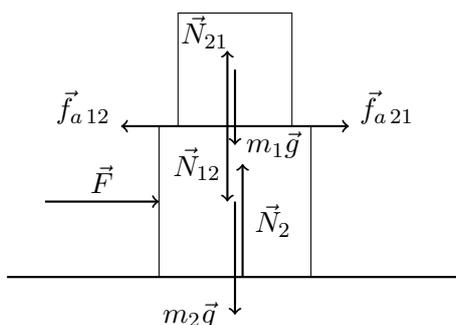
Un blocco scabro di massa  $m_1 = 4 \text{ kg}$  è appoggiato sopra un altro blocco di massa  $m_2 = 6 \text{ kg}$ , posto a sua volta su di un tavolo orizzontale liscio. Dato  $\mu = 0,8$  il coefficiente di attrito tra i due blocchi, determinare:

- la massima forza orizzontale  $\vec{F}_{\max}$  che può essere applicata al blocco inferiore in modo tale che i due blocchi si muovano insieme.
- l'accelerazione dei blocchi quando la forza applicata è pari alla metà del valore massimo di cui sopra.

$$[F_{\max} = 78,5 \text{ N} \\ a = 1,3 \text{ m/s}^2]$$

### Svolgimento

Per prima cosa rappresentiamo graficamente il sistema e le forze che vi agiscono.



Le forze che agiscono sul blocco di massa  $m_1$  sono: la forza peso  $m_1\vec{g}$ , la reazione vincolare  $\vec{N}_{21}$  esercitata dal blocco di massa  $m_2$  e la forza di attrito  $\vec{f}_{a21}$  esercitata anch'essa dal blocco di massa  $m_2$ . Le forze che agiscono sul blocco di massa  $m_2$  sono: la forza peso  $m_2\vec{g}$ , la reazione vincolare  $\vec{N}_2$ , la forza  $\vec{F}$ , la reazione vincolare  $\vec{N}_{12}$  esercitata dal blocco di massa  $m_1$  e la forza di attrito  $\vec{f}_{a12}$  esercitata anch'essa dal blocco di massa  $m_1$ . Le forze  $\vec{N}_{12}$  e  $\vec{N}_{21}$  sono legate fra loro dalla terza legge di Newton, e così anche  $\vec{f}_{a12}$  e  $\vec{f}_{a21}$ :

$$\vec{N}_{12} = -\vec{N}_{21} \quad (89)$$

$$\vec{f}_{a12} = -\vec{f}_{a21}, \quad (90)$$

ossia, rispettivamente, hanno stesso modulo e direzione, ma verso opposto. Chiamiamo per semplicità i moduli come

$$N_{12} = N_{21} \equiv N_1, \quad f_{a12} = f_{a21} \equiv f_a. \quad (91)$$

Mentre il blocco di massa  $m_2$  poggia su un vincolo<sup>5</sup>, che per sua stessa natura è inamovibile, il blocco di massa  $m_1$  poggia sul blocco di massa  $m_2$ , che invece è un oggetto

<sup>5</sup>Ricordiamo che un *vincolo* è un oggetto ideale fisso che costringe (vincola) il sistema a soddisfare precise condizioni geometriche: non può in alcun modo essere messo in moto, risponde semplicemente a sollecitazioni da parte del sistema restando immobile.

dinamico soggetto alle leggi di Newton. Per questo compaiono le forze  $\vec{N}_{12}$  e  $\vec{f}_{a12}$ : è la terza legge di Newton che ne impone l'esistenza. Dobbiamo inoltre fare attenzione al fatto che  $\vec{N}_{21}$  e  $\vec{f}_{a21}$  agiscono solo sul blocco di massa  $m_1$  (quindi compaiono solo nelle sue equazioni di moto), mentre le forze  $\vec{N}_{12}$  e  $\vec{f}_{a12}$  agiscono solo sul blocco di massa  $m_2$  (quindi compaiono solo nelle sue equazioni di moto).

Infine, per capire come disegnare la forza di attrito  $\vec{f}_{a21}$ , dobbiamo tener presente che l'attrito si oppone sempre al moto. Se fra i due blocchi non vi fosse alcun attrito, il blocco di massa  $m_2$  si muoverebbe verso destra sotto l'azione della forza  $\vec{F}$ , mentre la risultante delle forze orizzontali sul blocco di massa  $m_1$  sarebbe nulla, pertanto esso resterebbe immobile, il blocco di massa  $m_2$  gli "scivolerebbe" sotto e, quando gli venisse a mancare il suo appoggio, cadrebbe sotto l'azione della forza peso  $m_1\vec{g}$ . La traccia dice che i due blocchi si muovono insieme, il che significa che l'attrito si oppone a questa tendenza (detta *inerzia*) del blocco di massa  $m_1$  a non muoversi, a "restare indietro" rispetto all'altro blocco, lo obbliga a muoversi nella stessa direzione e verso del blocco di massa  $m_2$ , da cui la sua rappresentazione in figura come un vettore concorde con il moto dell'altro blocco.

Scriviamo finalmente le equazioni di moto dei due blocchi

$$m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{f}_{a21} = m_1\vec{a}_1 \quad (92a)$$

$$m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F} + \vec{N}_{12} + \vec{f}_{a12} = m_2\vec{a}_2. \quad (92b)$$

Se  $\vec{F}_{\max}$  è il valore massimo della forza  $\vec{F}$  che può essere esercitata in modo che i due blocchi si muovano insieme (cioè senza che il blocco di massa  $m_2$  scivoli via sotto il blocco di massa  $m_1$ ), dev'essere

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2 \equiv \vec{a} \quad (93)$$

$$f_a = \mu N_1. \quad (94)$$

Ancora una volta, tutte le forze sono orizzontali o verticali, dunque proiettiamo le equazioni di moto (92) lungo queste direzioni. Lungo l'orizzontale abbiamo

$$f_a = m_1 a \quad (95a)$$

$$F_{\max} - f_a = m_2 a, \quad (95b)$$

e lungo la verticale abbiamo

$$-m_1 g + N_1 = 0 \quad (96a)$$

$$-m_2 g + N_2 - N_1 = 0. \quad (96b)$$

Le (96) forniscono le reazioni vincolari incognite

$$N_1 = m_1 g \quad (97a)$$

$$N_2 = m_2 g + N_1 = (m_1 + m_2)g. \quad (97b)$$

Ricavando  $a$  dalla (95a) e sostituendo nella seconda otteniamo

$$a = \frac{f_a}{m_1} = \frac{\mu N_1}{m_1} = \frac{\mu m_1 g}{m_1} = \mu g \quad (98a)$$

$$F_{\max} = m_2 a + f_a = \mu m_2 g + \mu N_1 = \mu m_2 g + \mu m_1 g = \mu(m_1 + m_2)g. \quad (98b)$$

L'analisi dimensionale ci conferma che le dimensioni delle due equazioni sono corrette, quindi possiamo procedere sostituendo i valori numerici per ricavare il modulo  $F_{\max}$

$$F_{\max} = 0,8 (4 \text{ kg} + 6 \text{ kg}) 9,81 \text{ m/s}^2 \simeq 78,5 \text{ N}. \quad (99)$$

Per quanto riguarda la seconda richiesta, basta sostituire  $F = F_{\max}/2$  nella (95b) e risolvere per  $a$

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{m_2} \left( \frac{F_{\max}}{2} - m_1 \right) g = \frac{1}{m_2} \left[ \frac{\mu}{2} (m_1 + m_2) g - \mu N_1 \right] = \\ &= \frac{\mu}{m_2} \left( \frac{m_1 + m_2}{2} - m_1 \right) g = \frac{\mu}{2} \frac{m_2 - m_1}{m_2} g = \frac{\mu}{2} \left( 1 - \frac{m_1}{m_2} \right) g. \end{aligned} \quad (100)$$

Il coefficiente di attrito e il contenuto della parentesi sono adimensionali, pertanto le dimensioni del risultato sono corrette. Possiamo quindi sostituire i valori numerici ottenendo

$$a \simeq \frac{0,8}{2} \left( 1 - \frac{4 \text{ kg}}{6 \text{ kg}} \right) 9,81 \text{ m/s}^2 \simeq 1,3 \text{ m/s}^2. \quad (101)$$

Notiamo dalla (100) che se fosse  $m_1 = m_2$ , l'accelerazione  $a$  sarebbe nulla.

## Esercizio 12

(dinamica)

Consideriamo una molla di costante elastica  $k$  su un piano orizzontale liscio. Sia un estremo della molla vincolato a un punto del piano e l'altro estremo libero di muoversi, e sia  $m$  la massa di un oggetto ancorato all'estremo libero della molla. Supponiamo per semplicità che la molla sia così corta da poter approssimare la sua lunghezza di equilibrio come se fosse nulla,  $l_{\text{eq}} \simeq 0$ . Scegliamo sul piano un sistema di riferimento ortonormale con l'origine centrata nell'estremo vincolato della molla, e supponiamo che all'istante iniziale  $t_0 = 0$  l'oggetto di massa  $m$  si trovi nella posizione iniziale  $\vec{r}(t_0) = (x_0, 0)$  e abbia la velocità iniziale  $\vec{v}(t_0) = (0, v_0)$ . Determinare la legge oraria  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$  dell'oggetto di massa  $m$ .

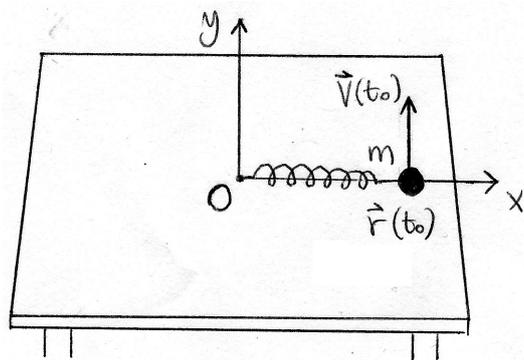


Figura 8

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 \cos(\omega t) \\y(t) &= \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \\ \omega &\equiv \sqrt{k/m}\end{aligned}$$

### Svolgimento

La traccia chiede di determinare la legge oraria, cioè la traiettoria, e tutto ciò che conosciamo sono le forze. Questo suggerisce che la strategia cominci con l'impostare le equazioni di moto e vedere che informazioni se ne riescono a ricavare. Le forze che agiscono sulla massa  $m$  sono: la forza peso  $m\vec{g}$ , la reazione vincolare  $\vec{N}$  e la forza elastica  $\vec{f}_{\text{el}}$ . Le equazioni di moto sono presto date:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{f}_{\text{el}} = m\vec{a}. \quad (102)$$

La forza peso e la reazione vincolare sono ortogonali al piano su cui avviene il moto, e dato che il moto avviene sul piano sono tali da bilanciarsi, ossia  $m\vec{g} + \vec{N} = \vec{0}$ . Sul piano abbiamo invece  $\vec{f}_{\text{el}} = m\vec{a}$ . Dalla legge di Hooke sappiamo che la forza elastica è una forza di richiamo, cioè cerca di riportare la molla alla sua lunghezza di equilibrio, dunque ha la direzione dell'allungamento (o accorciamento) ma verso opposto, e il suo modulo è  $f_{\text{el}} = k \Delta l$ , dove  $\Delta l = l - l_{\text{eq}}$  è l'allungamento (o accorciamento). In questo esercizio, per

semplicità, la lunghezza di equilibrio è nulla, quindi  $f_{el} = kl$ . La proiezione delle equazioni di moto  $\vec{f}_{el} = m\vec{a}$  lungo le direzioni  $x$  e  $y$  sono quindi

$$ma_x = -kx \quad (103a)$$

$$ma_y = -ky \quad (103b)$$

dove ripetiamo che il segno  $-$  al secondo membro è dovuto al fatto che la forza elastica è una forza di richiamo, che quindi si *oppone* all'allungamento (o accorciamento). D'altra parte l'accelerazione è la derivata seconda della traiettoria rispetto al tempo, pertanto possiamo riscrivere le (103) come<sup>6</sup>

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (104a)$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad (104b)$$

dove abbiamo definito  $\omega^2 \equiv k/m$ . Controlliamo le dimensioni di  $\omega$ , ricordando che le dimensioni della costante elastica sono quelle di una forza diviso per una massa

$$[\omega] = \left( \frac{[k]}{[m]} \right)^{1/2} = \left( \frac{MLT^{-2}L^{-1}}{M} \right)^{1/2} = (T^{-2})^{1/2} = T^{-1}. \quad (105)$$

Dimensionalmente  $\omega$  è una frequenza, pertanto è appunto detta *frequenza* di oscillazione. Le (104) sono le equazioni dell'*oscillatore armonico bidimensionale*, un sistema molto famoso e molto importante in Fisica. Nel nostro caso la frequenza di oscillazione è la stessa lungo le direzioni  $x$  e  $y$ , ma in linea di principio potrebbero essere diverse. Il sistema di equazioni differenziali (104) ha una soluzione ben nota, data da

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \quad (106a)$$

$$y(t) = B_1 \cos(\omega t + \phi_1) + B_2 \sin(\omega t + \phi_2), \quad (106b)$$

dove  $A_1, A_2, B_1, B_2$  sono costanti arbitrarie dette *ampiezze*, e  $\varphi_1, \varphi_2, \phi_1, \phi_2$  sono anch'esse arbitrarie e dette *fasi*. Le ampiezze  $A_1, A_2$  non possono essere entrambe nulle, e così le  $B_1, B_2$ , mentre le fasi  $\varphi_1, \varphi_2, \phi_1, \phi_2$  sono completamente arbitrarie. Possiamo convincerci che le (106) sono effettivamente soluzioni delle (104) derivandole due volte rispetto al tempo e osservando che soddisfano le (104):

$$\dot{x}(t) = -\omega A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \omega A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (107a)$$

$$\dot{y}(t) = -\omega B_1 \sin(\omega t + \phi_1) + \omega B_2 \cos(\omega t + \phi_2) \quad (107b)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) - \omega^2 A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = -\omega^2 x(t) \quad (108a)$$

$$\ddot{y}(t) = -\omega^2 B_1 \cos(\omega t + \phi_1) - \omega^2 B_2 \sin(\omega t + \phi_2) = -\omega^2 y(t) \quad (108b)$$

come volevasi dimostrare. Per determinare le ampiezze e le fasi dobbiamo utilizzare le condizioni iniziali date nella traccia, che sono

$$x(0) = x_0 \quad (109a) \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (110a)$$

$$y(0) = 0, \quad (109b) \quad \dot{y}(0) = v_0. \quad (110b)$$

---

<sup>6</sup>Notazione: la derivata di una grandezza  $x$  rispetto al tempo si può indicare equivalentemente come  $dx/dt$  oppure come  $\dot{x}$ , da cui la derivata seconda  $d^2x/dt^2 = \ddot{x}$  e così via.

Cominciamo calcolando la (107a) per  $t = 0$  e uguagliandola alla (110a)

$$\dot{x}(0) = -\omega A_1 \sin \varphi_1 + \omega A_2 \cos \varphi_2 = 0 \quad (111)$$

da cui

$$\sin \varphi_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = 0 \quad (112a)$$

$$\cos \varphi_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}. \quad (112b)$$

Sostituendo nella (106a) troviamo

$$x(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \cos(\omega t) = (A_1 + A_2) \cos(\omega t), \quad (113)$$

dove abbiamo sfruttato la proprietà della trigonometria per cui  $\sin(\theta + \pi/2) = \cos \theta$ . Calcoliamo per  $t = 0$  e imponiamo l'uguaglianza con la (109a)

$$x(0) = A_1 + A_2 = x_0. \quad (114)$$

Otteniamo infine

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t). \quad (115)$$

Adesso ripetiamo lo stesso procedimento per  $y(t)$ , quindi calcoliamo la (106b) per  $t = 0$  e imponiamo l'uguaglianza con la (109b)

$$y(0) = B_1 \cos \phi_1 + B_2 \sin \phi_2 = 0 \quad (116)$$

$$\cos \phi_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_1 = \frac{\pi}{2} \quad (117a)$$

$$\sin \phi_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_2 = 0 \quad (117b)$$

$$y(t) = B_1 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + B_2 \sin(\omega t) = -B_1 \sin(\omega t) + B_2 \sin(\omega t) = (B_2 - B_1) \sin(\omega t), \quad (118)$$

dove abbiamo sfruttato la proprietà della trigonometria per cui  $\cos(\theta + \pi/2) = -\sin \theta$ . Deriviamo rispetto al tempo, calcoliamo per  $t = 0$  e imponiamo l'uguaglianza con la (110b)

$$\dot{y}(t) = \omega(B_2 - B_1) \cos(\omega t) \quad (119)$$

$$\dot{y}(0) = \omega(B_2 - B_1) = v_0 \quad \Rightarrow \quad B_2 - B_1 = \frac{v_0}{\omega}. \quad (120)$$

Otteniamo infine

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t). \quad (121)$$

Riassumendo, la traiettoria è

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos(\omega t) \\ \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \end{pmatrix}, \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (122)$$

L'equazione è evidentemente quella di un'ellisse centrata nell'origine, ma possiamo convincercene esplicitando  $\sin(\omega t)$  e  $\cos(\omega t)$  e sfruttando la relazione fondamentale della trigonometria  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

$$\cos(\omega t) = \frac{x(t)}{x_0} \quad , \quad \sin(\omega t) = \frac{y(t)}{\frac{v_0}{\omega}} \quad (123)$$

$$\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x(t)}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y(t)}{\frac{v_0}{\omega}}\right)^2 = 1, \quad (124)$$

che è proprio l'equazione di un'ellisse centrata nell'origine, come volevasi dimostrare.

L'oscillatore armonico è molto importante in Fisica, sia classica che quantistica, e in certa misura modella il comportamento di un atomo in cui un elettrone orbita attorno al nucleo.

## Esercizi del 09/11/18

### Esercizio 13

(dinamica: equazioni di moto e conservazione dell'energia meccanica)

Discutere il moto di un pendolo confrontando l'approccio delle equazioni di moto e quello della conservazione dell'energia meccanica.

#### Svolgimento

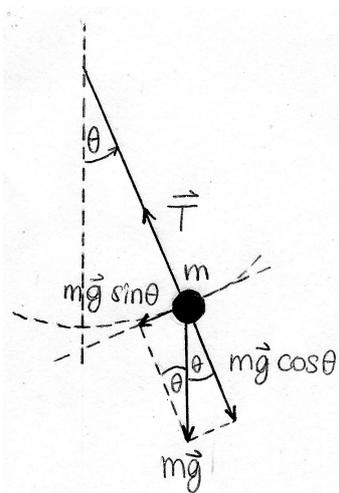


Figura 9

Partiamo dall'approccio delle equazioni di moto. Siano  $m$  e  $l$  la massa e la lunghezza del pendolo rispettivamente, e  $\theta$  l'angolo formato rispetto alla verticale. Le forze che agiscono sul pendolo sono la forza peso e la tensione, pertanto le equazioni del moto sono

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}. \quad (125)$$

Proiettandole lungo le direzioni tangenziale e radiale della traiettoria otteniamo

$$ma_t = -mg \sin \theta \quad (126a)$$

$$ma_c = T - mg \cos \theta, \quad (126b)$$

dove  $a_t$  e  $a_c$  sono l'accelerazione tangenziale e centripeta rispettivamente, essendo il moto circolare. Non è difficile immaginare che la tensione vari da punto a punto, intuitivamente ci aspettiamo infatti una tensione massima nel punto più basso della traiettoria e minima nel punto più alto, dunque possiamo dire che il modulo  $T$  dipende dall'angolo  $\theta$ . Dalle equazioni di moto è dunque chiaro che anche le due componenti dell'accelerazione, come tutte le altre grandezze, sono funzioni dell'angolo  $\theta$ , che a sua volta è una funzione del tempo  $\theta(t)$ . In altre parole, possiamo descrivere il moto in funzione dell'unica variabile  $\theta$ .

La (126b) dà informazioni sul modulo della tensione, che vale<sup>7</sup>

$$T(\theta) = mg \cos \theta + \frac{mv^2(\theta)}{l^2}. \quad (127)$$

La (126a) dà informazioni sul moto vero e proprio:

$$a_t(\theta) = -g \sin \theta. \quad (128)$$

Essendo  $\sin \theta$  una funzione periodica, il moto è a sua volta periodico, come ci aspettiamo. Ricordando che l'accelerazione tangenziale è la derivata della velocità rispetto al tempo, abbiamo

$$\dot{v}(\theta) = -g \sin \theta \quad (129)$$

$$v(\theta) = -g \int_{t_0}^t dt' \sin \theta(t'). \quad (130)$$

Se vogliamo ricavare la velocità, e da essa la traiettoria, abbiamo quindi bisogno dell'espressione dell'angolo  $\theta$  in funzione tempo. Per trovarla ricordiamo che, in un moto curvilineo, la velocità è data dal prodotto della velocità angolare  $\omega = \dot{\theta}$ , che in generale dipende dal tempo, per il raggio di curvatura, che nel nostro caso è la lunghezza  $l$  fissata del pendolo, da cui

$$\dot{v}(\theta) = \frac{d}{dt}(\dot{\theta}l) = \ddot{\theta}l \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (131)$$

Non siamo in grado di risolvere analiticamente tale equazione con alcun integrale elementare, tuttavia la soluzione è tabulata ed è un integrale ellittico. L'unico modo per poter fare qualche progresso analiticamente è porci nel limite delle *piccole oscillazioni*, nel quale  $\theta \simeq 0$  e quindi  $\sin \theta \simeq \theta$ , da cui

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0. \quad (132)$$

In questo limite il moto non è solo periodico, ma addirittura armonico. L'equazione di moto (132) è infatti equivalente alle (104), pertanto possiamo scrivere la soluzione nella stessa forma della (115) con l'identificazione  $\omega^2 \mapsto g/l$ ,

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \left( \sqrt{\frac{g}{l}} t \right), \quad (133)$$

dove  $\theta_0 \equiv \theta(t_0 = 0)$  è l'angolo fornito dalle condizioni iniziali. La soluzione è indubbiamente corretta, ma non generale, poiché vale solo nel limite delle piccole oscillazioni. In altre parole, con l'approccio delle equazioni di moto possiamo descrivere il moto analiticamente soltanto in tale limite, non in generale. È importante comprendere questo punto, poiché è qui che l'approccio della conservazione dell'energia meccanica rivelerà la sua potenza. Derivando rispetto al tempo e moltiplicando per  $l$  possiamo quindi ricavare  $v(\theta)$ ,

$$v(\theta) = \dot{\theta}l = -\theta_0 \sqrt{gl} \sin \left( \sqrt{\frac{g}{l}} t \right), \quad (134)$$

che altro non è che il risultato dell'integrazione nella (130) nel limite delle piccole oscillazioni.

