Fisica 1 Elettronica e Telecomunicazioni. Compito dell'11/2/2019

Istruzioni. Scrivere nome, cognome e matricola nell'ultima pagina (e lasciarla possibilmente bianca). Indicare chiaramente quale domanda viene trattata. Per ogni domanda scrivere succintamente le leggi fisiche usate, i passaggi effettuati, la soluzione analitica (con i simboli) e quella numerica (con le unità di misura). Consegnare solo la bella copia, marcando chiaramente le parti che non devono essere considerate. Trattenere la brutta copia o comunque appuntarsi i risultati per confrontarli con la soluzione (Moodle).

Valutazione. Viene valutato l'aver indicato correttamente le leggi usate, la derivazione analitica, il risultato analitico e numerico corretto. Se è presente il solo risultato analitico o numerico l'esercizio non viene considerato valido. ATTENZIONE: gli errori numerici non sono considerati errori gravi a meno che non siano facilmente riconoscibili dall'analisi dimensionale o da valori particolari dei parametri (per esempio se per una scelta dei parametri un risultato viene assurdo o zero senza che sia fisicamente giustificato). Anche per questo, aspettate a sostituire i valori numerici alla fine.

Alcune grandezze utili. Accelerazione di gravità: $g = 9.8$ m/s^2. Momento di inerzia baricentrale di un cilindro di raggio R e massa M: $I_G = (1/2)MR^2$. Momento di inerzia baricentrale di un'asta omogenea di lunghezza L e massa M: $I_G = (1/12)ML^2$. Costante dei gas $R = 8.3$ J/mol K. Conversione calorie-joule: 1 kcal = 4184 J. Pressione atmosferica $P_a = 10^5$ Pa. Calore specifico molare di un gas monoatomico $c_V = (3/2)R$, di un gas biatomico $c_V = (5/2)R$. Densità dell'acqua $\rho_a \simeq 1000$ kg/m^3.

Suggerimenti. LEGGERE ACCURATAMENTE E RILEGGERE IL TESTO DEL PROBLEMA. Attenzione alla conversione tra unità (equivalenze). I problemi possono contenere dati che non servono per trovare la soluzione. Di solito esistono più modi per arrivare alla soluzione. FARE IL DISEGNO del problema, in maniera più accurata possibile e magari da più punti di vista, e disegnare i diagrammi temporali delle componenti della traiettoria ($x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$...).

Problema 1 (4 punti) Un corpo di massa $m = 0.5$ kg viene lanciato verso l'alto partendo da un'altezza $h_0 = 0$ ed arriva ad una altezza massima $h = 3$ m. Dopo quanto tempo T dalla partenza tornerà alla quota h_0? Trascurare l'attrito dell'aria e considerare il corpo come un punto materiale.

Soluzione: La legge del moto del corpo è $z = v_0 t - (1/2)gt^2$, e ci mette lo stesso tempo $T/2$ ad andare su ed a tornare giù.. Nel punto più alto abbiamo

$$v = v_0 - g\frac{T}{2} = 0$$

da cui

$$T = \frac{2v_0}{g}.$$

Per trovare v_0 conviene usare la conservazione dell'energia,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh$$

ovvero

$$v_0 = \sqrt{2gh} \simeq 7.67 \text{ m/s}.$$

e da qui

$$T = \frac{2v_0}{g} = \sqrt{\frac{8h}{g}} \simeq 1.56 \text{ s}.$$

Problema 2 (8 punti) Un punto materiale di massa $m = 1$ kg è vincolato a muoversi senza attrito lungo una parabola di equazione $z = kx^2$, con $k = 2$ m^{-1}. L'asse x è orizzontale e l'asse z è verticale. Il punto viene lasciato andare da fermo dalla quota $z_0 = h = 1$ m.

(a) Con che velocità v_1 passerà per il punto più basso?

(b) Qual è la sua velocità orizzontale V_x quando arriva alla quota $z_2 = h/2$?

Suggerimento: sfruttare il fatto che modulo della velocità v è dato da $v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$.

Soluzione: Usiamo la conservazione dell'energia,

$$mg(h - z) = \frac{1}{2}mv^2,$$

per cui abbiamo subito che nel punto più basso

$$v_1 = \sqrt{2gh} \simeq 4.43 \text{ m/s}.$$

In un punto (x, z) generico ovviamente

$$v = \sqrt{2g(h - z)} = \sqrt{gh} \simeq 3.13 \text{ m/s}$$

per $z = h/2$. Ma dato che

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt} = 2kx\frac{dx}{dt} = 2kxv_x$$

abbiamo che

$$v = \left(\sqrt{1 + 4k^2x^2}\right)v_x = \left(\sqrt{1 + 4kz}\right)v_x$$

ovvero

$$v_x = \frac{v}{\sqrt{1 + 4kz}} = \sqrt{\frac{2g(h - z)}{1 + 4kz}}$$

e quindi per $z = h/2$,

$$V_x = \sqrt{\frac{gh}{1 + 2kh}} \simeq 1.40 \text{ m/s}.$$

Alternativamente si può calcolare l'angolo θ tra tangente alla curva e asse orizzontale:

