Fisica 1 Elettronica e Telecomunicazioni. Compito del 21/1/2019

Istruzioni. Indicare chiaramente quale domanda viene trattata. Per ogni domanda scrivere succintamente le leggi fisiche usate, i passaggi effettuati, la soluzione analitica (con i simboli) e quella numerica (con le unità di misura). Attenzione alla conversione tra unità (equivalenze). I problemi possono contenere dati che non servono per trovare la soluzione. Consegnare solo la bella copia, marcando chiaramente le parti che non devono essere considerate. Trattenere la brutta copia o comunque appuntarsi i risultati per confrontarli con la soluzione (Moodle).

Valutazione. Viene valutato l'aver indicato correttamente le leggi usate, la derivazione analitica, il risultato analitico e numerico corretto. Se è presente il solo risultato analitico o numerico l'esercizio non viene considerato valido.

Alcune grandezze utili. Accelerazione di gravità: $g = 9.8$ m/s^2. Momento di inerzia baricentrale di un cilindro di raggio R e massa M: $I_G = (1/2)MR^2$. Momento di inerzia baricentrale di un'asta omogenea di lunghezza L e massa M: $I_G = (1/12)ML^2$. Costante dei gas $R = 8.3$ J/mol K. Conversione calorie-joule: 1 kcal = 4184 J. Pressione atmosferica $P_a = 10^5$ Pa. Calore specifico molare di un gas monoatomico $c_V = (3/2)R$, di un gas biatomico $c_V = (5/2)R$

Suggerimenti. Questi sono problemi di fisica, non di matematica, quindi cercare di immaginarsi il sistema nella realtà. Di solito esistono più modi per arrivare alla soluzione.

Problema 1 (4 punti) Un corpo di massa $m = 0.5$ kg viene lanciato verso l'alto partendo da una quota $h_0 = 2$ m con una velocità iniziale $v_0 = 10$ m/s. Con quale velocità v_f passerà dalla quota $h = -1$ m? Trascurare l'attrito dell'aria e considerare il corpo come un punto materiale.

Soluzione: Dato che il sistema è conservativo, sfruttiamo la conservazione dell'energia. Uguagliando quella iniziale $(1/2)mv_0^2 + mgh_0$ a quella alla quota h, $(1/2)mv_f^2 + mgh$ abbiamo $(1/2)mv_f^2 = (1/2)mv_0^2 + mgh_0 - mgh$ e quindi

$$|v_f| = \sqrt{v_0^2 + 2g(h_0 - h)} \simeq 12.60 \text{ m/s}.$$

Problema 2 (6 punti) Una fionda, costituita da un filo di massa trascurabile e lunghezza $R = 1.2$ m e da un corpo di massa $m = 0.5$ kg, viene fatta ruotare in un piano orizzontale ad una altezza $h = 2$ m in senso antiorario. Si consideri il filo sempre teso e orizzontale. Prendendo come asse x l'asse indicato dalla fionda al tempo $t = 0$, la legge oraria dell'angolo α tra fionda e asse x è $\alpha(t) = bt + c$, con $b = 2$ rad/s e $c = 3$ rad.

(a) Calcolare la tensione τ della corda al tempo $t^* = 1.2$ s.

(b) Calcolare a che distanza d dal lanciatore cade il corpo se viene sganciato al tempo t^*.

Soluzione: Si può svolgere il sistema in molte maniere. La più pedissequa è quella di calcolare le due componenti della posizione.
Le coordinate della massa nel tempo sono

$$\begin{cases} x(t) & = R\cos(\alpha(t)) = R\cos(bt + c) \\ y(t) & = R\sin(\alpha(t)) = R\sin(bt + c) \end{cases}$$

La sua velocità è

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = -Rb\sin(bt + c) \\ \dot{y}(t) & = Rb\cos(bt + c) \end{cases}$$

e la sua accelerazione

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) & = -Rb^2\cos(bt + c) \\ \ddot{y}(t) & = -Rb^2\sin(bt + c). \end{cases}$$

Quindi l'accelerazione è

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = Rb^2 \simeq 4.80 \text{ m/s}^2.$$

e la tensione non è altro che

$$\tau = ma \simeq 2.40 \text{ N}.$$

Il tempo di caduta da una altezza h con velocità verticale iniziale nulla è (moto uniformemente accelerato) $\Delta t = \sqrt{2h/g}$. Dato che il corpo orizzontalmente dopo lo sgancio viaggia di moto rettilineo uniforme con velocità $\dot{x}(t^*), \dot{y}(t^*)$, partendo dalla posizione $x(t^*), y(t^*)$, abbiamo

$$\begin{cases} x(t^* + \Delta t) & = x(t^*) + \dot{x}(t^*)\Delta t \\ & = R\cos(bt^* + c) - Rb\sin(bt^* + c)\Delta t \\ y(t^* + \Delta t) & = y(t^*) + \dot{y}(t^*)\Delta t \\ & = R\sin(bt^* + c) + Rb\cos(bt^* + c)\Delta t \end{cases}$$