---

<sup>7</sup>Non è necessario esplicitare nelle equazioni che le grandezze dipendono da  $\theta$  o da  $t$  o da quale che sia la variabile, in questo esercizio scegliamo di farlo semplicemente a scopo didattico.

Passiamo adesso all'approccio della conservazione dell'energia meccanica. Come abbiamo detto, le forze che agiscono sul sistema sono la forza peso e la tensione, che sono rispettivamente una forza conservativa e una forza che compie sempre lavoro nullo, pertanto l'energia meccanica del sistema si conserva. Dette rispettivamente  $A$  e  $B$  una configurazione iniziale e finale del sistema, possiamo quindi scrivere la conservazione dell'energia meccanica

$$K_A + U_A = K_B + U_B, \quad (135)$$

dove  $K$  è l'energia cinetica e  $U$  l'energia potenziale. Scegliamo come configurazione iniziale  $A$  l'angolo iniziale  $\theta_0$  a cui il pendolo viene lasciato andare. Poiché il pendolo viene lasciato andare significa che parte da fermo, cioè  $v(\theta_0) = 0$ . Scegliamo come configurazione finale il generico angolo  $\theta$ . Per quanto riguarda l'energia cinetica abbiamo quindi

$$K_A = 0 \quad (136a)$$

$$K_B = \frac{1}{2}mv^2(\theta). \quad (136b)$$

Per quanto riguarda l'energia potenziale, essa è tutta dovuta alla forza peso, poiché la tensione non compie lavoro. L'energia potenziale della forza peso dipende solo dalla quota  $z$  del sistema, ed è data dall'espressione  $U = mgz$ . Dal punto di vista fisico, la quota  $z$  non è una proprietà intrinseca di un punto, il suo valore dipende da come si sceglie di misurarla. Equivalentemente, dal punto di vista matematico, l'energia potenziale è data da un integrale, pertanto è definita a meno di una costante in linea di principio arbitraria. In altre parole, il valore di  $z$  non è univocamente determinato, tuttavia è chiaro che il moto di un sistema non può dipendere da come scegliamo di definire, in questo caso, la quota. A ben guardare la legge di conservazione dell'energia meccanica (135), notiamo che non compare tanto l'energia potenziale quanto piuttosto la *differenza* di energia potenziale fra la configurazione iniziale e finale. È proprio questa differenza ad eliminare l'ambiguità di cui abbiamo discusso, infatti, se  $U$  è definita a meno di una costante  $k$ , abbiamo che  $U_A = mgz_A + k$  e  $U_B = mgz_B + k$  dipendono da  $k$ , ma  $U_B - U_A = mgz_B + k - (mgz_A + k) = mg(z_B - z_A)$  ne è indipendente. Fisicamente, sebbene la quota dipende da come scegliamo di misurarla, la differenza di due quote no. Per convincercene analizziamo, a scopo didattico, due differenti scelte possibili e vediamo che conducono al medesimo risultato. Come prima scelta immaginiamo di prendere  $z = 0$  in corrispondenza del punto di minimo  $\theta = 0$  della traiettoria, e di avere quote positive crescenti lungo la verticale verso l'alto. In tal caso vediamo facilmente che

$$U_A = mg(l - l \cos \theta_0) \quad (137a)$$

$$U_B = mg(l - l \cos \theta), \quad (137b)$$

e sostituendo nella (135)

$$0 + mg(l - l \cos \theta_0) = \frac{1}{2}mv^2(\theta) + mg(l - l \cos \theta). \quad (138)$$

Il termine costante  $mg(l - l \cos \theta_0)$  è presente in entrambi i membri dell'equazione, perciò restiamo con

$$0 - mg(l - l \cos \theta_0) = \frac{1}{2}mv^2(\theta) - mg(l - l \cos \theta). \quad (139)$$

Come scelta alternativa, supponiamo adesso di prendere  $z = 0$  in corrispondenza del centro  $\theta = \pi/2$  del pendolo, e di avere quote positive crescenti lungo la verticale verso l'alto. In tal caso abbiamo

$$U_A = -mgl \cos \theta_0 \quad (140a)$$

$$U_B = -mgl \cos \theta, \quad (140b)$$

e sostituendo nella (135)

$$0 - mgl \cos \theta_0 = \frac{1}{2}mv^2(\theta) - mgl \cos \theta, \quad (141)$$

che coincide con la (139), come volevasi dimostrare. Quelle che abbiamo discusso sono solo due fra infinite possibili scelte equivalenti: in generale ne esisterà qualcuna più vantaggiosa di altre dal punto di vista dei calcoli, e sapendo che il risultato non dipende da quale scelta facciamo, merita chiedersi quale potrebbe essere la scelta più conveniente e soltanto dopo svolgere effettivamente il calcolo. Dalla (139) o equivalentemente dalla (141) troviamo

$$v^2(\theta) = 2gl(\cos \theta - \cos \theta_0). \quad (142)$$

Questa è l'espressione esatta della velocità (o meglio, del suo quadrato), che nell'approccio delle equazioni di moto siamo riusciti a ricavare soltanto nel limite delle piccole oscillazioni ottenendo la (134). In altre parole, usando la conservazione dell'energia abbiamo trovato un risultato del tutto generale, valido cioè per ogni valore di  $\theta$ , non solo per  $\theta \simeq 0$ . Possiamo convincerci che stiamo descrivendo lo stesso moto di quello dell'approccio delle equazioni di moto, deriviamo la (142) rispetto al tempo e vediamo che coincide con la (128), che era stata ricavata prima di usare l'approssimazione delle piccole oscillazioni:

$$2v\dot{v} = -2gl \sin \theta \dot{\theta} \quad (143)$$

$$v = \dot{\theta}l, \quad \dot{v} = a_t \quad \Rightarrow \quad 2\dot{\theta}la_t = -2gl \sin \theta \dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad a_t = -g \sin \theta \quad (144)$$

come volevasi dimostrare. I due approcci descrivono dunque lo stesso moto, il grosso vantaggio dell'approccio della conservazione dell'energia è che coinvolge le velocità, mentre l'approccio con le equazioni di moto coinvolge le accelerazioni. Matematicamente si dice che le equazioni di moto sono equazioni differenziali del second'ordine (contengono le derivate seconde, ovviamente della posizione), mentre la legge di conservazione dell'energia è del prim'ordine (contiene le derivate prime). Se dobbiamo risolvere un problema che riguarda le velocità merita usare la conservazione dell'energia piuttosto che le equazioni di moto, poiché un'integrazione è implicita, e, come abbiamo visto, si tratta di un'integrazione che potremmo non essere in grado di svolgere, dunque averne la soluzione gratuitamente costituisce un vantaggio non trascurabile.

## Esercizio 14

(dinamica: equazioni di moto e conservazione dell'energia meccanica)

Consideriamo una guida liscia semicircolare di raggio  $R$  e una massa  $m$  inizialmente ferma posta leggermente discostata dalla sommità della guida. Non essendo nel punto di equilibrio, la massa inizia a muoversi scendendo dalla guida, tuttavia non è vincolata a muoversi lungo la guida. Studiare il moto della massa e determinare in quale punto tocca il suolo.

$$\left[ x_f = \left[ \frac{\sqrt{5}}{3} + \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \sqrt{\frac{46}{27}} - \sqrt{\frac{10}{27}} \right) \right] R \right]$$

Svolgimento

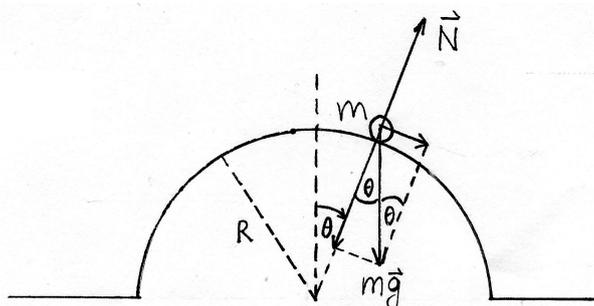


Figura 10

Al generico angolo  $\theta$ , la configurazione del sistema è quella mostrata in Figura 10. Le forze che agiscono sulla massa  $m$  sono la forza peso  $m\vec{g}$  e la reazione vincolare  $\vec{N}$ , da cui le equazioni di moto

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}. \quad (145)$$

Proiettandole lungo le direzioni tangenziale e radiale alla traiettoria otteniamo

$$ma_t = mg \sin \theta \quad (146a)$$

$$ma_c = mg \cos \theta - N \quad (146b)$$

ed essendo il moto lungo la guida circolare,  $a_t = \dot{v} = R\ddot{\theta}$ ,  $a_c = v^2/R$ , dunque

$$R\ddot{\theta} = g \sin \theta \quad (147a)$$

$$N = mg \cos \theta - \frac{mv^2}{R}. \quad (147b)$$

Ancora una volta, tutte le grandezze sono funzioni dell'unica variabile  $\theta$ , che a sua volta è unicamente funzione del tempo  $t$ . Ciò che potrebbe accadere è che, scendendo lungo la guida, l'oggetto di massa  $m$  acquisti una velocità tale da permettergli di staccarsi dalla guida. Nell'istante in cui si staccerebbe (e per tutta la durata dell'eventuale volo), l'oggetto non poggierebbe più sulla guida, pertanto la reazione vincolare si annullerebbe. Allora, per capire se l'oggetto si stacca dalla guida o no, dobbiamo imporre la condizione  $N = 0$  e risolvere per  $\theta$ : se esiste un  $\theta_0 \in [0, \pi/2]$  in corrispondenza del quale  $N(\theta_0) = 0$ ,

allora l'oggetto si stacca dalla guida. Ovviamente la richiesta che  $\theta_0$  appartenga a  $[0, \pi/2]$  discende da come abbiamo definito  $\theta$ : se dovesse esistere un  $\theta_0$  tale per cui  $N(\theta_0) = 0$  non appartenente a  $[0, \pi/2]$ , tale  $\theta_0$  dovrebbe essere scartato e concluderemmo che l'oggetto non si stacca dalla guida. Dalla (147b) abbiamo

$$N(\theta_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v^2(\theta_0)}{R} = g \cos \theta_0. \quad (148)$$

In linea di principio potremmo ricavare  $v(\theta)$  dalla (147a), di fatto incappiamo in un integrale non banale che non sappiamo risolvere analiticamente, esattamente come nell'Esercizio 13. D'altra parte la parola "velocità" è un campanello d'allarme che deve farci pensare immediatamente alla conservazione dell'energia meccanica. La forza peso è conservativa e la reazione vincolare compie sempre lavoro nullo, quindi l'energia meccanica del sistema si conserva:

$$K_A + U_A = K_B + U_B \quad (149)$$

dove  $A$  e  $B$  sono una configurazione iniziale e una finale. Come configurazione iniziale scegliamo quella in cui il sistema è posto all'inizio, cioè  $\theta_A \simeq 0$  e  $v(\theta_A) = 0$ . Come configurazione finale scegliamo il generico  $\theta$ . Per quanto riguarda l'energia cinetica abbiamo dunque

$$K_A = 0 \quad , \quad K_B = \frac{1}{2}mv^2(\theta). \quad (150)$$

Per quanto riguarda l'energia potenziale, l'unico contributo proviene dalla forza peso, per la quale vale  $U = mgh$ . Come sappiamo, abbiamo libertà di scelta sulla definizione della quota  $h$ , e la conservazione dell'energia non dipende da questa scelta. Scegliamo ad esempio  $h = 0$  lungo l'orizzontale e  $h$  positiva crescente lungo la verticale verso l'alto. Abbiamo quindi

$$U_A = mgR \quad , \quad U_B = mgR \cos \theta. \quad (151)$$

Sostituendo tutto nella (149) otteniamo

$$0 + mgR = \frac{1}{2}mv^2(\theta) + mgR \cos \theta \quad (152)$$

da cui

$$v^2(\theta) = 2gR(1 - \cos \theta). \quad (153)$$

Adesso possiamo valutare questa espressione per  $\theta_0$  e sostituirla nella (148)

$$\frac{2gR}{R}(1 - \cos \theta_0) = g \cos \theta_0 \quad \Rightarrow \quad \cos \theta_0 = \frac{2}{3}. \quad (154)$$

Non c'è bisogno di calcolare  $\theta_0 = \arccos(2/3)$  per rendersi conto che effettivamente  $\theta_0 \in [0, \pi/2]$ . Concludiamo quindi che esiste  $\theta_0 \in [0, \pi/2]$  in corrispondenza del quale l'oggetto di massa  $m$  si stacca dalla guida. Nell'istante in cui si stacca possiede una velocità  $\vec{v}_0 \equiv \vec{v}(\theta_0)$  diretta tangenzialmente alla guida e di modulo  $v_0 = v(\theta_0)$ . Dall'istante dello stacco e per tutto il tempo del volo è soggetto alla sola forza peso, pertanto il suo moto è quello della caduta di un grave (*moto balistico*). Poiché l'accelerazione  $\vec{a} = \vec{g}$  a cui è soggetto l'oggetto di massa  $m$  è diretta lungo la verticale e la traccia chiede di determinare la posizione (orizzontale) in cui impatta con il suolo, merita scomporre il moto lungo la direzione verticale e orizzontale, come mostrato in Figura 11. Per quanto riguarda l'accelerazione

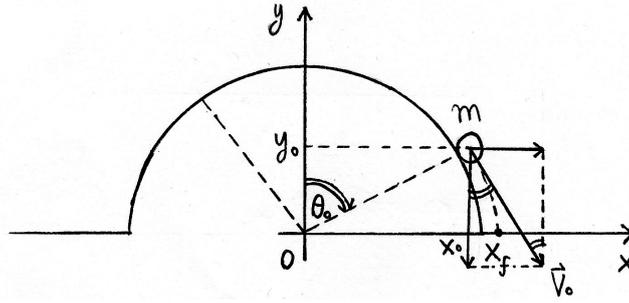


Figura 11

abbiamo

$$a_x = 0 \quad (155a)$$

$$a_y = -g, \quad (155b)$$

che integrate nel tempo danno

$$v_x = v_{0x} \quad (156a)$$

$$v_y = v_{0y} - gt, \quad (156b)$$

che integrate nel tempo a loro volta danno

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t \quad (157a)$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2, \quad (157b)$$

ossia il moto parabolico che ci aspettavamo. La posizione iniziale è semplicemente

$$x_0 = x(\theta_0) = R \sin \theta_0 \quad (158a)$$

$$y_0 = y(\theta_0) = R \cos \theta_0. \quad (158b)$$

D'altra parte

$$\sin \theta_0 = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_0} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad (159)$$

allora

$$x_0 = R \sin \theta_0 = \frac{\sqrt{5}}{3}R \quad (160a)$$

$$y_0 = R \cos \theta_0 = \frac{2}{3}R. \quad (160b)$$

Per quanto riguarda la velocità iniziale, il suo modulo è

$$v_0^2 = v^2(\theta_0) = 2gR \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2gR}{3} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2gR}{3}} \quad (161)$$

e le sue componenti

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta_0 = \sqrt{\frac{2gR}{3}} \frac{2}{3} \quad (162a)$$

$$v_{0y} = -v_0 \sin \theta_0 = \sqrt{\frac{2gR}{3}} \frac{\sqrt{5}}{3}. \quad (162b)$$

Matematicamente la condizione di “toccare il suolo” si esprime imponendo  $y = 0$ . Per trovare la posizione finale  $x_f$  in cui l’oggetto tocca il suolo, la strategia è quella di chiamare  $t^*$  l’istante in cui avviene il contatto con il suolo, ossia imporre  $y(t^*) = 0$ , dopodiché risolviamo per  $t^*$  e calcoliamo  $x_f = x(t^*)$ :

$$y(t^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 + v_{0y}t^* - \frac{1}{2}gt^{*2} = 0 \quad (163)$$

$$t^* = \frac{v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2gy_0}}{g} \quad (164)$$

$$x_f = x(t^*) = x_0 + \frac{v_{0x}}{g} \left( v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2gy_0} \right) \quad (165)$$

dove per  $t^*$  abbiamo preso la soluzione con il segno positivo davanti alla radice perché  $v_{0y}$  è negativo, e se avessimo preso il segno meno avremmo ottenuto un  $t^*$  negativo. Adesso possiamo sostituire le (160) e le (162) nella (165), ottenendo

$$\begin{aligned} x_f &= \frac{\sqrt{5}}{3}R + \frac{1}{g} \sqrt{\frac{2gR}{3}} \left( -\sqrt{\frac{2gR}{3}} \frac{\sqrt{5}}{3} + \sqrt{\frac{2gR}{3} \frac{5}{9} + 2g \frac{2}{3}R} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{5}}{3}R + \sqrt{\frac{2R}{3g}} \left( -\sqrt{\frac{10}{27}}gR + \sqrt{\frac{10}{27}gR + \frac{4}{3}gR} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{5}}{3}R + \sqrt{\frac{2R}{3g}} \left( -\sqrt{\frac{10}{27}}gR + \sqrt{\frac{46}{27}gR} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{5}}{3}R + \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \sqrt{\frac{46}{27}} - \sqrt{\frac{10}{27}} \right) R. \end{aligned} \quad (166)$$

Riassumendo:

$$x_f = \left[ \frac{\sqrt{5}}{3} + \sqrt{\frac{2}{3}} \left( \sqrt{\frac{46}{27}} - \sqrt{\frac{10}{27}} \right) \right] R. \quad (167)$$

Questo è un esercizio dove è richiesto l’uso sia delle equazioni di moto sia della conservazione dell’energia meccanica. Possiamo pensarli come due approcci alternativi in linea di principio ma complementari all’atto pratico.

## Esercizi del 16/11/18

### Esercizio 15

(cinematica: moti relativi)

Siano dati due sistemi di riferimento in moto rototraslazionale l'uno rispetto all'altro. Confrontare la traiettoria, velocità e accelerazione di un punto materiale nei due sistemi di riferimento.

Svoglimento

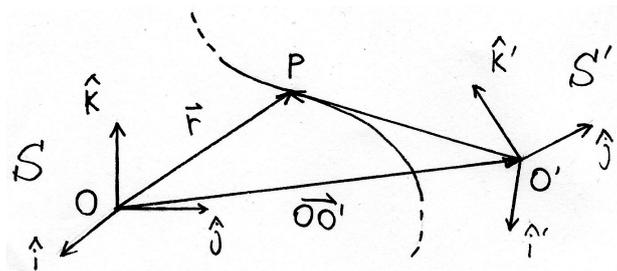


Figura 12

Si tratta del problema dei *moti relativi*. La descrizione del moto di un corpo dipende dal sistema di riferimento che si sceglie. La traccia chiede di confrontare la descrizione del moto di un punto materiale vista da due sistemi di riferimento in moto rototraslazionale l'uno rispetto all'altro. Cominciamo chiamando  $S$  e  $S'$  i due sistemi di riferimento,  $O$  e  $O'$  le loro origini, e  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$  e  $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$  le rispettive basi, come mostrato in Figura 12. Poniamo di essere solidali con il sistema di riferimento  $S$  e di vedere  $S'$  rototraslare. La traiettoria  $\vec{r}$  del punto materiale osservata da  $S$  è legata a quella  $\vec{r}'$  osservata da  $S'$  secondo la legge

$$\vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}', \quad (168)$$

dove tutte le grandezze sono funzioni del tempo  $t$ .