$$\tan(\theta) = \left(\frac{dz}{dx}\right)_{z=h/2} = (2kx)_{z=h/2}$$

dato che $z = kx^2$. Sostituendo $x = \sqrt{z/k}$ si ha

$$\tan(\theta) = (2\sqrt{kz})_{z=h/2} = 2\sqrt{\frac{kh}{2}}$$

e ovviamente $V_x = v\cos(\theta)$. Per calcolare $\cos(\theta)$ si può scrivere

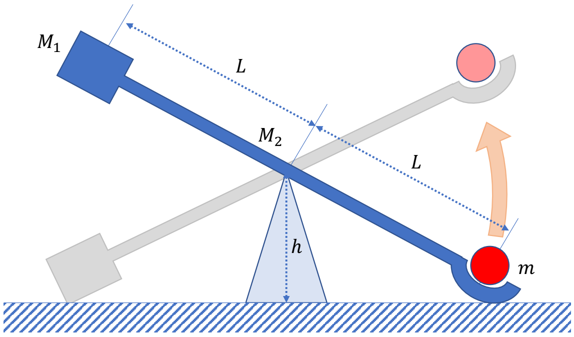
$$\frac{1}{\cos(\theta)} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2(\theta)}} = \sqrt{\frac{\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}} = \sqrt{1 + \tan^2(\theta)}$$

da cui

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4k^2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4kz}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2kh}}$$

e quindi il risultato di cui sopra.

Problema 3 (8 punti) Approssimiamo una catapulta come composta da un'asta di spessore trascurabile e lunghezza $2L$, con $L = 4.5$ m, e massa $M_2 = 80$ kg e da un contrappeso puntiforme di massa $M_1 = 400$ kg. L'asta è imperniata nel mezzo su un supporto ideale (senza attrito) ad una altezza $h = 4$ m dal suolo.



La catapulta può ruotare dalla posizione in cui il contrappeso tocca il suolo, a quella simmetrica. La catapulta viene caricata con un proiettile puntiforme di massa $m = 4$ kg posizionato all'altro estremo dell'asta rispetto al contrappeso, e viene portata nella posizione in cui il proiettile tocca il suolo. Quindi la catapulta viene lasciata libera di ruotare, fino alla posizione simmetrica, dopodiché il proiettile lascia il supporto.

(a) Qual è il modulo della velocità iniziale v del proiettile dopo lo sgancio?

(b) Quale distanza orizzontale D percorre il proiettile dal punto di sgancio?

Soluzione: Conviene svolgere la prima parte (rotazione della catapulta) con la conservazione dell'energia.

Le due posizioni iniziale e finale corrispondono ad un angolo di inclinazione α tale che $\sin(\alpha) = h/L$ ($\cos(\alpha) = \sqrt{L^2 - h^2}/L$). L'altezza dal suolo del contrappeso o del proiettile nelle due configurazioni è $2h$. Quindi la variazione dell'energia potenziale è $\Delta U = 2(M_1 - m)gh$.

Allo sgancio il sistema sta ruotando con una certa velocità angolare ω, e l'energia cinetica del sistema è

$$K = \frac{1}{2}(\frac{M_2}{3} + M_1 + m)L^2\omega^2,$$

dove $M_2L^2/3$ è il momento d'inerzia dell'asta lunga $2L$ rispetto al suo centro. Quindi imponendo $K = \Delta U$ abbiamo

$$\omega = \frac{2}{L}\sqrt{\frac{3(M_1 - m)gh}{M_2 + 3M_1 + 3m)}} \simeq 2.67 \text{ rad/s}$$

e la velocità iniziale v del proiettile è

$$v = \omega L \simeq 12.01 \text{ m/s}.$$

La velocità iniziale del proiettile è perpendicolare all'asta, quindi con un angolo α rispetto alla verticale, e parte da una quota $2h$. Quindi la velocità verticale del proiettile è

$$v_y = v\cos(\alpha) = v\frac{\sqrt{L^2 - h^2}}{L} \simeq 5.50 \text{ m/s}.$$

e la sua legge di moto verticale è

$$y(t) = 2h + v_y t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Il tempo T di arrivo a terra è quindi quello per cui $y(T) = 0$, ovvero

$$T = \frac{v_y + \sqrt{v_y^2 + 4gh}}{g} \simeq 1.96 \text{ s}.$$

La velocità orizzontale del proiettile è

$$v_x = v\sin(\alpha) = v\frac{h}{L} \simeq 10.67 \text{ m/s}.$$

Durante questo tempo il proiettile percorre la distanza $D = v_x T \simeq 20.89$ m.

Problema 4 (8 punti) Un pallone di gomma semisgonfio di massa $m = 12$ kg e densità relativa $\rho_r = 1.7$, contiene ancora $n = 0.203$ moli di aria. Il pallone viene buttato in acqua.