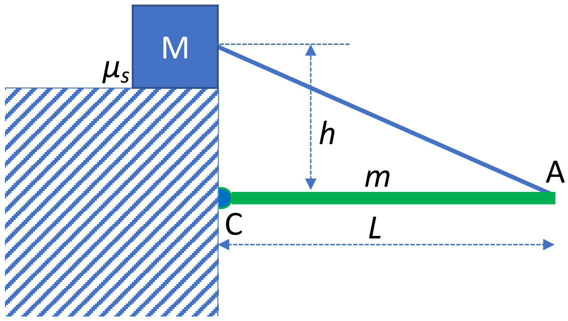
e

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{x^2(t^* + \Delta t) + y^2(t^* + \Delta t)} \\ &= R\sqrt{1 + b^2(\Delta t)^2} \simeq 1.95 \text{ m} \end{aligned}$$

La maniera più semplice è riconoscere che si tratta di un moto circolare uniforme, e che b è la velocità angolare, da cui immediatamente si ha per l'accelerazione centripeta $a = b^2R$ e $\tau = ma$.
La velocità è costante in modulo e vale $v = Rb$ per cui la distanza percorsa è $Rb\Delta t$. Dato che parte perpendicolarmente alla fine della fionda, bisogna usare il teorema di Pitagora con la distanza R per cui

$$d = \sqrt{R^2b^2(\Delta t)^2 + R^2} = R\sqrt{1 + b^2(\Delta t)^2}.$$

Problema 3 (10 punti) Nel sistema in figura abbiamo un'asta AC di lunghezza $L = 20$ cm e massa $m = 0.5$ kg incernierata senza attrito in C che è trattenuta in posizione orizzontale da una corda di massa trascurabile. La corda è attaccata a un blocco di massa $M = 5$ kg che sta più in alto di una distanza $h = 3$ cm (potete considerare il blocco come una massa puntiforme). Il tutto sta in equilibrio perché tra blocco e piano orizzontale c'è un coefficiente di attrito statico μ_s.

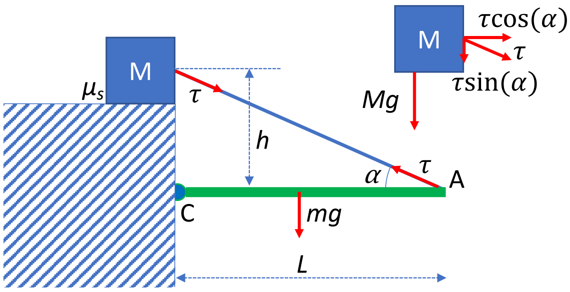


(a) Calcolare il minimo coefficiente di attrito statico μ_s in maniera che il sistema stia in equilibrio.

(b) Ad un certo istante la corda viene tagliata. Calcolare l'accelerazione iniziale del punto A dell'asta.

(c) Calcolare la velocità angolare ω dell'asta quando sbatte contro il muro (ovvero quando A sta sotto la verticale di C).

Soluzione: Chiamiamo α l'angolo tra asta e corda, con $\sin(\alpha) = h/\sqrt{L^2+h^2}$ e $\cos(\alpha) = L/\sqrt{L^2+h^2}$. Chiamiamo τ la tensione della corda.



Dalla seconda cardinale applicata all'asta con polo in C abbiamo

$$\tau L\sin(\alpha) - mg\frac{L}{2} = 0$$

da cui

$$\tau\sin(\alpha) = \frac{mg}{2}$$

e

$$\tau = \frac{mg\sqrt{h^2+L^2}}{2h}$$

Sul blocco agiscono verticalmente: la forza peso $-Mg$, la reazione normale R del piano e la componente $-\tau\cos(\alpha)$ della tensione. Orizzontalmente abbiamo la forza di attrito $F_a \le \mu_s R$ e la componente $\tau\sin(\alpha)$ della tensione. Quindi

$$\begin{cases} \tau\cos(\alpha) - F_a = 0 \\ R - Mg - \tau\sin(\alpha) = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{aligned} F_a = \tau\cos(\alpha) &\le \mu_s R \\ &= \mu_s(Mg + \tau\sin(\alpha)) \\ &= \mu_s\frac{2M+m}{2}g \end{aligned}$$

Sostituendo τ e $\cos(\alpha)$ otteniamo

$$\mu_s \ge \frac{mL}{(2M+m)h} = 0.00.$$

Una volta tagliata la corda, sull'asta agisce solo la forza peso mg applicata nel centro di massa a distanza $L/2$ dal cardine. Applicando la seconda cardinale con polo in C, e chiamando θ l'angolo di cui ruota l'asta, abbiamo