Deriviamo rispetto al tempo per trovare la relazione fra le velocità

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\overrightarrow{OO'}} + \dot{\vec{r}}'. \quad (169)$$

Calcoliamo adesso i singoli termini partendo dal primo

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} = \vec{v} \quad (170)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che, essendo solidali con  $S$ , la base  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$  è ferma rispetto a noi, quindi  $\dot{\hat{i}} = \dot{\hat{j}} = \dot{\hat{k}} = \vec{0}$ . Il vettore  $\overrightarrow{OO'}$  individua l'origine di  $O'$  a partire da  $O$ , cioè è espresso in termini della base  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ , pertanto le derivate dei versori saranno di nuovo nulle e compariranno soltanto le derivate dei coefficienti

$$\dot{\overrightarrow{OO'}} = \frac{d}{dt} (x_{O'}\hat{i} + y_{O'}\hat{j} + z_{O'}\hat{k}) = \dot{x}_{O'}\hat{i} + \dot{y}_{O'}\hat{j} + \dot{z}_{O'}\hat{k} = v_{O'_x}\hat{i} + v_{O'_y}\hat{j} + v_{O'_z}\hat{k} = \vec{v}_{O'}. \quad (171)$$

$\vec{v}_{O'}$  è detta *velocità relativa* del sistema di riferimento  $S'$  rispetto a  $S$ . Calcoliamo adesso la derivata di  $\vec{r}'$ . Stavolta  $\vec{r}'$  è un vettore di  $S'$ , che dunque parte da  $O'$  ed è descritto dalla base  $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$ , la quale rototrasla rispetto a  $S$ : la velocità relativa  $\vec{v}_{O'}$  è la velocità con cui  $S$  la vede traslare, mentre chiamiamo  $\vec{\omega}$  la velocità angolare con cui  $S$  la vede ruotare. Nel seguito sfruttiamo il risultato per cui la derivata rispetto al tempo di un versore è data dal prodotto vettoriale di  $\vec{\omega}$  con quel versore:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}' &= \frac{d}{dt} (x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}') = \dot{x}'\hat{i}' + \dot{y}'\hat{j}' + \dot{z}'\hat{k}' + x'\dot{\hat{i}}' + y'\dot{\hat{j}}' + z'\dot{\hat{k}}' = \\ &= v'_{x'}\hat{i}' + v'_{y'}\hat{j}' + v'_{z'}\hat{k}' + x'\vec{\omega} \wedge \hat{i}' + y'\vec{\omega} \wedge \hat{j}' + z'\vec{\omega} \wedge \hat{k}' = \\ &= \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge (x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}') = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'.\end{aligned}\quad (172)$$

Sostituiamo le (170)–(172) nella (169) e otteniamo infine

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}' + \vec{v}_t \\ \vec{v}_t &\equiv \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'\end{aligned}\quad (173)$$

dove  $\vec{v}_t$  è detta *velocità di trascinamento*, e rappresenta la differenza fra la velocità  $\vec{v}$  misurata da  $S$  e la velocità  $\vec{v}'$  misurata da  $S'$ .

Deriviamo ancora una volta rispetto al tempo per ricavare la relazione fra le accelerazioni

$$\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}' + \dot{\vec{v}}_t = \dot{\vec{v}}' + \dot{\vec{v}}_{O'} + \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \wedge \vec{r}'). \quad (174)$$

Calcoliamo i singoli termini

$$\dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt} (v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}) = \dot{v}_x\hat{i} + \dot{v}_y\hat{j} + \dot{v}_z\hat{k} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} = \vec{a} \quad (175)$$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{v}}' &= \frac{d}{dt} (v'_{x'}\hat{i}' + v'_{y'}\hat{j}' + v'_{z'}\hat{k}') = \\ &= \dot{v}'_{x'}\hat{i}' + \dot{v}'_{y'}\hat{j}' + \dot{v}'_{z'}\hat{k}' + v'_{x'}\dot{\hat{i}}' + v'_{y'}\dot{\hat{j}}' + v'_{z'}\dot{\hat{k}}' = \\ &= a'_{x'}\hat{i}' + a'_{y'}\hat{j}' + a'_{z'}\hat{k}' + v'_{x'}\vec{\omega} \wedge \hat{i}' + v'_{y'}\vec{\omega} \wedge \hat{j}' + v'_{z'}\vec{\omega} \wedge \hat{k}' = \\ &= \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge (v'_{x'}\hat{i}' + v'_{y'}\hat{j}' + v'_{z'}\hat{k}') = \vec{a}' + \vec{\omega} \wedge \vec{v}'\end{aligned}\quad (176)$$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{v}}_{O'} &= \frac{d}{dt} (v_{O'x}\hat{i} + v_{O'y}\hat{j} + v_{O'z}\hat{k}) = \dot{v}_{O'x}\hat{i} + \dot{v}_{O'y}\hat{j} + \dot{v}_{O'z}\hat{k} = \\ &= a_{O'x}\hat{i} + a_{O'y}\hat{j} + a_{O'z}\hat{k} = \vec{a}_{O'}\end{aligned}\quad (177)$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') = \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge \dot{\vec{r}}' = \vec{\alpha} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}') \quad (178)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo chiamato  $\vec{\alpha} \equiv \dot{\vec{\omega}}$  l'*accelerazione angolare* e abbiamo usato la (172). Sostituendo tutto nella (174) otteniamo infine

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{a}' + \vec{a}_t + \vec{a}_{\text{Cor}} \\ \vec{a}_t &\equiv \vec{a}_{O'} + \vec{\alpha} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') \\ \vec{a}_{\text{Cor}} &\equiv 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'\end{aligned}\quad (179)$$

dove  $\vec{a}_t$  è detta *accelerazione di trascinamento*<sup>8</sup> e  $\vec{a}_{\text{Cor}}$  *accelerazione di Coriolis*.

<sup>8</sup>Da non confondere con l'accelerazione tangenziale dei moti curvilinei, indicata con la stessa notazione.

Notiamo che affinché entri in gioco l'accelerazione di Coriolis è necessario che  $S'$  ruoti rispetto a  $S$ , che  $S'$  non sia solidale con il punto materiale in esame e che  $\vec{\omega}$  e  $\vec{v}'$  non siano paralleli.

Un sistema di riferimento solidale con la Terra è in rototraslazione rispetto ad un sistema di riferimento solidale con le stelle fisse. Supponiamo di voler studiare il moto dato dalla caduta di un grave visto dai due sistemi di riferimento. Applichiamo i risultati che abbiamo appena trovato. In  $S$  evidentemente  $\vec{a} = \vec{g}$ . Dal momento che stiamo considerando la caduta di un grave, possiamo trascurare il moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole, poiché avviene su tempi scala molto maggiori di quelli della caduta di un grave, dunque ci limitiamo al solo moto di rotazione, il quale avviene a velocità angolare costante. Tale ipotesi implica che  $\vec{a}_{O'} = \vec{0}$  e  $\vec{\alpha} = \vec{0}$ , pertanto dalla (179) segue che in  $S'$  misuriamo un'accelerazione diversa da  $g$  e data da

$$\vec{a}' = \vec{g} - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'. \quad (180)$$

È chiaro che ai poli  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{r}'$  e  $\vec{v}'$  sono tutti paralleli fra loro, quindi  $\vec{a}' = \vec{g}$ , tuttavia questo non è il caso generale. In ogni punto diverso dai poli si ha  $\vec{a}' \neq \vec{g}$ , in particolare all'equatore  $\vec{a}'$  e  $\vec{g}$  sono massimamente diversi. Allora perché di fatto misuriamo la stessa  $\vec{a}' \simeq \vec{g}$  in ogni punto della superficie terrestre? La risposta è che anche le correzioni al moto della caduta di un grave dovute alla rotazione terrestre sono piccole, in particolare  $\omega \simeq 7 \times 10^{-5}$  rad/s, quindi di fatto per le situazioni quotidiane tutto va come se  $\vec{a}' \simeq \vec{g}$ . In generale, però, sappiamo che questo non è vero tecnicamente. Le correzioni possono diventare importanti in determinati contesti, tutto dipende dalla precisione con cui intendiamo effettuare le misure.

Notiamo che nella nostra derivazione abbiamo sempre supposto  $t = t'$ , cioè che il tempo scorra allo stesso modo nei due sistemi di riferimento. La teoria della relatività ci insegna che questo non è vero in generale, in particolare a velocità prossime alla velocità della luce o in campi gravitazionali molto intensi il tempo scorre in modo diverso. La nostra trattazione non è dunque vera per ogni sistema di riferimento, ma finché ci teniamo lontani da questi regimi relativistici possiamo assumere che il tempo scorra allo stesso modo in ogni sistema di riferimento e prendere per buoni i nostri risultati.

Concludiamo con un'osservazione molto importante. Dalla (179) vediamo che  $\vec{a} = \vec{a}'$  se e solo se  $\vec{a}_t = \vec{a}_{Cor} = \vec{0}$ , cioè se e solo se  $\vec{\omega} = \vec{0}$  e  $\vec{a}_{O'} = \vec{0}$ . In altre parole, due sistemi di riferimento misurano la stessa accelerazione se e solo se si muovono di moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro. Se quindi  $\vec{a} = \vec{F}/m$ , cioè se l'accelerazione è il risultato dell'azione di certo numero di forze che hanno per risultante  $\vec{F}$ , allora concludiamo che due sistemi di riferimento misurano le stesse forze, ossia la stessa fisica, se e solo se si muovono di moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro. Capiamo quindi che i sistemi di riferimento in moto relativo rettilineo uniforme costituiscono una classe particolare e privilegiata di sistemi di riferimento, detti *sistemi di riferimento inerziali*. I sistemi di riferimento non appartenenti a questa classe sono detti *non-inerziali* o semplicemente *accelerati*.

## Esercizio 16

(cinematica: moti relativi)

Sia data una piattaforma circolare di raggio  $R$  posta su un piano orizzontale, in rotazione in senso antiorario con velocità angolare  $\omega$  costante. Siano inoltre  $F_1$  e  $F_2$  due formiche sulla piattaforma poste inizialmente ai capi opposti del diametro orizzontale, rispettivamente nella posizione iniziale  $(-R, 0)$  e  $(R, 0)$ . Esse si muovono verso il centro della piattaforma con velocità costanti  $u$  e  $2u/3$ , per  $F_1$  e  $F_2$  rispettivamente, fino ad incontrarsi. Sapendo che all'istante iniziale sono partite insieme, determinare nel sistema di riferimento di un osservatore esterno alla piattaforma:

- il vettore posizione del punto del loro incontro,
- i moduli delle velocità delle formiche all'istante dell'incontro,
- l'angolo compreso fra la velocità e l'accelerazione della formica  $F_1$  all'istante dell'incontro.

$$\left[ \begin{array}{l} \text{a)} \quad \vec{r}^* = \frac{R}{5} \left[ \cos\left(\omega \frac{6R}{5u}\right) \hat{i} + \sin\left(\omega \frac{6R}{5u}\right) \hat{j} \right] \\ \text{b)} \quad v_1^* = \sqrt{u^2 + \left(\omega \frac{R}{5}\right)^2} \\ v_2^* = \sqrt{\left(\frac{2u}{3}\right)^2 + \left(\omega \frac{R}{5}\right)^2} \\ \text{c)} \quad \cos \theta = \frac{\omega^2 \frac{R}{5} u}{\sqrt{u^2 + \left(\omega \frac{R}{5}\right)^2} \sqrt{\left(\omega^2 \frac{R}{5}\right)^2 + (2\omega u)^2}} \end{array} \right]$$

### Svolgimento

In questo problema abbiamo due sistemi di riferimento: uno inerziale esterno alla piattaforma, che chiamiamo  $S$ , e uno non-inerziale solidale con la piattaforma, che chiamiamo  $S'$ . Chiaramente  $S'$  si muove di moto rotatorio rispetto ad  $S$  con velocità angolare  $\omega$  costante senza traslare. Scegliamo per semplicità le origini dei due sistemi di riferimento come coincidenti,  $O = O'$ , e chiamiamo  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$  e  $\{\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'\}$  le basi dei due sistemi di riferimento. In particolare, il piano su cui giace la piattaforma è descritto da  $\{\hat{i}, \hat{j}\}$  e  $\{\hat{i}', \hat{j}'\}$ , mentre  $\hat{k} = \hat{k}'$  è ortogonale a questo piano e individua la direzione della velocità angolare,  $\vec{\omega} = \omega \hat{k} = \omega \hat{k}'$ . La situazione è mostrata in Figura 13.

La traccia fornisce dati che si riferiscono chiaramente a  $S'$ , mentre le richieste si riferiscono a  $S$ . In particolare capiamo che in  $S'$  il moto delle formiche è rettilineo uniforme, mentre in  $S$  è rototraslatorio. In altre parole, la descrizione del moto in  $S'$  è semplice, mentre in  $S$  è complicata. La strategia è quindi quella di fare tutti i calcoli in  $S'$  ed usare i risultati dei moti relativi (173) e (179) per tradurre i risultati in  $S$ . Per farlo iniziamo scrivendo le relazioni fra le grandezze cinematiche nei due sistemi di riferimento. Dalla Figura 13 vediamo facilmente che

$$\hat{i}' = \cos(\omega t) \hat{i} + \sin(\omega t) \hat{j} \quad (181a)$$

$$\hat{j}' = -\sin(\omega t) \hat{i} + \cos(\omega t) \hat{j}, \quad (181b)$$

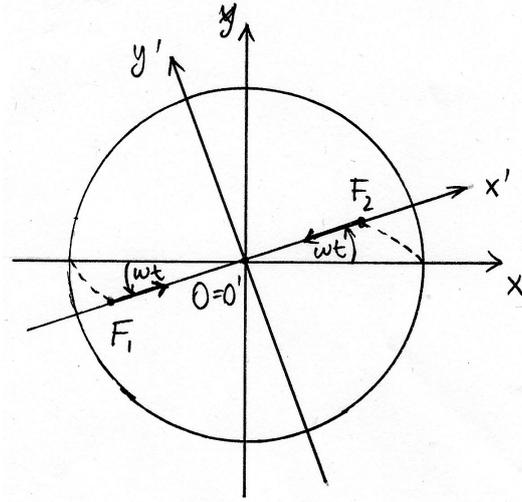


Figura 13

mentre  $\hat{k} = \hat{k}'$ , come già detto.

Per quanto riguarda le posizioni, sapendo che  $O = O'$ , abbiamo dalla (168)

$$\vec{r} = \vec{r}', \quad (182)$$

dove  $\vec{r} = (x\hat{i}, y\hat{j})$ ,  $\vec{r}' = (x'\hat{i}', y'\hat{j}')$  e le relazioni fra  $\{\hat{i}, \hat{j}\}$  e  $\{\hat{i}', \hat{j}'\}$  sono date dalle (181) di cui sopra.

Per quanto riguarda le velocità, sapendo che  $S'$  ruota con velocità angolare  $\vec{\omega}$  rispetto ad  $S$  senza traslare, abbiamo  $\vec{v}_{O'} = \vec{0}$ , quindi dalla (173) otteniamo per ciascuna formica

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'. \quad (183)$$

Per quanto riguarda le accelerazioni, sapendo che in  $S'$  le formiche si muovono di moto rettilineo uniforme e che quindi  $\vec{a}' = \vec{0}$ , che  $\vec{v}_{O'} = \vec{0}$  implica  $\vec{a}_{O'} = \vec{0}$  e che  $\vec{\omega}$  costante implica  $\vec{\alpha} = \vec{0}$ , dalla (179) otteniamo per ciascuna formica

$$\vec{a} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'. \quad (184)$$

Queste relazioni torneranno utili nel seguito.

La prima richiesta chiede la posizione dell'incontro in  $S$ , quindi per prima cosa troviamo l'istante dell'incontro, poi sostituiamo nell'equazione della traiettoria e troviamo la posizione dell'incontro in  $S'$ , e infine usiamo le (181) per tradurre il risultato in  $S$ .

In  $S'$  le formiche si muovono di moto rettilineo uniforme con velocità

$$\vec{v}'_1 = u\hat{i}' \quad (185a)$$

$$\vec{v}'_2 = -\frac{2u}{3}\hat{i}'. \quad (185b)$$

Avendo componenti solo lungo  $\hat{i}'$ , il moto è unidimensionale, dunque possiamo dimenticarci dei vettori e passare ai moduli

$$v'_1 = u \quad (186a)$$

$$v'_2 = -\frac{2u}{3}. \quad (186b)$$

Il moto è rettilineo uniforme, quindi le traiettorie delle formiche sono

$$x'_1(t) = x'_1(0) + v'_1 t = -R + ut \quad (187a)$$

$$x'_2(t) = x'_2(0) + v'_2 t = R - \frac{2u}{3}t, \quad (187b)$$

dove  $x'_1(0) = -R$  e  $x'_2(0) = R$  sono le posizioni iniziali delle formiche fornite nella traccia. Ovviamente le traiettorie corrispondono agli integrali delle velocità nel tempo. Chiamiamo  $t^*$  l'istante dell'incontro delle due formiche. Per ricavarlo imponiamo che in quell'istante la posizione delle due formiche sia uguale, cioè  $x'_1(t^*) = x'_2(t^*)$

$$-R + ut^* = R - \frac{2u}{3}t^* \Rightarrow \left(1 + \frac{2}{3}\right)ut^* = 2R \Rightarrow \frac{5u}{3}t^* = 2R, \quad (188)$$

da cui

$$t^* = \frac{6R}{5u}. \quad (189)$$

Sostituendo in  $x'_1(t)$  o  $x'_2(t)$  indifferentemente otteniamo la posizione  $\vec{r}'^{*}$  dell'incontro in  $S'$

$$x_1^{*} \equiv x'_1(t^*) = x'_2(t^*) = -R + ut^* = -R + u\frac{6R}{5u} = \frac{R}{5} \quad (190)$$

$$\vec{r}'^{*} = \frac{R}{5}\hat{i}'. \quad (191)$$

Adesso usiamo le (181) e troviamo la posizione  $\vec{r}^{*}$  dell'incontro in  $S$

$$\vec{r}^{*} = \frac{R}{5} \left[ \cos(\omega t^*)\hat{i} + \sin(\omega t^*)\hat{j} \right] = \frac{R}{5} \left[ \cos\left(\omega\frac{6R}{5u}\right)\hat{i} + \sin\left(\omega\frac{6R}{5u}\right)\hat{j} \right] \quad (192)$$

La seconda richiesta chiede i moduli delle velocità delle formiche in  $S$  all'istante dell'incontro. Per calcolarle partiamo scrivendo le velocità delle formiche all'istante dell'incontro  $t^*$  usando la (183)

$$\vec{v}_1^{*} = \vec{v}'_1 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'^{*} \quad (193a)$$

$$\vec{v}_2^{*} = \vec{v}'_2 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'^{*}, \quad (193b)$$

dove con il simbolo  $*$  intendiamo che quella grandezza è calcolata per  $t = t^*$ , cioè all'istante dell'incontro. La (191) e le (185) mostrano che per entrambe le formiche la velocità è parallela alla traiettoria in  $S'$ , coerentemente con il moto rettilineo uniforme, e che entrambe sono dirette lungo  $\hat{i}'$ . D'altra parte  $\vec{\omega}$  è diretto lungo  $\hat{k} = \hat{k}'$ , quindi il termine  $\vec{\omega} \wedge \vec{r}'^{*}$  è

$$\vec{\omega} \wedge \vec{r}'^{*} = \omega r'^{*} \hat{k}' \wedge \hat{i}' = \omega r'^{*} \hat{j}', \quad (194)$$

cioè è ortogonale a  $\vec{v}'^{*}$  per ciascuna formica. Potevamo aspettarcelo sapendo che  $\vec{r}'^{*}$  e  $\vec{v}'^{*}$  sono paralleli, e che il prodotto vettoriale di due vettori è ortogonale ad entrambi, quindi  $\vec{\omega} \wedge \vec{r}'^{*}$  è ortogonale a  $\vec{v}'^{*}$  per entrambe le formiche. Dalle (193) e sapendo che  $\vec{\omega} \wedge \vec{r}'^{*}$  e  $\vec{v}'^{*}$  sono ortogonali, segue che il modulo quadrato di  $\vec{v}^{*}$  è la somma dei moduli quadrati di  $\vec{v}'^{*}$  e  $\vec{\omega} \wedge \vec{r}'^{*}$  per ciascuna formica, che non è altro che il teorema di Pitagora. Possiamo convincercene svolgendo esplicitamente i prodotti scalari

$$\begin{aligned} v^{*2} &= \vec{v}^{*} \cdot \vec{v}^{*} = (\vec{v}'^{*} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'^{*}) \cdot (\vec{v}'^{*} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'^{*}) = \\ &= \vec{v}'^{*} \cdot \vec{v}'^{*} + 2\vec{v}'^{*} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}'^{*}) + (\vec{\omega} \wedge \vec{r}'^{*}) \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}'^{*}) = \\ &= v'^{*2} + 2v'^{*} \hat{i}' \cdot (\omega r'^{*} \hat{j}') + (\omega r'^{*} \hat{j}') \cdot (\omega r'^{*} \hat{j}') = \\ &= v'^{*2} + 2v'^{*} \omega r'^{*} \hat{i}' \cdot \hat{j}' + \omega^2 r'^{*2} \hat{j}' \cdot \hat{j}' = \\ &= v'^{*2} + \omega^2 r'^{*2} \end{aligned} \quad (195)$$

da cui infine

$$v_1^* = \sqrt{v_1'^{*2} + \omega^2 r'^{*2}} = \sqrt{u^2 + \left(\omega \frac{R}{5}\right)^2} \quad (196a)$$

$$v_2^* = \sqrt{v_2'^{*2} + \omega^2 r'^{*2}} = \sqrt{\left(\frac{2u}{3}\right)^2 + \left(\omega \frac{R}{5}\right)^2}. \quad (196b)$$