(a) Per quale temperatura T dell'acqua il pallone galleggia a malapena? Trascurare il peso dell'aria e la variazione della densità dell'acqua con la temperatura.

(b) Se la temperatura aumenta del 10%, da quale profondità massima h il pallone può ancora riemergere?

Soluzione: Approssimando l'aria con un gas perfetto, abbiamo che il volume dell'aria è $V = nRT/P$, a cui va sommato il volume della gomma $v_0 = m/(\rho_r\rho_a)$. Perché il pallone galleggi a malapena la spinta di Archimede dev'essere uguale al peso del pallone, quindi

$$mg = \rho_a g(V + v_0) = \rho_a g\frac{nRT}{P_a} + \frac{mg}{\rho_r}$$

ovvero, definendo $m' = m(1 - 1/\rho_r) \simeq 4.94$ kg si ha

$$T = \frac{m'P_a}{\rho_a nR} \simeq 293.26 \text{ K} = 20.11°\text{C}.$$

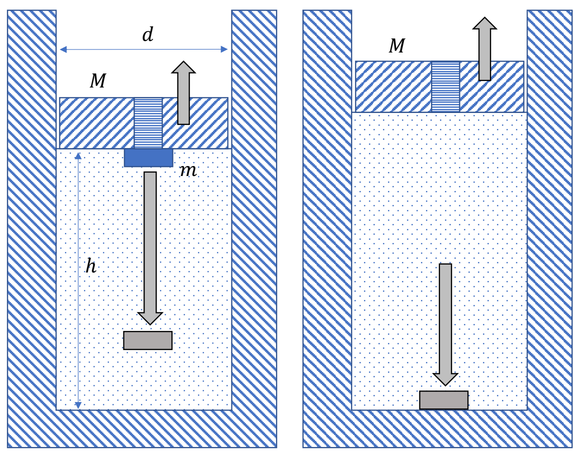
Supponiamo ora che il pallone sia alla profondità h alla temperatura $T' = 1.1T \simeq 322.59$ K. La pressione adesso è $P = P_a + \rho_a gh$ e quindi abbiamo

$$m' = \rho_a\frac{nRT}{P_a + \rho_a gh}$$

da cui

$$h = \frac{1}{g}\left(\frac{nRT'}{m'} - \frac{P_a}{\rho_a}\right) \simeq 1.02 \text{ m}.$$

Problema 5 (8 punti) Un cilindro isolante di diametro $d = 20$ cm è chiuso da un pistone scorrevole, sempre isolante, di massa $M = 4$ kg, a cui è appesa tramite una elettrocalamita una massa $m = 0.2$ kg. Il pistone è sostenuto dalla pressione di $n = 2$ moli di un gas perfetto biatomico, ad una temperatura $T_0 = 300$ K. L'esperimento avviene nel vuoto. La massa viene sganciata (usando l'elettrocalamita) e cade sul fondo, con un urto completamente inelastico. Si trascuri la capacità termica della massa m.



(a) A che altezza h rispetto al fondo sta inizialmente la massa m (ovvero il pistone)?

(b) Dopo lo sganciamento (ma prima di considerare l'effetto dell'urto), quanto vale la temperatura T_1 del gas? Si consideri la trasformazione come se fosse reversibile.

(c) Quanto vale alla fine la temperatura T_2 del gas?

Soluzione: La pressione esercitata da pistone + massa è

$$P_0 = \frac{(M+m)g}{S} \simeq 1310.16 \text{ Pa.}$$

dove $S \simeq 314.16 \text{ cm}^2$ è la superficie del pistone. Dall'equazione dei gas perfetti abbiamo

$$V = Sh = \frac{nRT}{P_0} = \frac{nRTS}{(M+m)g} \simeq 3.80 \text{ m}^3,$$

da cui

$$h = \frac{nRT}{(M+m)g} \simeq 120.99 \text{ m.}$$

(non avevo considerato che siamo nel vuoto.... è un cilindro un po' improbabile)

Senza considerare l'energia dovuta all'urto (che inizialmente riscalda solo la massa m), abbiamo una trasformazione adiabatica dalla pressione iniziale P_0 alla pressione finale $P_1 = Mg/S \simeq 1247.77$ Pa. Conviene scrivere la trasformazione usando le variabili P, T:

$$TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{cost.}$$

con $\gamma = 7/5$, da cui

$$T_1 = T_0 \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_0 \left(\frac{M+m}{M}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \simeq 294.20 \text{ K.}$$

La seconda trasformazione è isobara con un calore comunicato al gas pari alla perdita di energia potenziale della massa m, ovvero

$$E = mgh = nc_P \Delta T \simeq 237.14 \text{ J,}$$

con $c_P = 7/2R$. Quindi l'innalzamento della temperatura è

$$\Delta T = \frac{E}{nc_P} \simeq 4.08 \text{ K}$$

ovvero $T_2 = T_1 + \Delta T \simeq 298.28$ K.