$$-mg\frac{L}{2} = I_C\ddot{\theta}$$

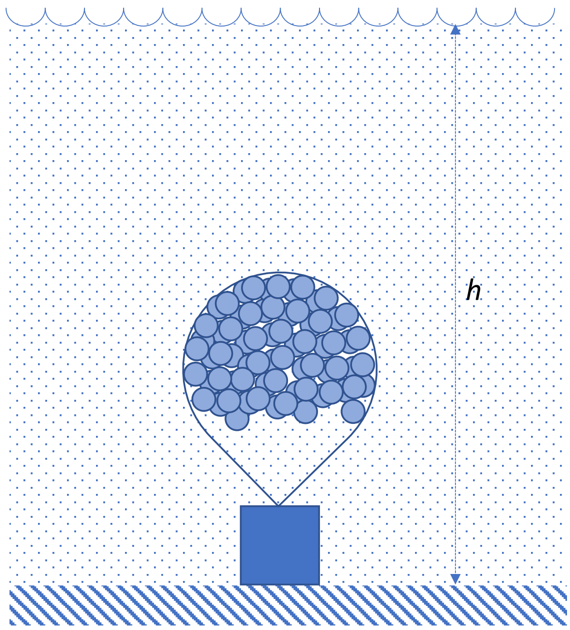
con $I_C = mL^2/3$. L'accelerazione dell'estremità dell'asta è $a = L\ddot{\theta}$ quindi

$$a = -\frac{mgL^2}{2I_C} = -\frac{3mgL^2}{2mL^2} = -\frac{3}{2}g \simeq -14.70 \text{ m/s}^2.$$

Dalla conservazione dell'energia, la perdita di energia potenziale $\Delta U = mgL/2$ del baricentro dell'asta si converte in energia cinetica $K = (1/2)I_C\omega^2$ quindi

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I_C}} = \sqrt{\frac{3g}{L}} \simeq 12.12 \text{ rad/s}.$$

Problema 4 (8 punti) Dobbiamo sollevare un blocco di cemento di massa $m = 30$ kg e densità $\rho_C = 1800$ kg/m^3 che giace sul fondo di un lago a $h = 50$ m di profondità, riempiendo una rete, attaccata al blocco, di palline di polistirolo (densità $\rho_P = 15$ kg/m^3). Le palline hanno un raggio $r = 2$ cm e non cambiano dimensione anche se compresse.



(a) Quante palline (n) ci vogliono per sollevare il blocco di cemento?

(b) A che pressione P è sottoposto il blocco?

Soluzione: Ogni corpo immerso in un fluido sente una forza verso il basso pari a $\rho V g$ e una (Archimede) verso l'alto pari a $\rho_A V g$, dove V è il volume del corpo, ρ la sua densità e ρ_A quella del fluido (acqua in questo caso).

Quindi, chiamando V_C il volume del cemento ($V_C = m/\rho_C$) e V_P quello del polistirolo, abbiamo per il sollevamento

$$(\rho_A - \rho_P)V_P g + (\rho_A - \rho_C)V_C g \ge 0$$

quindi

$$V_P = \frac{\rho_C - \rho_A}{\rho_A - \rho_P}V_C \simeq 13536.38 \text{ cm}^3$$

Il volume di ogni pallina è quindi

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3 \simeq 33.51 \text{ cm}^3$$

e

$$n = \frac{V_P}{v} = \frac{3V_P}{4\pi r^3} = 405$$

Dalla legge di Stevino $P(h) = P_a + \rho_a g h$ dove $\rho_a = 1000 \text{kg/m}^3$ è la densità dell'acqua. Per cui

$$P(50) = 590.00 \cdot 10^3 \text{ Pa.}$$

Problema 5 (8 punti) Un cilindro isolante di diametro $d = 10$ cm è chiuso da un pistone scorrevole, sempre isolante, di massa $m = 2$ kg. Il cilindro contiene $n = 2$ moli di un gas perfetto biatomico, ad una temperatura $T = 300$ K. L'esperimento avviene a pressione atmosferica. Nel cilindro c'è una resistenza, in cui viene fatta lentamente passare una corrente tale da irradiare in totale $E = 10$ J di energia.

(a) Di quanto (ΔT) aumenta la temperatura del gas?

(b) Di quanto (x) si alza il pistone?

Soluzione: La trasformazione è isobara, per cui

$$E = nc_P \Delta T$$

con $c_P = c_V + R = 7/2R$. Quindi l'innalzamento della temperatura è 29.050000000000000000

$$\Delta T = \frac{E}{nc_P} \simeq 0.17 \text{ K}$$

La pressione totale (considerando la pressione atmosferica esterna $P_a = 10^5$ Pa) è

$$P = \frac{mg}{\pi r^2} + P_a \simeq 102495.55 \text{ Pa}$$

con $r = d/2$. Il volume iniziale è

$$V = \frac{nRT}{P} \simeq 48.59 \text{ dm}^3$$

e il nuovo volume è

$$V(T + \delta T) = \frac{T + \Delta T}{T} V(T)$$

ovvero

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(T + \Delta T) - V(T) \\ &= \frac{\Delta T}{T} V(T) \\ &= \frac{ER}{c_P P} \simeq 48.62 \text{ dm}^3. \end{aligned}$$

Si poteva anche calcolare direttamente dal primo principio: $\Delta Q = E = nc_V \Delta T + P\Delta V = (1 + c_V/R)P\Delta V$ da cui $\Delta V = ER/((c_V + R)P)$.

L'innalzamento del pistone è

$$x = \frac{\Delta V}{\pi r^2} = 0.35 \text{ cm.}$$