La terza richiesta chiede l'angolo compreso fra la velocità e l'accelerazione della formica  $F_1$  in  $S$  all'istante dell'incontro, che chiamiamo  $\theta$ . Tale angolo compare ad esempio nell'espressione del prodotto scalare  $\vec{v}_1^* \cdot \vec{a}_1^* = v_1^* a_1^* \cos \theta$ , da cui

$$\cos \theta = \frac{\vec{v}_1^* \cdot \vec{a}_1^*}{v_1^* a_1^*}. \quad (197)$$

L'espressione di  $\vec{v}_1^*$  è data dalla (193a), che esplicitamente è

$$\vec{v}_1^* = \vec{v}_1'^* + \vec{\omega} \wedge \vec{r}'^* = v_1'^* \hat{i}' + \omega r'^* \hat{j}', \quad (198)$$

e il suo modulo  $v_1^*$  è dato dalla (196a). Per quanto riguarda l'accelerazione  $\vec{a}_1^*$  consideriamo la (184), che esplicitamente è

$$\begin{aligned} \vec{a}_1^* &= \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}'^*) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_1'^* = \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{r}'^*) - \vec{r}'^*(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_1'^* = \\ &= \omega \hat{k}' (\omega r'^* \hat{k}' \cdot \hat{i}') - r'^* \hat{i}' \omega^2 + 2\omega v_1'^* \hat{k}' \wedge \hat{i}' = -\omega^2 r'^* \hat{i}' + 2\omega v_1'^* \hat{j}' \end{aligned} \quad (199)$$

dove abbiamo usato la (36) per riscrivere il doppio prodotto vettoriale. Anche  $\vec{a}_1^*$ , come  $\vec{v}_1^*$ , è composta da due componenti ortogonali, quindi il suo modulo quadro sarà la somma dei moduli quadri delle due componenti (teorema di Pitagora). Di nuovo, possiamo convincercene svolgendo esplicitamente i prodotti scalari

$$\begin{aligned} a_1^{*2} &= \vec{a}_1^* \cdot \vec{a}_1^* = (-\omega^2 r'^* \hat{i}' + 2\omega v_1'^* \hat{j}') \cdot (-\omega^2 r'^* \hat{i}' + 2\omega v_1'^* \hat{j}') = \\ &= \omega^4 r'^{*2} \hat{i}' \cdot \hat{i}' - 2\omega^3 r'^* v_1'^* \hat{j}' \cdot \hat{i}' - 2\omega^3 r'^* v_1'^* \hat{j}' \cdot \hat{i}' + 4\omega^2 v_1'^{*2} \hat{j}' \cdot \hat{j}' = \\ &= \omega^4 r'^{*2} + 4\omega^2 v_1'^{*2} \end{aligned} \quad (200)$$

come volevasi dimostrare. Avremmo anche potuto trarre immediatamente questa conclusione a partire dalla (184) ragionando sull'ortogonalità dei prodotti vettoriali senza fare alcun calcolo esplicito. Il modulo  $a_1^*$  è dunque

$$a_1^* = \sqrt{\omega^4 r'^{*2} + 4\omega^2 v_1'^{*2}} = \sqrt{\left(\omega^2 \frac{R}{5}\right)^2 + (2\omega u)^2} \quad (201)$$

e il prodotto scalare  $\vec{v}_1^* \cdot \vec{a}_1^*$  è

$$\begin{aligned} \vec{v}_1^* \cdot \vec{a}_1^* &= (v_1'^* \hat{i}' + \omega r'^* \hat{j}') \cdot (-\omega^2 r'^* \hat{i}' + 2\omega v_1'^* \hat{j}') = \\ &= -v_1'^* \omega^2 r'^* \hat{i}' \cdot \hat{i}' + 2v_1'^* \omega \hat{j}' \cdot \hat{j}' - \omega^3 r'^* \hat{j}' \cdot \hat{i}' + 2\omega^2 r'^* v_1'^* \hat{j}' \cdot \hat{j}' = \\ &= -v_1'^* \omega^2 r'^* + 2\omega^2 r'^* v_1'^* = \omega^2 r'^* v_1'^* = \omega^2 \frac{R}{5} u. \end{aligned} \quad (202)$$

Sostituiamo le (202), (201) e (196a) nella (197) ottenendo infine

$$\cos \theta = \frac{\omega^2 \frac{R}{5} u}{\sqrt{u^2 + \left(\omega \frac{R}{5}\right)^2} \sqrt{\left(\omega^2 \frac{R}{5}\right)^2 + (2\omega u)^2}}. \quad (203)$$

## Esercizi del 23/11/18

### Esercizio 17

(dinamica: equazioni di moto, conservazione dell'energia meccanica e moti relativi)

Determinare l'espressione delle tre *velocità cosmiche*, definite nel modo seguente:

La *prima velocità cosmica*,  $v_1$ , è la velocità che un corpo deve avere per entrare in orbita circolare attorno ad un corpo celeste ad una certa distanza dal suo centro.

La *seconda velocità cosmica*,  $v_2$ , detta anche *velocità di fuga*, è la velocità minima che un corpo deve avere per potersi allontanare indefinitamente da un campo in cui è immerso, senza alcuna successiva propulsione. In balistica si dice *velocità limite* la velocità di fuga riferita al campo gravitazionale di un corpo celeste.

La *terza velocità cosmica*,  $v_3$ , è la velocità minima che un corpo deve avere, rispetto ad un altro corpo attorno a cui orbita, per poterne abbandonare il campo gravitazionale. In astrodinamica è la velocità che un corpo deve avere per poter abbandonare indefinitamente il sistema solare.

$$\left[ \begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\frac{GM}{r}} \\ v_2 &= \sqrt{\frac{2GM}{r}} \\ v_3 &= \sqrt{2v_1^2 + v_{1S}^2 \left( \sqrt{1 + \cos^2 \theta} - \cos \theta \right)} \end{aligned} \right]$$

#### Svolgimento

Partiamo dalla prima velocità cosmica  $v_1$ , ad esempio di un satellite artificiale in orbita attorno alla Terra. Chiamiamo  $M$  la massa del corpo orbitato (ad esempio la Terra),  $R$  il suo raggio,  $m$  la massa del corpo orbitante (ad esempio il satellite artificiale), e  $h$  la quota a cui vogliamo che orbiti. Quando il corpo orbitante è in orbita circolare alla quota  $h$  fissata è soggetto a due forze: la forza di gravità  $\vec{F}_g$  esercitata dal corpo orbitato, diretta radialmente verso il suo centro, e la forza centrifuga  $\vec{F}_c$ , diretta radialmente verso l'esterno dell'orbita. Le equazioni di moto sono quindi  $\vec{F}_g + \vec{F}_c = m\vec{a}$ . Detto  $\hat{u}_r$  il versore radiale diretto verso l'esterno dell'orbita, abbiamo

$$\vec{F}_g = - \frac{GMm}{(R+h)^2} \hat{u}_r \quad (204a)$$

$$\vec{F}_c = \frac{mv^2}{R+h} \hat{u}_r. \quad (204b)$$

Come vediamo, entrambe dipendono dalla quantità  $r \equiv R+h$ , detta *raggio orbitale*. Quando il corpo orbitante si trova in orbita circolare a velocità costante pari alla prima velocità cosmica, il moto è circolare uniforme, pertanto lungo la direzione radiale abbiamo

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv_1^2}{r} \quad (205)$$

da cui

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (206)$$

Questa è la velocità che un oggetto (di massa qualunque) deve avere per stare in orbita circolare di raggio orbitale  $r$  attorno a un corpo celeste di massa  $M$ . Facciamo un controllo dimensionale per accertarci che  $v_1$  abbia le dimensioni di una velocità. Dalla (204a) ricaviamo le dimensioni della costante di gravitazione universale

$$[G] = \left[ F \frac{r^2}{Mm} \right] = \frac{ML}{T^2} \frac{L^2}{M^2} = \frac{L^3}{MT^2}, \quad (207)$$

da cui

$$[v_1] = \left( \frac{L^3}{MT^2} \frac{M}{L} \right)^{1/2} = \left( \frac{L^2}{T^2} \right)^{1/2} = \frac{L}{T}, \quad (208)$$

dunque  $v_1$  è dimensionalmente una velocità.

Notiamo che, se la velocità del corpo orbitante è pari a  $v_1$ , la sua energia meccanica è data da

$$K + U = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m \frac{GM}{r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}, \quad (209)$$

cioè è negativa. Il fatto che l'energia meccanica di un sistema sia negativa non deve causare alcun disturbo concettuale. L'interpretazione fisica di questo fatto è che il sistema è un cosiddetto *sistema legato*, cioè intuitivamente un sistema le cui traiettorie non divergono ma restano confinate in una regione spaziale finita, indipendentemente dall'essere circolari o meno. Questo accade perché l'energia potenziale è di tipo attrattivo (quindi negativa) e maggiore dell'energia cinetica. Se l'energia meccanica fosse positiva significherebbe che l'energia cinetica è maggiore dell'energia potenziale, il che implicherebbe che l'oggetto di massa  $m$  avrebbe una velocità sufficiente a sfuggire all'attrazione del potenziale. Esistono molti sistemi legati in natura, alcuni esempi sono i pianeti in orbita attorno a una stella, i satelliti in orbita attorno a un pianeta, oppure anche gli elettroni in orbita attorno al nucleo in un atomo.

Naturalmente, adesso che abbiamo l'espressione (206) della prima velocità cosmica, siamo curiosi di vedere quali valori numerici assume tipicamente. Per farlo dobbiamo evidentemente specificare una massa  $M$  e un raggio orbitale  $r$ . Come esempio possiamo considerare un satellite in orbita geostazionaria, che è un caso particolare di orbita sincrona. Un' *orbita sincrona* è un'orbita in cui il corpo orbitante ha un periodo di rivoluzione pari al periodo di rotazione medio del corpo orbitato, e rivolge nella stessa direzione di rotazione del pianeta. Se il corpo orbitato è la Terra si chiama *orbita geosincrona*. Un'orbita geosincrona circolare e sul piano equatoriale è detta *orbita geostazionaria*: è un caso particolare di orbita sincrona perché si riferisce alla Terra nello specifico e perché un'orbita sincrona non ha bisogno di essere né equatoriale né circolare. La strategia per ricavare il raggio orbitale  $r_{\text{geo}}$  di un'orbita geosincrona consiste nello scrivere le equazioni di moto (205) per la Terra facendo comparire il periodo di rotazione della Terra  $T_T$ , o alternativamente la sua velocità angolare  $\omega_T = 2\pi/T_T$

$$\frac{GM_T m}{r_{\text{geo}}^2} = m\omega_T^2 r_{\text{geo}}. \quad (210)$$

Risolviendo per  $r_{\text{geo}}$  troviamo

$$r_{\text{geo}} = \left( \frac{GM_T}{\omega_T^2} \right)^{1/3}, \quad \omega_T = \frac{2\pi}{T_T}. \quad (211)$$

Facciamo un controllo dimensionale

$$[r_{\text{geo}}] = \left( \frac{L^3}{MT^2} MT^2 \right)^{1/3} = (L^3)^{1/3} = L, \quad (212)$$

dunque  $r_{\text{geo}}$  ha le giuste dimensioni. Sostituendo nella (206) troviamo la prima velocità cosmica di un satellite in orbita geostazionaria

$$v_{1 \text{ geo}} = \sqrt{\frac{GM_T}{r_{\text{geo}}}} = \sqrt{GM_T \left( \frac{GM_T}{\omega_T^2} \right)^{1/3}} = \sqrt{GM_T \left( \frac{GM_T T_T}{4\pi^2} \right)^{1/3}}. \quad (213)$$

Sostituendo i valori numerici  $G \simeq 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-1}$ ,  $M_T \simeq 5,9 \times 10^{24} \text{ kg}$  e  $T_T = 24 \text{ h}$  otteniamo

$$r_{\text{geo}} \simeq 42.160 \text{ km} \quad , \quad v_{1 \text{ geo}} \simeq 3,1 \text{ km/s}. \quad (214)$$

Passiamo adesso alla seconda velocità cosmica  $v_2$ . Dalla definizione notiamo innanzitutto che essa non corrisponde alla velocità a cui i razzi si allontanano dalla Terra: possono allontanarsi ad una velocità qualunque se possiedono un opportuno sistema di propulsione in funzione durante il volo. Capiamo quindi quanto sia importante specificare nella definizione le parole “senza alcuna successiva propulsione”. La velocità di fuga è dunque la velocità che dobbiamo imprimere ad un oggetto se vogliamo che lasci indefinitamente la Terra con un unico “balzo” o “impulso”, per così dire.

Consideriamo un oggetto di massa  $m$  alla distanza orbitale  $r = R + h$  dal centro di un corpo celeste di massa  $M$  che lo attrae gravitazionalmente. Naturalmente il caso interessante sarà quello in cui  $h = 0$ , ossia  $r = R$ , ma ricaviamo il risultato per un generico  $r$ . Stavolta il moto per allontanarsi dal centro di attrazione gravitazionale è rettilineo lungo la direzione radiale, quindi non ci sono forze centrifughe, e l'unica forza che l'oggetto subisce è la forza di gravità. Essendo questa conservativa, la sua energia meccanica si conserva

$$K_A + U_A = K_B + U_B. \quad (215)$$

Scegliamo come configurazione iniziale  $A$  quella in cui l'oggetto si trova alla distanza (orbitale)  $r$  dal centro di gravità e possiede una velocità  $v(r) = v_2$ , cioè tale per cui riesce ad allontanarsi fino all'infinito

$$K_A = \frac{1}{2}mv_2^2 \quad , \quad U_A = -\frac{GMm}{r}. \quad (216)$$

Come configurazione finale  $B$  scegliamo quella in cui l'oggetto si ferma all'infinito, ossia  $r = \infty$ ,  $v(\infty) = 0$

$$K_B = 0 \quad , \quad U_B = 0. \quad (217)$$

Sostituendo nella legge di conservazione abbiamo quindi

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r} = 0 \quad (218)$$

da cui l'espressione della seconda velocità cosmica

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{r}}. \quad (219)$$

Notiamo immediatamente la relazione con la prima velocità cosmica

$$v_2 = \sqrt{2}v_1, \quad (220)$$

dunque, avendo già svolto l'analisi dimensionale per  $v_1$ , siamo automaticamente certi che anche  $v_2$  abbia le giuste dimensioni.

Naturalmente il caso interessante è quando  $h = 0$ , ossia  $r = R$ , cioè quando l'oggetto di massa  $m$  parte dalla superficie del dato corpo celeste. In questo caso notiamo anche che, dal momento che  $g = GM/R$ , la (219) coincide con la formula dell'Esercizio 04.

Per farci un'idea dei valori numerici tipici della seconda velocità cosmica nel nostro sistema solare, ci rifacciamo alla tabella seguente.

	$R$	$M$	$v_2$
Sole	695.700 km	$1,98 \times 10^{30}$ kg	617,3 km/s
Terra	6.371 km	$5,97 \times 10^{24}$ kg	11,2 km/s
Luna	1.737 km	$7,35 \times 10^{22}$ kg	2,30 km/s
Marte	3.389 km	$6,47 \times 10^{23}$ kg	5,00 km/s
Giove	69.911 km	$1,90 \times 10^{27}$ kg	59,6 km/s

Passiamo adesso alla terza velocità cosmica  $v_3$ . Ciò a cui dobbiamo fare attenzione è che  $v_3$  è la velocità che un oggetto deve avere per abbandonare il sistema solare a partire da un pianeta, ad esempio la Terra, ma la Terra a sua volta rivolge attorno al Sole. Questo suggerisce che dobbiamo ricorrere ai moti relativi. La prima cosa da considerare è che se l'oggetto di massa  $m$  vuole lasciare l'attrazione del sistema solare, deve prima essere in grado di lasciare l'attrazione della Terra. Pertanto, cominciamo mettendoci nel sistema di riferimento della Terra. Alla distanza orbitale  $r$  dal centro della Terra e alla velocità pari alla terza velocità cosmica, la sua energia meccanica è

$$K + U = \frac{1}{2}mv_3^2 - \frac{GM_T m}{r}, \quad (221)$$

dove  $M_T$  è la massa della Terra. D'altra parte, dalla (206) e dalla (219), sappiamo che

$$v_2 = \sqrt{2}v_1 = \sqrt{\frac{2GM_T}{r}}, \quad (222)$$

che sostituita nella (221) dà

$$K + U = \frac{1}{2}mv_3^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv^2, \quad (223)$$

dove abbiamo definito

$$v^2 \equiv v_3^2 - v_2^2. \quad (224)$$

Essenzialmente,  $v$  è la velocità che l'oggetto di massa  $m$  possiede rispetto alla Terra.

Passiamo adesso al sistema di riferimento del Sole, nel quale l'oggetto di massa  $m$  è visto lasciare la Terra mentre quest'ultima rivolge. La velocità complessiva  $\vec{v}_{\text{tot}}$  dell'oggetto è data dalla velocità  $\vec{v}$  rispetto alla Terra più la velocità  $\vec{v}_T$  della Terra rispetto al Sole,

$$\vec{v}_{\text{tot}} = \vec{v} + \vec{v}_T. \quad (225)$$

Questa non è altro che un'applicazione della legge di composizione delle velocità (173) nei moti relativi. La velocità  $\vec{v}_T$  della Terra rispetto al Sole è diretta sempre tangenzialmente all'orbita terrestre, mentre la velocità  $\vec{v}$  dell'oggetto rispetto alla Terra può essere diretta arbitrariamente in linea di principio. La legge di conservazione dell'energia meccanica, infatti, fornisce informazioni soltanto sul modulo della velocità, non sulla direzione e sul verso. Inoltre, niente vieta all'oggetto di massa  $m$  di lasciare il sistema solare in una direzione qualunque. Chiamiamo  $\theta$  l'angolo compreso fra  $\vec{v}_{\text{tot}}$  e  $\vec{v}$ . È chiaro che la terza velocità cosmica varierà fra un valore minimo e un valore massimo, corrispondenti a  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$  rispettivamente, cioè a quando va nello stesso verso della rivoluzione terrestre e quando va in verso opposto rispettivamente. Dalla (225) segue che

$$v_{\text{tot}}^2 = \vec{v}_{\text{tot}} \cdot \vec{v}_{\text{tot}} = (\vec{v} + \vec{v}_T) \cdot (\vec{v} + \vec{v}_T) = v^2 + v_T^2 + 2vv_T \cos \theta. \quad (226)$$

D'altra parte l'eccentricità dell'orbita terrestre attorno al Sole è circa  $e \simeq 1$ , quindi possiamo approssimare l'orbita terrestre come una circonferenza di raggio  $d$  pari alla distanza media Terra-Sole, cioè  $d \simeq 1,476 \times 10^8$  km. Ne segue che, essendo la Terra in orbita circolare (ed equatoriale) attorno al Sole, la sua velocità  $v_T$  coincide con la prima velocità cosmica rispetto al Sole, che chiamiamo  $v_{1S}$ , ossia

$$v_T = v_{1S} = \sqrt{\frac{GM_S}{d}}, \quad (227)$$

dove  $M_S \simeq 1,98 \times 10^{30}$  kg è la massa del Sole. Inoltre, se vogliamo che l'oggetto di massa  $m$  lasci il sistema solare, è necessario che  $v_{\text{tot}}$  sia uguale (almeno) alla seconda velocità cosmica rispetto al Sole, cioè la velocità di fuga rispetto al Sole, che indichiamo con  $v_{2S}$

$$v_{\text{tot}} = v_{2S} = \sqrt{2}v_{1S}, \quad (228)$$

dove abbiamo usato la relazione (220) riferita al Sole. Sostituendo la (227) e la (228) nella (226) otteniamo

$$2v_{1S}^2 = v^2 + v_{1S}^2 + 2vv_{1S} \cos \theta, \quad (229)$$

che risolta per  $v$  dà

$$v^2 + 2vv_{1S} \cos \theta - v_{1S}^2 = 0 \quad (230)$$

$$v_{\pm} = \frac{-2v_{1S} \cos \theta \pm \sqrt{2v_{1S}^2 \cos^2 \theta + 4v_{1S}^2}}{2} \quad (231)$$

$$v = v_{1S} \left( \sqrt{1 + \cos^2 \theta} - \cos \theta \right), \quad (232)$$

dove abbiamo selezionato la soluzione con il segno + perché l'altra è negativa. Vediamo facilmente che  $v \geq v_{1S}$ , cioè la velocità rispetto alla Terra deve essere grande almeno quanto quella con cui la Terra orbita attorno al Sole, come uno si aspetta. A noi non interessa tanto  $v$  quanto piuttosto  $v_3$ . La relazione che le lega è la (224), che dunque sostituiamo nella (232) e risolviamo per  $v_3$

$$\sqrt{v_3^2 - v_2^2} = v_{1S} \left( \sqrt{1 + \cos^2 \theta} - \cos \theta \right) \quad (233)$$

$$v_3^2 = v_2^2 + v_{1S}^2 \left( \sqrt{1 + \cos^2 \theta} - \cos \theta \right)^2, \quad (234)$$

da cui infine

$$v_3 = \sqrt{2v_1^2 + v_{1S}^2 \left( \sqrt{1 + \cos^2 \theta} - \cos \theta \right)^2}. \quad (235)$$

È facile rendersi conto che  $v_3$  è minima quando  $\vec{v}$  e  $\vec{v}_T$  hanno stessa direzione e verso, cioè  $\theta = 0$ , e massima quando hanno stessa direzione e verso opposto, cioè  $\theta = \pi$

$$\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad v_3 = v_{3 \min} = \sqrt{2v_1^2 + v_{1S}^2 \left( \sqrt{2} - 1 \right)^2} \quad (236a)$$

$$\theta = \pi \quad \Rightarrow \quad v_3 = v_{3 \max} = \sqrt{2v_1^2 + v_{1S}^2 \left( \sqrt{2} + 1 \right)^2}. \quad (236b)$$

Sostituendo l'espressione (206) calcolata per  $r = R_T$  e la (227) otteniamo i valori numerici

$$v_{3 \min} \simeq 16,7 \text{ km/s} \quad (237a)$$

$$v_{3 \max} \simeq 72,7 \text{ km/s}. \quad (237b)$$

## Esercizio 18

(dinamica: conservazione dell'energia meccanica)

Quale velocità (di fuga) minima deve avere un oggetto di massa  $m$  per essere mandato dalla Terra sulla Luna? Siano dati la costante di gravitazione universale  $G \simeq 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}$ , la massa della Terra  $M_T \simeq 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$ , la massa della Luna  $M_L \simeq 7,35 \times 10^{22} \text{ kg}$ , il raggio della Terra  $R_T \simeq 6.371 \text{ km}$ , il raggio della Luna  $R_L \simeq 1.737 \text{ km}$  e la distanza Terra-Luna  $d \simeq 384.400 \text{ km}$ .

[ $v \simeq 11,2 \text{ km/s}$ ]

Svolgimento

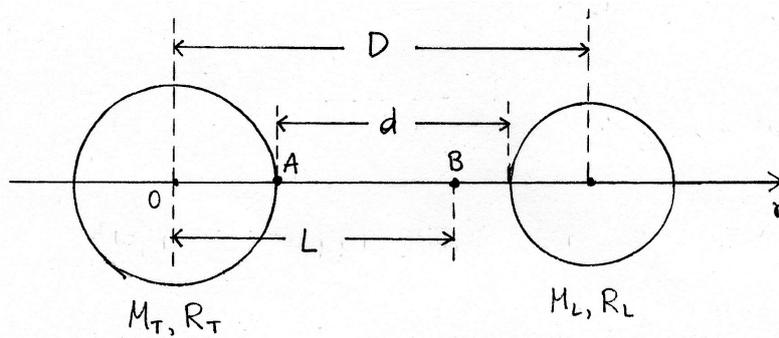


Figura 14

Cominciamo disegnando la situazione come in Figura 14. La distanza Terra-Luna  $d$  si riferisce alla distanza fra la superficie della Terra e quella della Luna, tuttavia conviene definire anche la distanza  $D$  fra i loro centri

$$D \equiv R_T + R_L + d. \quad (238)$$

In un punto qualunque fra la Terra e la Luna, l'oggetto di massa  $m$  è soggetto ad un potenziale gravitazionale che lo attrae verso il centro della Terra e un altro potenziale gravitazionale che lo attrae verso il centro della Luna. Le corrispondenti forze hanno verso opposto, quindi di fatto sono due effetti in competizione. Ci aspettiamo che da qualche parte fra il centro della Terra e il centro della Luna esista un punto in cui le due attrazioni si bilanciano: a sinistra di questo punto (in riferimento alla Figura 14) domina l'attrazione della Terra, mentre a destra domina quella della Luna. Indichiamo con  $L$  la distanza di tale punto dal centro della Terra. Allora, se vogliamo far arrivare il nostro oggetto sulla Luna, ci basta farlo arrivare in  $L$ , poiché da lì in poi è l'attrazione della Luna a portarlo fino sulla sua superficie. L'espressione di  $L$  si trova imponendo che l'energia potenziale gravitazionale della Terra sia uguale a quella della Luna

$$-\frac{GM_T m}{L} = -\frac{GM_L m}{D-L} \quad (239)$$

$$L = \frac{M_T}{M_T + M_L} D = \frac{1}{1 + \frac{M_L}{M_T}} D. \quad (240)$$

Vediamo facilmente che più  $M_T$  è grande rispetto a  $M_L$  e più  $L$  tende a  $D$ , cioè il centro della Luna; così come più  $M_L$  è grande rispetto a  $M_T$  e più  $L$  tende a zero, cioè il centro della Terra. Per  $M_T/M_L$  sufficientemente grande può succedere che  $L$  cada all'interno della Luna, così come per  $M_T/M_L$  sufficientemente piccolo può succedere che cada all'interno della Terra. Questo non costituisce alcun problema in linea di principio, basta fare attenzione al fatto che se  $L$  cade all'interno della Luna, allora chiaramente non dobbiamo far arrivare l'oggetto di massa  $m$  fino ad  $L$  ma fino alla superficie lunare. Per capire se  $L$  sta fra la Terra e la Luna o dentro la Luna dobbiamo vedere se  $D - L > R_L$  oppure no, cioè se  $(D - L) - R_L > 0$  oppure no

$$\begin{aligned} (D - L) - R_L &= D - \frac{M_T}{M_T + M_L} D - R_L = \frac{(M_T + M_L) - M_T}{M_T + M_L} D - R_L = \\ &= \frac{M_L}{M_T + M_L} D - R_L = \frac{M_L(R_T + R_L + d) - (M_T + M_L)R_L}{M_T + M_L} = \\ &= \frac{M_L(R_T + d) - M_T R_L}{M_T + M_L}. \end{aligned} \quad (241)$$

È vero che  $M_T$  è due ordini di grandezza più grande di  $M_L$ , ma anche  $d$  è due ordini di grandezza più grande di  $R_L$ , quindi dobbiamo dedurre che i due termini a numeratore sono dello stesso ordine di grandezza. In altre parole, basandoci sui soli ordini di grandezza non siamo in grado di dire con sicurezza chi dei due sia più grande, dobbiamo sostituire i valori numerici forniti nella traccia. Essi danno

$$D \simeq 392.508 \text{ km} \quad (242)$$

$$L \simeq 387.734 \text{ km}, \quad (243)$$

da cui  $D - L \simeq 4.774 \text{ km} > R_L$ , dunque  $L$  sta fra la Terra e la Luna, e dobbiamo far arrivare il nostro oggetto fino ad  $L$ .

Su di esso agiscono soltanto la forza di gravità della Terra e quella della Luna, che sono due forze conservative, quindi la sua energia meccanica si conserva

$$K_A + U_A = K_B + U_B. \quad (244)$$

Come configurazione iniziale  $A$  scegliamo quella in cui l'oggetto di massa  $m$  parte con velocità  $v$  dalla superficie terrestre, cioè

$$K_A = \frac{1}{2} m v^2 \quad (245a)$$

$$U_A = - \frac{GM_T m}{R_T} + \frac{GM_L m}{d + R_L}. \quad (245b)$$

Come configurazione finale  $B$  scegliamo quella in cui l'oggetto arriva a fermarsi in  $L$ , poiché a noi interessa la velocità *minima* per arrivare sulla Luna

$$K_B = 0 \quad (246a)$$

$$U_B = - \frac{GM_T m}{L} + \frac{GM_L m}{D - L}. \quad (246b)$$

Sostituiamo nella legge di conservazione dell'energia meccanica e risolviamo per  $v$

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{GM_T m}{R_T} + \frac{GM_L m}{d + R_L} = - \frac{GM_T m}{L} + \frac{GM_L m}{D - L} \quad (247)$$

$$v^2 = 2G \left( \frac{M_T}{R_T} - \frac{M_L}{d + R_L} - \frac{M_T}{L} + \frac{M_L}{D - L} \right) \quad (248)$$

$$v = \sqrt{2G \left[ M_T \left( \frac{1}{R_T} - \frac{1}{L} \right) + M_L \left( \frac{1}{D - L} - \frac{1}{d + R_L} \right) \right]} \quad (249)$$

dove  $D$  e  $L$  sono dati dalle rispettive espressioni. Sostituendo i valori numerici otteniamo

$$v \simeq 11,2 \text{ km/s}, \quad (250)$$

cioè essenzialmente lo stesso valore della seconda velocità cosmica. L'interpretazione fisica di questo fatto è che l'attrazione gravitazionale della Luna è così poco influente rispetto a quella della Terra che non ci aiuta molto quando si tratta di mandare un oggetto dalla Terra sulla Luna. In altre parole, fa poca differenza spedire un oggetto sulla Luna o indefinitamente lontano dall'attrazione della Terra, la velocità di fuga che dobbiamo imprimere è praticamente la stessa. Matematicamente potevamo accorgercene dalla (249). Dai valori numerici sappiamo che  $M_T \gg M_L$ , quindi il secondo termine sotto la radice è trascurabile rispetto al primo

$$v \simeq \sqrt{2GM_T \left( \frac{1}{R_T} - \frac{1}{L} \right)}. \quad (251)$$

Inoltre, sempre dai valori numerici,  $L \gg R_T$ , quindi il secondo termine nella parentesi è trascurabile rispetto al primo

$$v \simeq \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = v_2, \quad (252)$$

ossia restiamo essenzialmente con la seconda velocità cosmica.

## Esercizi del 30/11/18

### Esercizio 19

(dinamica dei sistemi di punti: conservazione della quantità di moto)

Sia dato un piano inclinato di un angolo  $\theta$  e omogeneo di massa  $M$  appoggiato sopra un piano orizzontale, e sia  $m$  la massa di un oggetto inizialmente fermo posto sul piano inclinato all'altezza  $y_0$ . Siano tutti gli oggetti in questione lisci. Determinare l'espressione della componente orizzontale dell'accelerazione dell'oggetto di massa  $m$ .

$$\left[ a_x = \frac{g \left(1 - \frac{m}{M}\right) \tan \theta}{1 + \frac{m}{M} + \left(1 - \frac{m}{M}\right)^2 \tan^2 \theta} \right]$$

Svolgimento

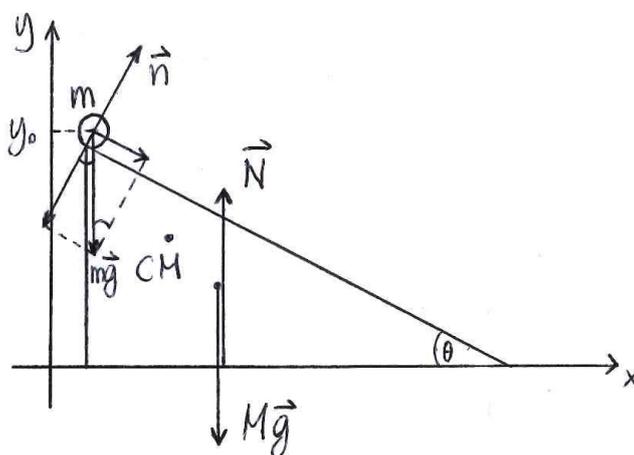


Figura 15

Per prima cosa disegniamo il sistema e le forze che agiscono su di esso, come in Figura 15. Sul piano inclinato agiscono la forza peso  $M\vec{g}$  e la reazione vincolare  $\vec{N}$  esercitata dal piano orizzontale. Sull'oggetto di massa  $m$  agisce la forza peso  $m\vec{g}$  e la reazione vincolare  $\vec{n}$  esercitata dal piano inclinato. Il centro di massa del sistema composto dal piano inclinato e dall'oggetto di massa  $m$  cade da qualche parte all'interno del piano inclinato fra il suo baricentro e il punto dove si trova l'oggetto di massa  $m$ . La sua dinamica è governata dalla prima equazione cardinale

$$\vec{F}^{\text{ext}} = (M + m)\vec{a}_{\text{CM}}, \quad (253)$$

dove  $\vec{F}^{\text{ext}}$  è la risultante delle forze esterne agenti sul sistema,  $M + m$  è la massa complessiva del sistema, e  $\vec{a}_{\text{CM}}$  è l'accelerazione del centro di massa. Per poterla usare è importante capire prima quali sono le forze interne ed esterne. Le forze interne sono la reazione vincolare  $\vec{n}$  e la componente  $m\vec{g}\cos\theta$ , che si bilanciano a vicenda dando  $\vec{F}^{\text{int}} = \vec{n} + m\vec{g}\cos\theta = \vec{0}$ . Le forze esterne sono tutte le altre, pertanto

$$\vec{F}^{\text{ext}} = M\vec{g} + m\vec{g} + \vec{N}. \quad (254)$$

D'altra parte la risultante delle forze esterne è anche uguale alla derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale  $\vec{Q}$ , ossia

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \frac{d\vec{Q}}{dt}. \quad (255)$$

Osserviamo che la risultante delle forze esterne è diretta solo lungo la verticale,  $\vec{F}^{\text{ext}} = F^{\text{ext}}\hat{j}$ , pertanto la componente orizzontale della quantità di moto  $Q_x$  si conserva

$$F^{\text{ext}}\hat{j} = \frac{dQ_x}{dt}\hat{i} + \frac{dQ_y}{dt}\hat{j} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dQ_x}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q_x = \text{costante}. \quad (256)$$

Dato che, scendendo lungo il piano inclinato, la massa  $m$  si muove verso destra, la conservazione di  $Q_x$  implica che il piano inclinato si muova verso sinistra, così da mantenere  $Q_x$  costante. Inoltre, se fissiamo un sistema di riferimento solidale con la coordinata orizzontale del centro di massa come in figura, cioè se non vediamo tutto il sistema traslare, il valore a cui è fissato  $Q_x$  è proprio zero. In altre parole

$$Q_x = mv_x + MV = 0, \quad (257)$$

dove  $mv_x$  è la componente orizzontale della quantità di moto della massa  $m$  mentre scende dal piano inclinato, e  $MV$  è la quantità di moto del piano inclinato. In altre parole, se  $Q_x$  si conserva e la massa  $m$  si muove verso destra, dobbiamo concludere che il piano inclinato si muove verso sinistra. La velocità  $V$  è dunque negativa (nel senso che si muove verso sinistra), e il suo modulo è dato dalla legge di conservazione di  $Q_x$  (257).

Il valore di  $Q_x$  è fissato a zero dal momento che abbiamo scelto un sistema di riferimento solidale con la coordinata orizzontale del centro di massa, ma naturalmente questa è solo una delle infinite scelte possibili. Se per esempio avessimo scelto un sistema di riferimento in moto rettilineo uniforme lungo  $x$ , il valore di  $Q_x$  sarebbe comunque stato costante ma non nullo. Come ogni volta che qualche passaggio dipende da una scelta, esistono scelte più convenienti di altre, nel senso che per alcune di esse è più facile fare i calcoli. La fisica, tuttavia, non può dipendere da queste scelte, cioè qualunque scelta facciamo ci deve portare al medesimo risultato. Merita dunque fare una scelta che semplifichi il calcolo, come in questo caso.

La legge di conservazione (257) è un'equazione in due incognite,  $(v_x, V)$ , pertanto non è sufficiente a risolvere il problema. Gli altri strumenti che sappiamo usare sono le equazioni di moto e la legge di conservazione dell'energia meccanica. In questo caso tutte le forze che agiscono sul sistema sono conservative, quindi l'energia meccanica si conserva. In generale, quando è possibile, merita usare le leggi di conservazione piuttosto che le equazioni di moto. Abbiamo quindi

$$K_A + U_A = K_B + U_B. \quad (258)$$

Sia l'energia cinetica che quella potenziale contengono il contributo della massa  $m$  e del piano inclinato. Come configurazione iniziale  $A$  scegliamo quella in cui la massa  $m$  parte da ferma alla quota  $y_0$ , dunque anche il piano inclinato è inizialmente fermo grazie alla (257), e chiamiamo  $y_P$  la coordinata verticale del centro di massa del solo piano inclinato, da cui

$$K_A = 0 \quad (259a)$$

$$U_A = mgy_0 + Mgy_P, \quad (259b)$$

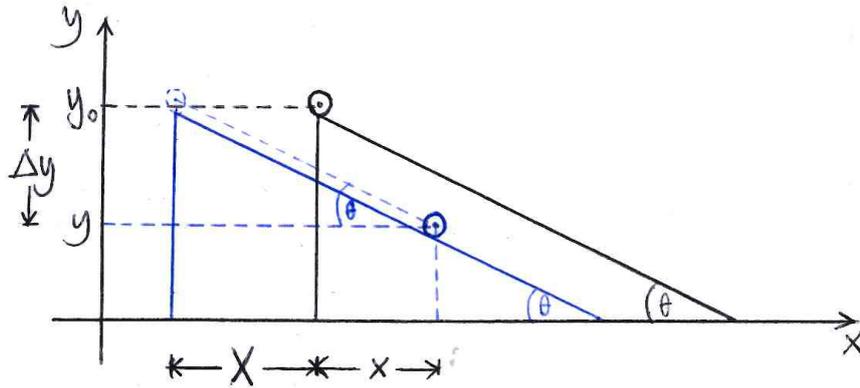


Figura 16

dove intendiamo che abbiamo scelto  $U = 0$  alla quota  $y = 0$  e attribuiamo valori positivi alla quota verso le  $y$  positive. Come configurazione finale  $B$  scegliamo il generico istante di tempo, pertanto la massa  $m$  si muove con velocità  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  alla quota  $y$  e il piano inclinato si muove con velocità  $V$  restando ovviamente alla medesima quota di partenza, da cui

$$K_B = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}MV^2 \quad (260a)$$

$$U_B = mgy + Mgy_P. \quad (260b)$$

Sostituendo tutto nella legge di conservazione dell'energia meccanica abbiamo quindi

$$0 + mgy_0 + Mgy_P = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}MV^2 + mgy + Mgy_P \quad (261)$$

$$\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}MV^2 = mg \Delta y, \quad (262)$$

dove abbiamo definito  $\Delta y = y_0 - y$  lo spostamento della massa  $m$  lungo la verticale. Adesso il nostro sistema di equazioni è costituito dalla (262) e dalla (257), che sono due equazioni in quattro incognite ( $v_x, v_y, V, \Delta y$ ). Abbiamo dunque peggiorato la situazione? No, perché il nostro sistema ha soltanto due gradi di libertà, quindi devono necessariamente esistere delle relazioni geometriche fra le incognite. Per rendercene conto, osserviamo la Figura 16, dove è riportato il sistema all'istante iniziale e a un generico istante di tempo.

Chiamiamo  $X$  lo spostamento (verso sinistra) del piano inclinato, e  $x$  lo spostamento (verso destra) della massa  $m$ . Osservando il triangolo rettangolo che ha per cateti  $X + x$  e  $\Delta y$  troviamo che la relazione fra i cateti è

$$\Delta y = (X + x) \tan \theta, \quad (263)$$

che derivata membro a membro rispetto al tempo dà

$$v_y = (V + v_x) \tan \theta. \quad (264)$$

Di questo possiamo convincerci facilmente.  $\Delta y$  rappresenta lo spostamento della massa  $m$  lungo  $y$ , quindi la sua derivata rispetto al tempo corrisponde alla componente lungo  $y$  della

velocità della massa  $m$ , ossia  $v_y$ . In altre parole,  $\Delta y$  e  $v_y$  non sono variabili indipendenti. Analogamente,  $X$  è lo spostamento del piano inclinato, quindi la sua derivata rispetto al tempo è la velocità  $V$  del piano inclinato; mentre  $x$  è lo spostamento della massa  $m$  lungo l'orizzontale, quindi la sua derivata rispetto al tempo è la componente orizzontale della velocità della massa  $m$ , ossia  $v_x$ . L'angolo  $\theta$  è costante durante il moto, da cui la relazione.

Adesso il nostro sistema di equazioni è composto dalle (257), (262) e (264), che sono tre equazioni in tre incognite  $(v_x, V, \Delta y)$ , poiché  $v_y = \dot{\Delta y}$ , pertanto siamo in grado di risolverlo. Usando la conservazione di  $Q_x$  (257), la conservazione dell'energia meccanica (262) e la (264) diventano rispettivamente

$$\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}M\frac{m^2}{M^2}v_x^2 = mg\Delta y \quad (265)$$

$$v_y = \left(1 - \frac{m}{M}\right)v_x \tan \theta. \quad (266)$$

Sostituiamo adesso la seconda nella prima

$$\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}m\left(1 - \frac{m}{M}\right)^2 v_x^2 \tan^2 \theta + \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}v_x^2 = mg\Delta y \quad (267)$$

$$\frac{1}{2}m\left[1 + \frac{m}{M} + \left(1 - \frac{m}{M}\right)^2 \tan^2 \theta\right]v_x^2 = mg\Delta y. \quad (268)$$

La traccia richiede la componente orizzontale dell'accelerazione dell'oggetto di massa  $m$ , che indichiamo con  $a_x$ , e che è la derivata di  $v_x$  rispetto al tempo. Per farla comparire, deriviamo quindi l'espressione appena ottenuta rispetto al tempo, e al secondo membro sfruttiamo il fatto che  $\dot{\Delta y} = v_y$  con  $v_y$  dato dalla (266)

$$\frac{1}{2}m\left[1 + \frac{m}{M} + \left(1 - \frac{m}{M}\right)^2 \tan^2 \theta\right]2v_x a_x = mg\left(1 - \frac{m}{M}\right)v_x \tan \theta \quad (269)$$

da cui infine

$$a_x = \frac{g\left(1 - \frac{m}{M}\right)\tan \theta}{1 + \frac{m}{M} + \left(1 - \frac{m}{M}\right)^2 \tan^2 \theta}. \quad (270)$$

Osserviamo che ciò che conta è il rapporto  $m/M$ , che è adimensionale, ed essendo anche  $\tan \theta$  adimensionale, l'analisi dimensionale ci conferma che  $a_x$  ha le dimensioni di un'accelerazione. Notiamo anche che  $a_x$  è sempre positiva, il che significa che, scendendo lungo il piano inclinato, l'oggetto di massa  $m$  continua sempre ad accelerare, proprio come ci si aspetta. L'unico caso in cui  $a_x$  si annulla è per  $\theta = 0$ , cioè quando il piano non è inclinato, giustamente. Altra osservazione importante è che per qualunque valore di  $(m, M, \theta)$ , il denominatore di  $a_x$  non si annulla mai, cioè  $a_x$  non è mai infinita. Se avessimo trovato che  $a_x$  diverge per qualche combinazione particolare di  $(m, M, \theta)$ , avremmo dovuto concludere di aver commesso un errore di calcolo, poiché un'accelerazione infinita è una situazione non-fisica.

## Esercizio 20

(dinamica dei sistemi di punti: pendolo fisico)

Sia data un'asta rigida di lunghezza  $l$  e massa  $m$  omogenea di densità lineare  $\lambda$ . Sia essa libera di ruotare attorno ad un pernio fissato in uno dei suoi estremi, e sia  $\theta$  l'angolo formato dall'asta rispetto alla verticale passante per il pernio. L'asta si trova inizialmente ferma all'angolo  $\theta_0$ , dal quale viene lasciata poi andare. Determinare le equazioni di moto di tale sistema e l'espressione della sua velocità angolare (al quadrato).

$$\left[ \ddot{\theta} + \frac{3g}{2l} \sin \theta = 0 \right]$$

$$\dot{\theta}^2 = 3\frac{g}{l} (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

Svolgimento

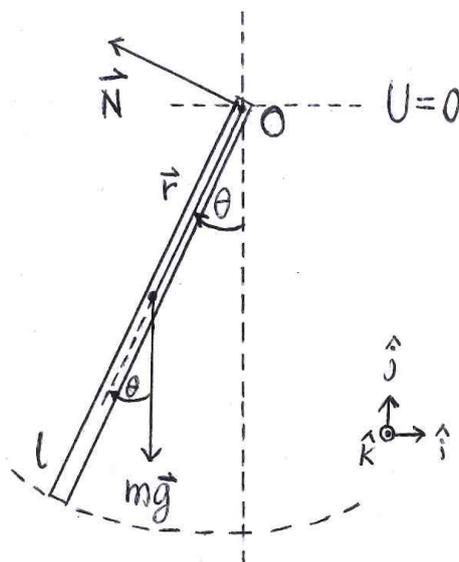


Figura 17

Il sistema descritto nella traccia è rappresentato in Figura 17 ed è detto *pendolo fisico*, o *pendolo reale*. Si differenzia dal cosiddetto *pendolo matematico*, studiato nell'Esercizio 13, in quanto nel pendolo matematico la massa è concentrata in un punto ad una distanza fissata dal pernio, e dunque ha un'unica velocità, mentre il pendolo fisico è un sistema di punti ciascuno ad una distanza diversa dal pernio, dunque non ha un'unica velocità.

Le forze a cui è sottoposto il sistema sono la forza peso  $m\vec{g}$  applicata nel centro di massa dell'asta, e la reazione vincolare  $\vec{N}$  applicata nel pernio. Grazie all'omogeneità dell'asta, il suo centro di massa coincide con il suo baricentro, e si trova nel centro dell'asta, ossia alla distanza  $l/2$  da ciascun estremo. Non essendo specificato diversamente, la reazione vincolare è non-dissipativa, dunque è diretta ortogonalmente alla "superficie di contatto" (anche se in questo caso è un punto) fra l'asta e il pernio.

Essendo un sistema di punti materiali, per studiarne il moto dobbiamo usare le equazioni cardinali. La prima dice che la risultante delle forze esterne è uguale alla massa complessiva per l'accelerazione del centro di massa. Le forze agenti su questo sistema sono entrambe esterne, pertanto la prima equazione cardinale è

$$\vec{F}^{\text{ext}} = m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_{\text{CM}}. \quad (271)$$

La seconda equazione cardinale dice che il momento risultante delle forze esterne  $\vec{M}_{\Omega}^{\text{ext}}$  calcolato rispetto ad un determinato polo  $\Omega$  è uguale al prodotto vettoriale della velocità del polo  $\vec{v}_{\Omega}$  con la quantità di moto totale  $\vec{Q}$  più la derivata rispetto al tempo del momento angolare totale  $\vec{L}_{\Omega}$  calcolato rispetto allo stesso polo

$$\vec{M}_{\Omega}^{\text{ext}} = \vec{v}_{\Omega} \wedge \vec{Q} + \frac{d\vec{L}_{\Omega}}{dt}. \quad (272)$$

Dobbiamo quindi scegliere un polo. Notiamo che l'espressione della reazione vincolare  $\vec{N}$  non è nota a priori, quindi non sappiamo quale contributo porti a  $\vec{M}_{\Omega}^{\text{ext}}$ . La scelta del polo più conveniente è dunque  $\Omega \equiv O$ , così che il braccio della reazione vincolare è nullo, e nullo è anche il suo momento delle forze. Inoltre, per questa scelta del polo, abbiamo anche  $\vec{v}_O = \vec{0}$ , pertanto la seconda equazione cardinale è ulteriormente semplificata

$$\vec{M}_O^{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}. \quad (273)$$

Per questa scelta del polo, il primo membro contiene solo il contributo della forza peso, dato da

$$\vec{M}_O^{\text{ext}} = \vec{r} \wedge m\vec{g}, \quad (274)$$

dove  $\vec{r}$  è il braccio della forza peso, come mostrato in Figura 17. Preso un sistema di riferimento  $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$  come in figura,  $\vec{M}_O^{\text{ext}}$  è diretto lungo la normale uscente  $\hat{k}$  dal piano del moto. In particolare, attribuiamo segno positivo ai moduli dei vettori diretti lungo la normale entrante e segno negativo a quelli diretti lungo la normale uscente, o, equivalentemente, positivo alle rotazioni in senso orario e negativo a quelle in senso antiorario.<sup>9</sup> Con questa convenzione, la proiezione del momento delle forze esterne lungo  $\hat{k}$  è

$$M_O^{\text{ext}} = -\frac{l}{2}mg \sin \theta. \quad (275)$$

Per quanto riguarda il secondo membro della seconda equazione cardinale, esso è

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}(I_O\vec{\omega}) = I_O\dot{\vec{\omega}} = I_O\vec{\alpha}, \quad (276)$$

dove  $I_O$  è il momento d'inerzia calcolato rispetto al polo  $O$ ,  $\vec{\omega}$  la velocità angolare con cui il sistema ruota attorno a  $O$ , e  $\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}}$  la sua accelerazione angolare. Nello svolgere la derivata del prodotto abbiamo sfruttato il fatto che l'asta è rigida, ossia la sua forma

<sup>9</sup>Questa è semplicemente una scelta, dello stesso tipo di quelle che facciamo, ad esempio, quando proiettiamo le equazioni di moto. Ad un determinato verso attribuiamo segno positivo, al verso opposto segno negativo. È una convenzione, potremmo equivalentemente scegliere di fare il contrario e non cambierebbe niente. L'importante è che siano corretti i segni reciproci di tutto ciò che proiettiamo. In altre parole, l'importante è che due proiezioni abbiano stesso segno o segno opposto, non chi delle due è positiva e chi negativa.

non cambia nel tempo, pertanto il momento d'inerzia, che dipende proprio dalla forma dell'asta, è costante. La velocità angolare  $\vec{\omega}$ , e quindi il momento angolare  $\vec{L}_O$ , è diretta lungo la normale al piano del moto, in particolare è  $\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{k}$  da cui  $\vec{\dot{\omega}} = \ddot{\theta}\hat{k}$ , pertanto la proiezione lungo  $\hat{k}$  è

$$\frac{dL_O}{dt} = I_O\ddot{\theta}. \quad (277)$$

Uguagliando la proiezione del primo membro e quella del secondo membro otteniamo l'equazione di moto

$$I_O\ddot{\theta} = -\frac{l}{2}mg \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{mgl}{2I_O} \sin \theta = 0. \quad (278)$$

Resta quindi da calcolare il momento d'inerzia  $I_O$ .

Per definizione, il momento d'inerzia di un corpo rispetto ad un asse di rotazione è uguale all'integrale del quadrato della distanza  $\rho^2$  dell'elemento di massa  $dm$  dall'asse di rotazione in  $dm$  per tutta l'estensione del corpo, ossia

$$I_O = \int_l \rho^2 dm. \quad (279)$$

D'altra parte l'asta è omogenea di densità  $\lambda$  costante pari a  $m/l$ , quindi

$$m = \lambda l \quad \Rightarrow \quad dm = \lambda d\rho, \quad (280)$$

da cui

$$I_O = \int_0^l \rho^2 \lambda d\rho = \lambda \int_0^l \rho^2 d\rho = \frac{m}{l} \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_0^l = \frac{m}{l} \frac{l^3}{3} = \frac{1}{3}ml^2. \quad (281)$$

Notiamo che per calcolare  $I_O$  avremmo anche potuto usare il teorema di Huygens-Steiner. Esso dice che il momento d'inerzia calcolato rispetto ad un certo asse di rotazione è uguale al momento d'inerzia calcolato rispetto ad un asse parallelo al precedente e passante per il centro di massa più la massa totale moltiplicata per il quadrato della distanza fra l'asse di rotazione e il centro di massa, ossia

$$I_O = I_{CM} + m \left( \frac{l}{2} \right)^2. \quad (282)$$

Il momento d'inerzia rispetto al centro di massa è dato da

$$\begin{aligned} I_{CM} &= \int_l \rho^2 dm = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \rho^2 \lambda d\rho = \lambda \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \rho^2 d\rho = \frac{m}{l} \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \\ &= \frac{m}{3l} \left( \frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8} \right) = \frac{m}{3l} \frac{l^3}{4} = \frac{1}{12}ml^2, \end{aligned} \quad (283)$$

da cui

$$I_O = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2 \quad (284)$$

come volevasi dimostrare.

Sostituendo  $I_O$  nell'equazione di moto troviamo infine

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{2} \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (285)$$

Essa è formalmente analoga all'equazione di moto (131) del pendolo matematico, pertanto porta con sé tutti gli stessi problemi tecnici.

D'altra parte, sempre in analogia con il pendolo matematico, possiamo pensare di usare la legge di conservazione dell'energia meccanica per ricavare l'espressione della velocità del pendolo fisico. La forza peso è infatti conservativa, e la reazione vincolare è specificata essere non-dissipativa in questo esercizio, quindi l'energia meccanica del sistema si conserva

$$K_A + U_A = K_B + U_B. \quad (286)$$

Essendo non-dissipativa, la reazione vincolare non compie lavoro, quindi l'unica energia potenziale è quella della forza peso. Scegliamo come zero della quota la direzione orizzontale passante per il pernio  $O$  e contiamo quote positive lungo la verticale verso l'alto. Come configurazione iniziale scegliamo quella specificata dalla traccia, cioè quella in cui il pendolo parte da fermo all'angolo  $\theta_0$ , perciò

$$K_A = 0 \quad (287a)$$

$$U_A = -mg\frac{l}{2}\cos\theta_0. \quad (287b)$$

Ricordiamo che, per quanto riguarda l'energia potenziale gravitazionale, ciò che conta è la posizione del centro di massa. Come configurazione finale scegliamo il generico istante, dunque

$$K_B = \frac{1}{2}I_O\omega^2 \quad (288a)$$

$$U_B = -mg\frac{l}{2}\cos\theta. \quad (288b)$$

Notiamo che per calcolare l'energia cinetica avremmo potuto usare anche il teorema di König, secondo cui l'energia cinetica totale è uguale alla somma dell'energia cinetica del centro di massa più l'energia cinetica rispetto al centro di massa

$$K = \frac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega^2. \quad (289)$$

Essendo il moto curvilineo (circolare in particolare),  $v_{\text{CM}} = \frac{l}{2}\omega$ , da cui

$$K = \frac{1}{2}m\frac{l^2}{4}\omega^2 + \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega^2 = \frac{1}{2}\underbrace{\left(I_{\text{CM}} + m\frac{l^2}{4}\right)}_{=I_O}\omega^2 = \frac{1}{2}I_O\omega^2 \quad (290)$$

grazie al teorema di Huygens-Steiner, come volevasi dimostrare.

Dalla legge di conservazione dell'energia meccanica otteniamo

$$I_O\dot{\theta}^2 = mgl(\cos\theta - \cos\theta_0). \quad (291)$$

Possiamo convincerci che questa è la giusta espressione derivandola rispetto al tempo e vedendo che coincide con l'equazione di moto (278)

$$I_O2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{mgl}{2I_O}\sin\theta = 0, \quad (292)$$

come volevasi dimostrare. Sostituendo l'espressione di  $I_O$  troviamo infine la velocità angolare (al quadrato)

$$\dot{\theta}^2 = 3\frac{g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0), \quad (293)$$

analoga alla (142) del pendolo matematico.

## Esercizi del 07/12/18

### Esercizio 21

(dinamica dei sistemi di punti e corpi rigidi)

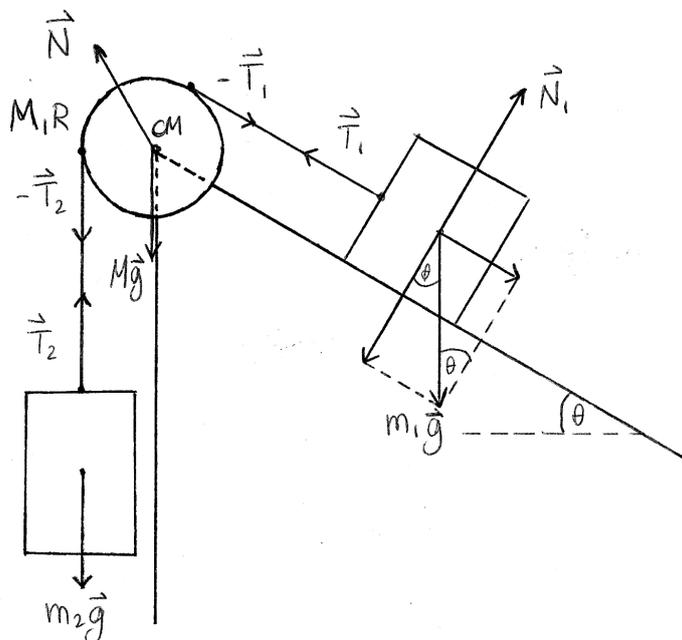


Figura 18

Sia dato un sistema composto da due oggetti di masse  $m_1$  e  $m_2$  collegati l'uno all'altro da una corda non-elastica, di massa trascurabile, passante per una carrucola cilindrica di raggio  $R$  e massa  $M$ . Il sistema è disposto su un piano liscio inclinato di un angolo  $\theta$  come mostrato in Figura 18. La carrucola è omogenea, e la corda vi scorre facendola ruotare senza strisciare e senza dissipazione. Discutere il moto e determinare l'accelerazione con cui si muovono i due oggetti di masse  $m_1$  e  $m_2$  confrontando il caso in cui  $M = 0$  e il caso in cui  $M > 0$ .

$$\left[ \begin{array}{l} M = 0 \quad : \quad a = \frac{m_1 \sin \theta - m_2}{m_1 + m_2} g \\ M > 0 \quad : \quad a = \frac{m_1 \sin \theta - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} g \end{array} \right]$$

#### Svolgimento

Partiamo dal caso  $M = 0$ , cioè la massa della carrucola è trascurabile rispetto a  $m_1$  e  $m_2$ . Gli oggetti di masse  $m_1$  e  $m_2$  possono essere considerati come puntiformi, quindi per studiarne il moto applichiamo semplicemente le leggi di Newton. Le forze che agiscono sull'oggetto di massa  $m_1$  sono la forza peso  $m_1 \vec{g}$ , la reazione vincolare  $\vec{N}_1$  e la tensione  $\vec{T}_1$ . Le forze che agiscono sull'oggetto di massa  $m_2$  sono la forza peso  $m_2 \vec{g}$  e la tensione  $\vec{T}_2$ .

Dalla seconda legge di Newton scriviamo quindi le equazioni di moto

$$m_1 \vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 = m_1 \vec{a}_1 \quad (294a)$$

$$m_2 \vec{g} + \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}_2, \quad (294b)$$

che proiettate come al solito danno rispettivamente

$$m_1 g \cos \theta - N_1 = 0 \quad (295a)$$

$$m_1 g \sin \theta - T_1 = m_1 a_1 \quad (295b)$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a_2. \quad (295c)$$

Notiamo che, per come abbiamo attribuito i segni, stiamo supponendo che l'oggetto di massa  $m_1$  scenda e quello di massa  $m_2$  salga. Naturalmente, se alla fine dei calcoli  $a$  sarà positivo, significa che avremo avuto ragione, mentre se sarà negativo significa che  $m_1$  sale e  $m_2$  scende. Il sistema è dunque descritto da tre equazioni nelle cinque incognite  $(a_1, a_2, T_1, T_2, N_1)$ . D'altra parte la corda non è elastica, perciò i due oggetti si muovono necessariamente con la stessa velocità, da cui

$$a_1 = a_2 \equiv a. \quad (296)$$

Inoltre la corda scorre nella carrucola facendola ruotare senza strisciare, il che significa che la tensione è la stessa in ogni punto della corda

$$T_1 = T_2 \equiv T. \quad (297)$$

Il sistema è allora costituito dalle (295) e dalle relazioni (296) e (297), il che ci dà cinque equazioni in cinque incognite, perciò la soluzione è univocamente determinata. La (295a) ci dice semplicemente che il modulo della reazione vincolare vale  $N_1 = m_1 g \cos \theta$ . Sostituendo le (296) e (297) nelle (295b) e (295c) ricaviamo il modulo della tensione e l'accelerazione, richiesta dalla traccia

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 + \sin \theta) g \quad (298)$$

$$a = \frac{m_1 \sin \theta - m_2}{m_1 + m_2} g. \quad (299)$$

L'analisi dimensionale conferma che le dimensioni della tensione e dell'accelerazione sono corrette. Osserviamo che la tensione non può mai essere nulla, infatti

$$T = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \sin \theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{3\pi}{2}, \quad (300)$$

ma chiaramente per un piano inclinato si ha  $\theta \in (0, \pi/2)$ , da cui la conclusione che fisicamente ci si aspetta. D'altra parte è possibile che l'accelerazione con cui si muovono i due blocchi sia nulla, basta infatti preparare il sistema in modo tale che

$$a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 \sin \theta - m_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin \theta = \frac{m_2}{m_1}. \quad (301)$$

Se  $m_2 < m_1$  è possibile trovare un valore di  $\theta$  tale per cui  $a = 0$ , nel qual caso i due oggetti restano immobili o si muovono di moto rettilineo uniforme. Né la tensione né l'accelerazione possono mai divergere, qualunque siano i valori di  $(m_1, m_2, \theta)$ , come ci si aspetta.

Passiamo adesso al caso  $M > 0$ , ossia ci chiediamo cosa cambia quando la massa della carrucola è confrontabile con  $m_1, m_2$ . Per quanto riguarda i due oggetti di masse  $m_1$  e  $m_2$  niente è cambiato: le forze che agiscono su di essi sono le stesse del caso precedente, essi possono ancora essere considerati punti materiali e le loro equazioni di moto sono di nuovo le (295). Stavolta, però, essendo la massa della carrucola non-trascurabile, dobbiamo considerare anche le sue equazioni di moto. La carrucola è costituita da un insieme rigido di punti che si muovono con velocità diverse a seconda della distanza dal centro, pertanto non possiamo considerarla come puntiforme ma come un sistema di punti, pertanto dobbiamo usare le equazioni cardinali. In particolare, la carrucola ruota senza traslare, dunque l'equazione cardinale che dobbiamo usare è la seconda

$$\vec{M}_\Omega^{\text{ext}} = \vec{v}_\Omega \wedge \vec{Q} + \frac{d\vec{L}_\Omega}{dt}. \quad (302)$$

Dobbiamo scegliere un polo  $\Omega$ . Le scelte più convenienti sono quelle che semplificano il calcolo, cioè solitamente quelle per cui ci sono meno termini da calcolare. Le forze che agiscono sulla carrucola sono rappresentate in Figura 18, e sono la forza peso  $M\vec{g}$ , la reazione vincolare  $\vec{N}$  ortogonale alla superficie di contatto fra la carrucola e il vincolo, e le tensioni  $-\vec{T}_1$  e  $-\vec{T}_2$  tangenti alla carrucola nel punto in cui la corda vi entra. Essendo la carrucola omogenea, il suo centro di massa coincide con il suo baricentro, che nella sezione rappresentata in figura sta nel centro del cerchio di raggio  $R$ . La scelta del polo che semplifica maggiormente il calcolo è quella in cui il polo coincide con il centro di massa. In tal caso, infatti, la velocità del polo è nulla, quindi al secondo membro della seconda equazione cardinale abbiamo soltanto la derivata del momento angolare rispetto al tempo; mentre al primo membro abbiamo soltanto i momenti delle due tensioni, in quanto i bracci della forza peso e della reazione vincolare sono nulli. Non manchiamo di notare anche che l'espressione della reazione vincolare  $\vec{N}$  non è nota a priori, quindi la suddetta scelta del polo è ulteriormente vantaggiosa perché permette di aggirare questa nostra ignoranza. Abbiamo quindi

$$\vec{M}_{\text{CM}}^{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}_{\text{CM}}}{dt}. \quad (303)$$

Dobbiamo stabilire un verso positivo e un verso negativo per le rotazioni. Scegliamo ad esempio il verso positivo per le rotazioni in senso orario e negativo per quelle in senso antiorario. Per questa scelta,  $-\vec{T}_1$  dà al primo membro un contributo positivo, e  $-\vec{T}_2$  negativo. Inoltre, essendo le due tensioni tangenti alla carrucola, l'angolo compreso fra esse e i rispettivi bracci è  $\pi/2$ , dunque nel modulo del prodotto vettoriale il seno di tale angolo è 1. Il modulo di entrambi i bracci è naturalmente il raggio  $R$  della carrucola, quindi

$$M_{\text{CM}}^{\text{ext}} = RT_1 - RT_2. \quad (304)$$

Il secondo membro della seconda equazione cardinale è semplicemente  $I_{\text{CM}}\vec{\alpha}$  con  $\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}}$  accelerazione angolare della rotazione attorno all'asse passante per il centro di massa, da cui

$$I_{\text{CM}}\alpha = RT_1 - RT_2. \quad (305)$$

Riassumendo, il sistema è descritto dalle (295) e dalla (305), che sono quattro equazioni nelle sei incognite  $(a_1, a_2, T_1, T_2, N, \alpha)$ . Come nel caso precedente, la corda non è elastica, quindi i due oggetti di masse  $m_1$  e  $m_2$  si muovono con la stessa velocità  $v$ , da cui

$$a_1 = a_2 \equiv a. \quad (306)$$

Inoltre la corda scorre nella carrucola facendola ruotare senza strisciare, il che significa che la velocità con cui la corda scorre è  $v = \omega R$ , con  $\omega$  velocità angolare di rotazione della carrucola attorno all'asse passante per il centro di massa, da cui

$$a = R\alpha. \quad (307)$$

Il sistema è allora descritto dalle (295) e (305) unite alle (306) e (307), che costituiscono un sistema di sei equazioni in sei incognite, perciò la soluzione è univocamente determinata. Dalla (295a) troviamo ancora una volta che il modulo della reazione vincolare  $N_1$  vale  $N_1 = m_1 g \cos \theta$ . Le (295b) e (295c), grazie alla (306), forniscono i moduli delle tensioni

$$T_1 = m_1(g \sin \theta - a) \quad (308a)$$

$$T_2 = m_2(a - g). \quad (308b)$$

Dalla (307) ricaviamo l'espressione di  $a$

$$\frac{I_{CM}}{R^2}a = T_1 - T_2 = m_1(g \sin \theta - a) - m_2(a - g) \quad (309)$$

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{I_{CM}}{R^2}\right)a = (m_1 \sin \theta - m_2)g \quad (310)$$

$$a = \frac{m_1 \sin \theta - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{I_{CM}}{R^2}}g. \quad (311)$$

Il momento d'inerzia di un cilindro di massa  $M$  e raggio  $R$  calcolato rispetto al centro di massa è  $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$ , da cui infine

$$a = \frac{m_1 \sin \theta - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}g. \quad (312)$$

La prima osservazione è che per  $M = 0$  recuperiamo la (299) che abbiamo trovato nel caso  $M = 0$ , come ci aspettiamo. Notiamo anche che, anche nel caso  $M > 0$ , l'accelerazione non può divergere per alcuna combinazione di  $(m_1, m_2, M, \theta)$ . Inoltre, proprio come nel caso  $M = 0$ ,  $a$  si annulla per  $\sin \theta = m_2/m_1$ , soltanto se  $m_2 < m_1$ . Altra osservazione importante è la seguente. Dalle (308) si vede facilmente che  $T_1 = T_2$  soltanto se  $a$  è dato dalla (299), che chiaramente non coincide con la (312) appena trovata. In altre parole, quando la massa della carrucola non è trascurabile rispetto alle masse dei due oggetti, la tensione della corda non è uguale in ogni suo punto, a differenza di quanto accade quando invece la massa della carrucola è trascurabile. Essa vale  $T_1$  in tutti i punti della corda fra l'oggetto di massa  $m_1$  e il punto di contatto con la carrucola da quel lato, e  $T_2$  fra l'oggetto di massa  $m_2$  e il punto di contatto con la carrucola da quel lato, ma  $T_1 \neq T_2$ .

Allo stesso risultato saremmo potuti giungere sfruttando la conservazione dell'energia meccanica. Le forze agenti sul sistema sono le forze peso, le tensioni e le reazioni vincolari. La forza peso è conservativa, la tensione compie sempre lavoro nullo, e le reazioni vincolari sono in questo esercizio non-dissipative, dunque compiono anch'esse lavoro nullo. L'energia meccanica del sistema si conserva

$$K_A + U_A = K_B + U_B. \quad (313)$$

L'energia cinetica contiene i contributi dei due oggetti di masse  $m_1$  e  $m_2$  e anche della carrucola. L'energia potenziale contiene soltanto i contributi dovuti alle forze peso. Come

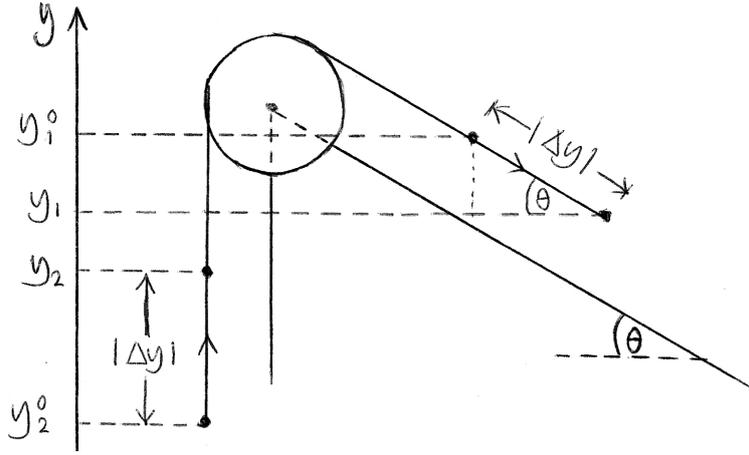


Figura 19

configurazione iniziale  $A$  scegliamo quella descritta dalla traccia in cui il sistema parte da fermo. Chiamiamo  $y_1^0$  e  $y_2^0$  le quote iniziali degli oggetti di masse  $m_1$  e  $m_2$  rispettivamente, e  $y_C$  quella della carrucola, che resta costante

$$K_A = 0 \quad (314a)$$

$$U_A = m_1 g y_1^0 + m_2 g y_2^0 + M g y_C. \quad (314b)$$

Come configurazione finale  $B$  scegliamo il generico istante di tempo, da cui

$$K_B = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 \quad (315a)$$

$$U_B = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + M g y_C, \quad (315b)$$

dove abbiamo chiamato  $y_1$  e  $y_2$  le quote degli oggetti di masse  $m_1$  e  $m_2$  rispettivamente al generico istante di tempo. L'energia cinetica della carrucola contiene, in linea di principio, un termine di traslazione del centro di massa ( $\frac{1}{2} M v_{CM}^2$ ) e uno di rotazione attorno all'asse passante per il centro di massa ( $\frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$ ), ma il primo è nullo poiché il centro di massa non trasla. Inoltre abbiamo già tenuto conto del fatto che, grazie alla non-elasticità della corda, la velocità dei due oggetti è la stessa, cioè  $v_1 = v_2 \equiv v$ . Infine, poiché la corda non striscia nella carrucola, abbiamo anche  $v = \omega R$ . La legge di conservazione dell'energia meccanica è dunque

$$\frac{1}{2} \left( m_1 + m_2 + \frac{I_{CM}}{R^2} \right) v^2 = m_1 g (y_1^0 - y_1) + m_2 g (y_2^0 - y_2). \quad (316)$$

Dalla Figura 19 notiamo facilmente che  $y_1^0 - y_1 = (y_2 - y_2^0) \sin \theta$ . Detto quindi  $\Delta y \equiv y_2 - y_2^0$  abbiamo  $y_2^0 - y_2 = -\Delta y$  e  $y_1^0 - y_1 = \Delta y \sin \theta$ , perciò

$$\frac{1}{2} \left( m_1 + m_2 + \frac{I_{CM}}{R^2} \right) v^2 = m_1 g \Delta y \sin \theta - m_2 g \Delta y. \quad (317)$$

La traccia richiede l'accelerazione, quindi dobbiamo derivare la suddetta equazione rispetto al tempo. Chiaramente si ha  $\dot{\Delta y} = v$ , da cui

$$\frac{1}{2} \left( m_1 + m_2 + \frac{I_{CM}}{R^2} \right) 2va = m_1 g v \sin \theta - m_2 g v, \quad (318)$$

che risolta per  $a$  dà di nuovo

$$a = \frac{m_1 \sin \theta - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{I_{CM}}{R^2}} g = \frac{m_1 \sin \theta - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} g, \quad (319)$$

come volevasi dimostrare.

## Esercizio 22

(dinamica dei sistemi di punti, corpi rigidi)

Un cilindro di raggio  $R$  e massa  $M$  viene lasciato rotolare lungo un piano inclinato di un angolo  $\theta$  rispetto all'orizzontale. Noto il coefficiente di attrito  $\mu$  fra cilindro e piano, determinare il moto e dire quali differenze di hanno nel caso in cui al posto del cilindro si abbia a che fare con una sfera o un anello di pari massa e raggio.

Svolgimento

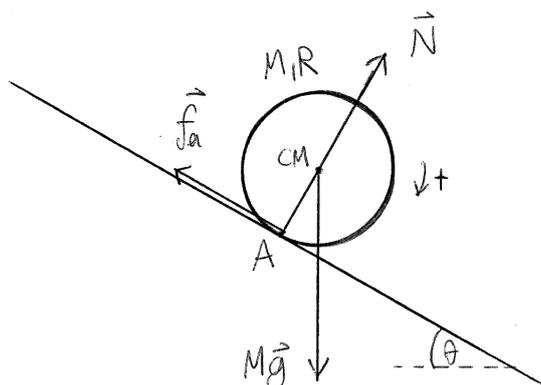


Figura 20

La situazione è mostrata in Figura 20. Le forze che agiscono sul cilindro sono la forza peso  $M\vec{g}$  applicata nel centro di massa, la reazione vincolare  $\vec{N}$  applicata nel punto di contatto fra cilindro e piano, e la forza di attrito  $\vec{f}_a$  applicata anch'essa nel punto di contatto. Il cilindro è un sistema di punti materiali, pertanto il suo moto è determinato dalle equazioni cardinali. La prima è

$$\vec{F}^{\text{ext}} = M\vec{g} + \vec{N} + \vec{f}_a = M\vec{a}_{\text{CM}}, \quad (320)$$

dove  $\vec{a}_{\text{CM}}$  è l'accelerazione del centro di massa. Proiettandola lungo la direzione del piano inclinato e lungo la sua perpendicolare si ottiene

$$N - Mg \cos \theta = 0 \quad (321a)$$

$$Mg \sin \theta - f_a = Ma_{\text{CM}}. \quad (321b)$$

La seconda equazione cardinale è

$$\vec{M}_{\Omega}^{\text{ext}} = \vec{v}_{\Omega} \wedge \vec{Q} + \frac{d\vec{L}_{\Omega}}{dt}, \quad (322)$$

dunque dobbiamo scegliere un polo rispetto a cui calcolarla. Le scelte più convenienti sono in generale quelle per cui il calcolo si semplifica. In questo esercizio potremmo scegliere il centro di massa oppure il punto di contatto. Nel primo caso è infatti nullo il momento della forza peso in quanto il braccio è nullo, e anche quello della reazione vincolare in quanto il braccio è parallelo alla forza. Nel secondo caso è nullo il momento della reazione vincolare e

della forza d'attrito in quanto i rispettivi bracci sono nulli. Scegliamo ad esempio  $\Omega \equiv \text{CM}$ , dunque al primo membro contribuisce solo il momento della forza d'attrito. Essa è parallela alla superficie di contatto fra il cilindro e il piano, cioè è ortogonale al braccio. Come verso positivo delle rotazioni scegliamo ad esempio il verso orario. La proiezione della seconda equazione cardinale lungo la direzione dell'asse di rotazione passante per il centro di massa e ortogonale al piano del moto è quindi

$$f_a R = I_{\text{CM}} \alpha, \quad (323)$$

dove  $\alpha$  è l'accelerazione angolare attorno all'asse di rotazione, e  $I_{\text{CM}}$  il momento d'inerzia rispetto allo stesso asse. Le (321) e la (323) costituiscono un sistema di tre equazioni nelle quattro incognite  $(N, f_a, a_{\text{CM}}, \alpha)$ , perciò, senza fare opportune ipotesi sul moto del cilindro, non sono sufficienti a determinarne il moto.

Cominciamo supponendo che il cilindro si muova di *puro rotolamento*, cioè ruoti senza strisciare. In tal caso  $v_{\text{CM}} = \omega R$ , dove  $\omega$  è la velocità angolare con cui il cilindro ruota attorno all'asse di rotazione, che derivata rispetto al tempo dà

$$a_{\text{CM}} = \alpha R. \quad (324)$$

Adesso abbiamo un sistema di quattro equazioni in quattro incognite, quindi il moto è univocamente determinato. Dalle (323) e (324) troviamo

$$f_a = \frac{I_{\text{CM}} a_{\text{CM}}}{R^2}, \quad (325)$$

che sostituita nella (321b) dà

$$Mg \sin \theta - \frac{I_{\text{CM}}}{R^2} a_{\text{CM}} = M a_{\text{CM}}, \quad (326)$$

da cui l'accelerazione del centro di massa e la forza d'attrito

$$a_{\text{CM}} = \frac{Mg \sin \theta}{M + \frac{I_{\text{CM}}}{R^2}} \quad (327)$$

$$f_a = \frac{I_{\text{CM}}}{R^2} \frac{Mg \sin \theta}{M + \frac{I_{\text{CM}}}{R^2}} = \frac{I_{\text{CM}}}{I_{\text{CM}} + MR^2} Mg \sin \theta. \quad (328)$$

Dalla (327) si vede che il moto è uniformemente accelerato, e che il cilindro continuerà sempre a ruotare senza strisciare. Dalla (328) si ricava la condizione sotto cui è valida l'ipotesi fatta di moto di puro rotolamento. Infatti, in tale moto, il punto di contatto è istantaneamente fermo, perciò l'attrito è statico, e come tale deve soddisfare  $f_a < \mu N$ . Imponendolo si ricava

$$\frac{I_{\text{CM}}}{I_{\text{CM}} + MR^2} Mg \sin \theta < \mu Mg \cos \theta, \quad (329)$$

da cui

$$\tan \theta < \mu \left( 1 + \frac{MR^2}{I_{\text{CM}}} \right). \quad (330)$$

Nel caso in cui il cilindro rotola senza strisciare, il moto può anche essere determinato ricorrendo alla legge di conservazione dell'energia meccanica. Infatti, la forza peso è conservativa, la reazione vincolare compie lavoro nullo, e anche la forza d'attrito compie lavoro nullo in quanto il punto di contatto è istantaneamente fermo<sup>10</sup>.

<sup>10</sup>Non strisciando, lo spostamento del punto di contatto è nullo, dunque il lavoro compiuto da  $\vec{f}_a$  è nullo.

Se la (330) non è soddisfatta, la (324) non è più valida; in questo caso, infatti, il cilindro rotola e contemporaneamente striscia sul piano, e le due accelerazioni  $a_{\text{CM}}$  e  $\alpha$  non sono più correlate fra loro. Non tutto è perduto, il problema è ancora determinato. Se il cilindro striscia, l'attrito è dinamico, quindi vale

$$f_a = \mu N, \quad (331)$$

che unita alle (321) e alla (323) costituisce un sistema di quattro equazioni nelle quattro incognite  $(N, f_a, a_{\text{CM}}, \alpha)$ . Dalla (321a) ricaviamo la reazione vincolare  $N$ , che sostituita nella (331) dà la forza di attrito  $f_a$ . Sostituendo quest'ultima nella (321b) e nella (331) ricaviamo rispettivamente l'accelerazione del centro di massa  $a_{\text{CM}}$  e l'accelerazione angolare  $\alpha$

$$a_{\text{CM}} = (\sin \theta - \mu \cos \theta) g, \quad (332)$$

$$\alpha = \frac{\mu MgR}{I_{\text{CM}}} \cos \theta. \quad (333)$$

Entrambe sono costanti, quindi anche stavolta il moto del cilindro è uniformemente accelerato. Resta da studiare il moto del punto di contatto, che chiamiamo  $A$ . Il cilindro ruota e striscia contemporaneamente, quindi la velocità  $v_{\text{CM}}$  del centro di massa sarà data dalla somma della velocità  $v_A$  con cui il cilindro striscia (che indichiamo con  $v_A$  poiché è la stessa per tutti i punti del cilindro, anche del punto di contatto in particolare) più la velocità  $\omega R$  con cui esso ruota, da cui

$$v_{\text{CM}} = v_A + \omega R \quad \Rightarrow \quad v_A = v_{\text{CM}} - \omega R. \quad (334)$$

È come dire che il moto del centro di massa riceve un contributo dalla traslazione e uno dalla rotazione. D'altra parte il moto è uniformemente accelerato, quindi  $v_{\text{CM}} = a_{\text{CM}}t$  e  $\omega = \alpha t$ , perciò

$$\begin{aligned} v_A &= (a_{\text{CM}}t - \alpha Rt) = (\sin \theta - \mu \cos \theta) gt - \frac{\mu MgR^2 \cos \theta}{I_{\text{CM}}} t = \\ &= \left[ \sin \theta - \left( 1 + \frac{MR^2}{I_{\text{CM}}} \right) \mu \cos \theta \right] gt. \end{aligned} \quad (335)$$

Questa è l'espressione della velocità del punto di contatto, che completa la descrizione del moto. Osserviamo che, se il cilindro striscia,  $v_A$  deve essere positiva per ogni istante di tempo  $t$ . Imponendo  $v_A > 0$  per ogni valore di  $t$  si ottiene la condizione

$$\sin \theta > \left( 1 + \frac{MR^2}{I_{\text{CM}}} \right) \mu \cos \theta \quad (336)$$

ossia

$$\tan \theta > \mu \left( 1 + \frac{MR^2}{I_{\text{CM}}} \right). \quad (337)$$

Questa equazione è complementare alla (330), il che conferma l'idea intuitiva che tutto ciò che può fare il cilindro è muoversi di puro rotolamento oppure ruotare e strisciare contemporaneamente. Non ci sono altre possibilità.

Infine, la traccia chiede di discutere cosa cambia se, al posto di un cilindro, abbiamo a che fare con una sfera o un anello di stessa massa e stesso raggio. Tutto ciò che cambia è l'espressione del momento d'inerzia  $I_{\text{CM}}$ . I risultati sono riportati nella tabella sottostante.

	puro rotolamento	rotolare e strisciare
cilindro $I_{\text{CM}} = \frac{1}{2}MR^2$	$\tan \theta < 3\mu$ $a_{\text{CM}} = \frac{2}{3}g \sin \theta$	$\tan \theta > 3\mu$ $a_{\text{CM}} = g(\sin \theta - \mu \cos \theta)$ $\alpha = 2\frac{\mu g}{R} \cos \theta$
sfera $I_{\text{CM}} = \frac{2}{5}MR^2$	$\tan \theta < \frac{7}{2}\mu$ $a_{\text{CM}} = \frac{5}{7}g \sin \theta$	$\tan \theta > \frac{7}{2}\mu$ $a_{\text{CM}} = g(\sin \theta - \mu \cos \theta)$ $\alpha = \frac{5}{2}\frac{\mu g}{R} \cos \theta$
anello $I_{\text{CM}} = MR^2$	$\tan \theta < 2\mu$ $a_{\text{CM}} = \frac{1}{2}g \sin \theta$	$\tan \theta > 2\mu$ $a_{\text{CM}} = g(\sin \theta - \mu \cos \theta)$ $\alpha = \frac{\mu g}{R} \cos \theta$

Le righe si riferiscono ai tre diversi corpi, cioè il cilindro, la sfera e l'anello. Le colonne si riferiscono ai due diversi moti, cioè il puro rotolamento e quello in cui il corpo rotola e striscia. In particolare, nella seconda colonna sono riportate la (330) e la (327), mentre nella terza colonna la (337), la (332) e la (333).

## Esercizi del 14/12/18

### Esercizio 23

(meccanica dei fluidi)

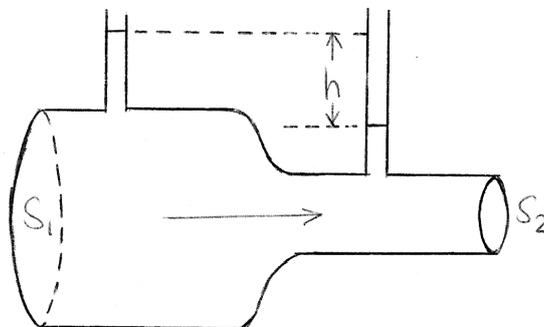


Figura 21

Due punti di un condotto orizzontale che trasporta acqua hanno sezioni diverse, con raggio  $R_1 = 1,2$  cm e  $R_2 = 0,5$  cm, mentre la differenza di pressione tra di loro è pari a un dislivello di  $h = 5$  cm d'acqua. Il sistema è rappresentato in Figura 21. Nell'ipotesi di fluidi ideali, calcolare le velocità dell'acqua  $v_1$  e  $v_2$  e la portata  $Q$  del condotto.

$$[v_1 \simeq 0,17 \text{ m/s}]$$

$$v_2 \simeq 1,00 \text{ m/s}$$

$$Q \simeq 7,90 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}]$$

#### Svolgimento

Consideriamo una linea di flusso ad altezza fissata che attraversa le due sezioni  $S_1$  e  $S_2$ . Il teorema di Bernoulli, che esprime la conservazione dell'energia, verificata in quanto il fluido non ha dissipazioni, per questa linea di flusso è

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g \tilde{h} + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g \tilde{h} + p_2, \quad (338)$$

ossia

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho (v_2^2 - v_1^2), \quad (339)$$

dove  $p_1$  e  $p_2$  sono le pressioni in corrispondenza delle sezioni  $S_1$  e  $S_2$  rispettivamente, e dove il termine potenziale gravitazionale  $\rho g \tilde{h}$  si elide in quanto la linea di flusso è stata scelta ad altezza fissata, indicata con  $\tilde{h}$ . A questa equazione aggiungiamo la seguente equazione di continuità, detta legge di Leonardo

$$S_1 v_1 = S_2 v_2, \quad (340)$$

che esprime la conservazione della massa, e che possiamo enunciare dicendo che la portata lungo il tubo è costante. Per ora abbiamo un sistema di due equazioni nelle quattro

incognite  $(p_1, p_2, v_1, v_2)$ , infatti la densità dell'acqua è nota  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ . D'altra parte la differenza di pressione  $p_1 - p_2$  è data dalla legge di Stevino

$$p_1 - p_2 = \rho gh. \quad (341)$$

Questa equazione è sufficiente a rendere il sistema completamente determinato, infatti il teorema di Bernoulli (339) non dipende da  $p_1$  e  $p_2$  indipendentemente, ma piuttosto dalla differenza  $p_1 - p_2$ , governata dalla legge di Stevino. In altre parole, le equazioni suggeriscono che le variabili non siano tanto  $p_1$  e  $p_2$  individualmente, ma piuttosto la loro combinazione  $p_1 - p_2$ . Il sistema è quindi descritto dalle tre equazioni di cui sopra nelle tre incognite  $(p_1 - p_2, v_1, v_2)$ . Combinando il teorema di Bernoulli e la legge di Stevino otteniamo

$$gh = \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2). \quad (342)$$

Dalla legge di Leonardo ricaviamo una delle due velocità in funzione dell'altra, ad esempio  $v_1$  in funzione di  $v_2$

$$v_1 = \frac{S_2}{S_1} v_2, \quad (343)$$

e sostituendo nella (342) ricaviamo  $v_2$

$$gh = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{S_2^2}{S_1^2} \right) v_2^2 \quad (344)$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{(\pi R_2^2)^2}{(\pi R_1^2)^2}}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{R_2^4}{R_1^4}}}. \quad (345)$$

Sostituendo i valori numerici otteniamo

$$v_2 \simeq \sqrt{\frac{2 \times 9,81 \text{ m/s}^2 \times 5 \times 10^{-2} \text{ m}}{1 - \frac{(5 \times 10^{-2} \text{ m})^4}{(1,2 \times 10^{-2} \text{ m})^4}}} \simeq 1,00 \text{ m/s}. \quad (346)$$

Otteniamo quindi anche  $v_1$

$$v_1 = \frac{S_2}{S_1} v_2 = \frac{\pi R_2^2}{\pi R_1^2} v_2 = \frac{R_2^2}{R_1^2} v_2, \quad (347)$$

e sostituendo i valori numerici

$$v_1 \simeq 0,17 \text{ m/s}. \quad (348)$$

Per ricavare la portata  $Q$  basta moltiplicare  $S_1 v_1$  o equivalentemente  $S_2 v_2$

$$Q = S_1 v_1 = S_2 v_2 \simeq 7,90 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}. \quad (349)$$

## Esercizio 24

(meccanica dei fluidi)

Dell'acqua viene pompata da un fiume fino a un villaggio di montagna attraverso un tubo di diametro  $d = 15$  cm. Il fiume è alla quota  $h_f = 564$  m, mentre il villaggio si trova alla quota  $h_v = 2096$  m. Se ogni giorno vengono pompate  $4500 \text{ m}^3$  di acqua, qual è la velocità dell'acqua all'interno del tubo? Supponendo che l'acqua scorra nel fiume molto lentamente ( $v_f \simeq 0$ ), qual è la pressione con cui viene pompata l'acqua dal fiume al villaggio?

$$[v \simeq 2,6 \text{ m/s}]$$

$$p_f \simeq 15,13 \times 10^6 \text{ Pa}]$$

### Svolgimento

Per ricavare la velocità  $v$  con cui l'acqua viene pompata nel tubo è sufficiente applicare la definizione di portata

$$Q = Sv = \pi r^2 v = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 v = \pi \frac{d^2}{4} v \quad (350)$$

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2}, \quad (351)$$

da cui il valore numerico

$$v = \frac{4 \cdot 4500 \text{ m}^3}{\pi \cdot \text{giorno}} \frac{1}{(15 \text{ cm})^2} = \frac{4 \cdot 4500 \text{ m}^3}{\pi \cdot 24 \times 3600 \text{ s}} \frac{1}{(15 \times 10^{-2} \text{ m})^2} \simeq 2,6 \text{ m/s}. \quad (352)$$

Per calcolare la pressione al livello del fiume utilizziamo il teorema di Bernoulli. Come configurazioni scegliamo quella al livello del fiume e quella al livello del villaggio

$$p_f + \rho g h_f + \frac{1}{2} \cancel{\rho v_f^2} = p_v + \rho g h_v + \frac{1}{2} \rho v_v^2, \quad (353)$$

dove trascuriamo il termine cinetico al livello del fiume poiché la traccia dice  $v_f \simeq 0$ . Esplicitando per  $p_f$

$$p_f = p_v + \rho g (h_v - h_f) + \frac{1}{2} \rho v_v^2. \quad (354)$$

Dalla legge di Leonardo deduciamo che, essendo il diametro del tubo costante lungo tutto il tragitto, la velocità  $v_v$  al livello del villaggio è la stessa velocità  $v$  in un punto qualunque del tubo, data dalla (351). Inoltre, la pressione  $p_v$  al livello del villaggio è senz'altro la pressione atmosferica  $p_{\text{atm}} \simeq 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$ . Abbiamo quindi tutti gli ingredienti per calcolare  $p_f$

$$p_f = p_{\text{atm}} + \rho g (h_v - h_f) + \frac{1}{2} \rho v^2. \quad (355)$$

Sostituendo i valori numerici

$$\begin{aligned} p_f &\simeq 1,013 \times 10^5 \text{ Pa} + 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 9,81 \text{ m/s}^2 (2096 - 564) \text{ m} + \frac{1}{2} 10^3 \text{ kg/m}^3 (2,6 \text{ m/s})^2 \simeq \\ &\simeq 15,13 \times 10^6 \text{ Pa}. \end{aligned} \quad (356)$$

## Esercizio 25

(meccanica dei fluidi)

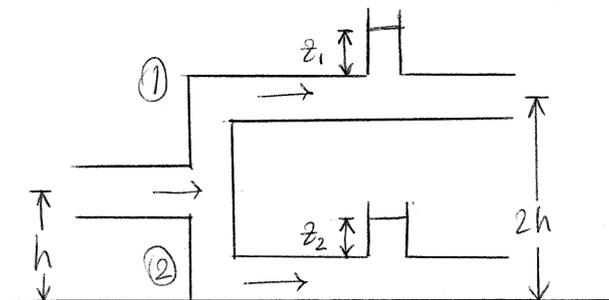


Figura 22

Un tubo posto ad altezza  $h = 16$  m da terra e in cui scorre acqua in regime stazionario si biforca in due pezzi, che chiamiamo 1 e 2, ad altezza  $2h$  e al suolo rispettivamente. Lungo il tubo e prima della biforcazione, la pressione è  $p = 3p_{\text{atm}}$ . Lungo entrambi i rami sono date due colonne verticali aperte in cima, riempite per due altezze pari a  $z_1 = h/3$  e  $z_2 = h/2$  rispettivamente, misurate dalla base dei rispettivi tubi. Quanto valgono le pressioni  $p_1$  e  $p_2$  nei due rispettivi tratti di tubo 1 e 2? Dette  $v_1$  e  $v_2$  le velocità dell'acqua nei rispettivi tratti, detta  $v$  la velocità nel tratto della biforcazione, sapendo che vale  $v_2 = 3v$ , si trovino  $v$ ,  $v_1$  e  $v_2$ .

$$\begin{aligned} [p_1 &\simeq 1,52 \text{ atm} \\ p_2 &\simeq 1,77 \text{ atm} \\ v &\simeq 8,38 \text{ m/s} \\ v_1 &\simeq 7,54 \text{ m/s} \\ v_2 &\simeq 25,15 \text{ m/s}] \end{aligned}$$

### Svolgimento

Le pressioni  $p_1$  e  $p_2$  nei rami 1 e 2 sono determinate dalla legge di Stevino

$$p_1 = p_0 + \rho g z_1 = p_{\text{atm}} + \rho g \frac{h}{3} \quad (357a)$$

$$p_2 = p_0 + \rho g z_2 = p_{\text{atm}} + \rho g \frac{h}{2}, \quad (357b)$$

dove abbiamo usato il fatto che  $p_0 = p_{\text{atm}}$ , infatti la pressione sopra le colonne alte  $z_1$  e  $z_2$  è la pressione atmosferica. Sostituendo i valori numerici

$$p_1 \simeq 1,54 \times 10^5 \text{ Pa} \simeq 1,52 \text{ atm} \quad (358a)$$

$$p_2 \simeq 1,80 \times 10^5 \text{ Pa} \simeq 1,77 \text{ atm}. \quad (358b)$$

Passiamo adesso alle velocità  $v$ ,  $v_1$  e  $v_2$ . Scriviamo il teorema di Bernoulli prima legando il tubo prima della biforcazione e il ramo 1, poi il tubo prima della biforcazione e il ramo

2

$$p + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_1 + \rho g 2h + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \quad (359a)$$

$$p + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2, \quad (359b)$$

dove abbiamo usato il fatto che il ramo 1 è all'altezza  $2h$  e il ramo 2 al suolo. Al primo membro possiamo sostituire  $p = 3p_{\text{atm}}$  fornito dalla traccia, e al secondo membro possiamo sostituire  $p_1$  e  $p_2$  date dalle (357)

$$3p_{\text{atm}} + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_{\text{atm}} + \rho g \frac{h}{3} + 2\rho gh + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \quad (360a)$$

$$3p_{\text{atm}} + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_{\text{atm}} + \rho g \frac{h}{2} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (360b)$$

da cui

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 = 2p_{\text{atm}} - \frac{4}{3}\rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 \quad (361a)$$

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 = 2p_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2. \quad (361b)$$

Nella (361b) sostituiamo  $v_2 = 3v$  e risolviamo per  $v$

$$\frac{9}{2}\rho v^2 = 2p_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 \quad \Rightarrow \quad 4\rho v^2 = 2p_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\rho gh \quad (362)$$

$$v^2 = \frac{1}{4} \left( 2\frac{p_{\text{atm}}}{\rho} + \frac{1}{2}gh \right) \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{2} \sqrt{2\frac{p_{\text{atm}}}{\rho} + \frac{1}{2}gh}. \quad (363)$$

Sostituendo i valori numerici otteniamo

$$v \simeq 8,38 \text{ m/s}. \quad (364)$$

Sapendo che  $v_2 = 3v$  otteniamo

$$v_2 = \frac{3}{2} \sqrt{2\frac{p_{\text{atm}}}{\rho} + \frac{1}{2}gh} \quad (365)$$

$$v_2 \simeq 25,15 \text{ m/s}. \quad (366)$$

Infine dalla (361a) ricaviamo  $v_1$

$$v_1^2 = 4\frac{p_{\text{atm}}}{\rho} - \frac{8}{3}gh + v^2 = 4\frac{p_{\text{atm}}}{\rho} - \frac{8}{3}gh + \frac{1}{4} \left( 2\frac{p_{\text{atm}}}{\rho} + \frac{1}{2}gh \right) = \frac{9}{2}p_{\text{atm}} - \frac{61}{24}gh \quad (367)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{9}{2}p_{\text{atm}} - \frac{61}{24}gh} \quad (368)$$

$$v_1 \simeq 7,54 \text{ m/s}. \quad (369)$$

## Esercizio 26

(termodinamica)

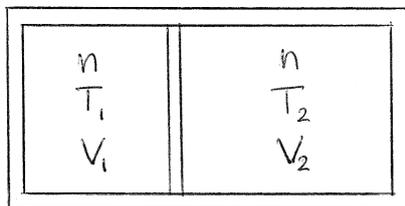


Figura 23

Il recipiente in Figura 23, impermeabile al calore, è diviso in due scomparti da un setto scorrevole, anch'esso impermeabile al calore. Inizialmente in ciascuno dei due scomparti si trovano  $n = 2$  moli di un gas ideale monoatomico alle temperature  $T_1 = 300$  K e  $T_2 = 400$  K. Si conosce il volume totale del recipiente  $V = 10$  l. Determinare i volumi iniziali occupati dai due gas. Se si permette al calore di passare spontaneamente attraverso il setto, quanto vale la temperatura finale di equilibrio del sistema? Di quanto è cambiata l'entropia?

$$[V_1 \simeq 4,29 \text{ l}]$$

$$V_2 \simeq 5,71 \text{ l}$$

$$T_{\text{eq}} = 350 \text{ K}$$

$$\Delta S \simeq 0,86 \text{ J/K}]$$

### Svolgimento

Essendo il gas contenuto nei due scomparti ideale, le sue variabili termodinamiche sono legate dalla legge dei gas perfetti in ciascuno scomparto

$$p_1 V_1 = n_1 R T_1 \quad (370a)$$

$$p_2 V_2 = n_2 R T_2. \quad (370b)$$

dove la somma dei due volumi costituisce il volume totale noto

$$V = V_1 + V_2. \quad (371)$$

La traccia dice che il numero di moli di gas è lo stesso in ogni scomparto ed è pari a  $n_1 = n_2 \equiv n = 2$ . Inoltre, essendo il setto scorrevole, i due scomparti si trovano all'equilibrio meccanico. In altre parole, se la pressione di uno dei due scomparti è maggiore di quella dell'altro, il setto viene spinto verso il setto a pressione minore. Così facendo, la pressione nel primo scomparto diminuisce e quella nel secondo aumenta. Il setto continua ad essere spinto finché la pressione dei due scomparti si uguaglia, cioè finché il sistema raggiunge l'equilibrio meccanico. In questa configurazione  $p_1 = p_2 \equiv p$ , da cui

$$p V_1 = 2 R T_1 \quad (372a)$$

$$p V_2 = 2 R T_2. \quad (372b)$$

Le (372) insieme alla (371) costituiscono un sistema di tre equazioni nelle tre incognite  $(p, V_1, V_2)$ , che dunque è determinato. Dividendo membro a membro le (372) otteniamo

$$V_1 = \frac{T_1}{T_2} V_2, \quad (373)$$

che sostituita nella (371) permette di ricavare  $V_2$

$$\left(1 + \frac{T_1}{T_2}\right) V_2 = V \quad \Rightarrow \quad \frac{T_1 + T_2}{T_2} V_2 = V \quad \Rightarrow \quad V_2 = \frac{T_2}{T_1 + T_2} V \quad (374)$$

e banalmente anche  $V_1$

$$V_1 = V - V_2 = \left(1 - \frac{T_2}{T_1 + T_2}\right) V = \frac{T_1}{T_1 + T_2} V. \quad (375)$$

Sostituendo i valori numerici otteniamo

$$V_1 = \frac{300 \text{ K}}{(300 + 400) \text{ K}} 10 \text{ l} \simeq 4,29 \text{ l} \quad (376a)$$

$$V_2 = \frac{400 \text{ K}}{(300 + 400) \text{ K}} 10 \text{ l} \simeq 5,71 \text{ l}. \quad (376b)$$

Passiamo adesso alla temperatura di equilibrio  $T_{\text{eq}}$ . Dato che il contenitore è isolato, la sua energia interna non cambia, dunque possiamo scrivere la conservazione  $U_A = U_B$  per due stati  $A$  e  $B$  qualunque. Come stato  $A$  scegliamo quello iniziale, in cui i due scomparti sono alle temperature  $T_1$  e  $T_2$ , pertanto

$$U_A = nc_V T_1 + nc_V T_2, \quad (377)$$

dove è implicito il fatto che ciascuno scomparto possiede lo stesso numero di moli ( $n_1 = n_2 = n$ ) dello stesso gas ( $c_{V1} = c_{V2} = c_V$ ). Come stato  $B$  scegliamo quello finale, in cui si hanno  $2n$  moli dello stesso gas alla temperatura di equilibrio  $T_{\text{eq}}$

$$U_B = 2nc_V T_{\text{eq}}. \quad (378)$$

Uguagliando  $U_A$  con  $U_B$  ricaviamo  $T_{\text{eq}}$

$$2nc_V T_{\text{eq}} = nc_V T_1 + nc_V T_2 \quad \Rightarrow \quad T_{\text{eq}} = \frac{T_1 + T_2}{2}. \quad (379)$$

Sostituendo i valori numerici

$$T_{\text{eq}} = \frac{(300 + 400) \text{ K}}{2} = 350 \text{ K}. \quad (380)$$

Ce lo potevamo aspettare, infatti nei due scomparti abbiamo lo stesso numero di moli dello stesso gas, quindi la temperatura di equilibrio non può essere altro che una media aritmetica delle due temperature. Se invece nei due scomparti avessimo avuto moli diverse di gas diversi, il risultato sarebbe cambiato. In particolare sarebbe stato una media delle temperature pesata sul prodotto del numero di moli per il calore specifico.<sup>11</sup>

<sup>11</sup>

$$T_{\text{eq}} = \frac{n_1 c_{V1} T_1 + n_2 c_{V2} T_2}{n_1 c_{V1} + n_2 c_{V2}}$$

Passiamo alla variazione di entropia  $\Delta S$ . Per esprimere la variazione di entropia di un gas ideale da uno stato iniziale  $A$  a uno stato finale  $B$  possiamo usare l'equazione

$$\Delta S = nc_V \log \left( \frac{T_B}{T_A} \right) + nR \log \left( \frac{V_B}{V_A} \right), \quad (381)$$

dove  $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$ , cioè la variazione di entropia complessiva è data dalla variazione di entropia del primo scomparto più quella del secondo scomparto. Come stato iniziale  $A$  e finale  $B$  scegliamo gli stessi di prima. Nello stato iniziale  $A$  i due scomparti hanno le temperature  $T_1$  e  $T_2$  e occupano i volumi  $V_1$  e  $V_2$  dati dalle (375) e (374) rispettivamente. Nello stato finale  $B$  i due scomparti si trovano entrambi alla temperatura di equilibrio  $T_{\text{eq}}$  data dalla (379) e occupano entrambi un volume pari a metà del volume complessivo,  $V/2$ . Per convincerci di quest'ultima affermazione, basta sostituire  $T_1 = T_2 = T_{\text{eq}}$  nella (373). In altre parole, il primo scomparto passa dallo stato  $A$  allo stato  $B$  descritti da

$$A : \left( T_1, \frac{T_1}{T_1 + T_2} V \right) \quad \longrightarrow \quad B : \left( \frac{T_1 + T_2}{2}, \frac{V}{2} \right), \quad (382)$$

pertanto la sua variazione di entropia è

$$\begin{aligned} \Delta S_1 &= nc_V \log \left( \frac{T_{\text{eq}}}{T_1} \right) + nR \log \left( \frac{V}{2V_1} \right) = \\ &= nc_V \log \left( \frac{T_1 + T_2}{2T_1} \right) + nR \log \left( \frac{V}{2} \frac{T_1 + T_2}{T_1 V} \right) = \\ &= n(c_V + R) \log \left( \frac{T_1 + T_2}{2T_1} \right) = nc_P \log \left( \frac{T_1 + T_2}{2T_1} \right). \end{aligned} \quad (383)$$

Analogamente, il secondo scomparto passa dallo stato  $A$  allo stato  $B$  descritti da

$$A : \left( T_2, \frac{T_2}{T_1 + T_2} V \right) \quad \longrightarrow \quad B : \left( \frac{T_1 + T_2}{2}, \frac{V}{2} \right), \quad (384)$$

pertanto la sua variazione di entropia è

$$\begin{aligned} \Delta S_2 &= nc_V \log \left( \frac{T_{\text{eq}}}{T_2} \right) + nR \log \left( \frac{V}{2V_2} \right) = \\ &= nc_V \log \left( \frac{T_1 + T_2}{2T_2} \right) + nR \log \left( \frac{V}{2} \frac{T_1 + T_2}{T_2 V} \right) = \\ &= n(c_V + R) \log \left( \frac{T_1 + T_2}{2T_2} \right) = nc_P \log \left( \frac{T_1 + T_2}{2T_2} \right). \end{aligned} \quad (385)$$

Sommando le due variazioni otteniamo la variazione complessiva

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 = nc_P \left[ \log \left( \frac{T_1 + T_2}{2T_1} \right) + \log \left( \frac{T_1 + T_2}{2T_2} \right) \right] = \\ &= nc_P \log \left( \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2} \right). \end{aligned} \quad (386)$$

Sapendo che per un gas ideale monoatomico  $c_P = \frac{5}{2}R$  e che  $R \simeq 8,31 \text{ J}/(\text{mol K})$  otteniamo il valore numerico

$$\Delta S \simeq 2 \text{ mol} \times \frac{5}{2} \times 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \log \left( \frac{(300 \text{ K} + 400 \text{ K})^2}{4 \times 300 \text{ K} \times 400 \text{ K}} \right) \simeq 0,86 \text{ J/K}. \quad (387)$$