Il cambiamento del concetto di cambiamento: La derivata da Fermat a Weierstrass.

Prima la derivata venne usata, poi scoperta, esplorare e sviluppata, e solo alla fine, definita.

Judith V. Grabiner
Dipartimento di storia
Università della California, Los Angeles
Los Angeles, CA 90024

Alcuni anni fa mentre insegnavo storia della matematica, chiesi ai miei studenti di leggere una discussione sui massimi e minimi del matematico del XVII° secolo Pierre Fermat. Per iniziare la discussione chiesi loro "definite un massimo relativo". Loro mi dissero che è un posto dove la derivata è zero. "Se è così" chiesi "qual'è la definizione di un minimo relativo?". Loro mi dissero che è un posto dove la derivata è zero. "Bene, allora in questo caso" chiesi "qual'è la differenza tra un massimo e un minimo?". Loro risposero che nel caso di un massimo, la derivata seconda è zero.

Cosa possiamo imparare da questa apparente vittoria del "calculus" sul buon senso?

Ero solita pensare che questa storia mostrasse che questi studenti non capissero il calculus, ma sono giunta a pensare l'opposto: loro lo capiscono molto bene. Le risposte degli studenti sono un tributo al potere del calculus in generale, e il potere del concetto di derivata in particolare. Una volta che si è stati iniziati al calcolo, è difficile ricordare come fosse non sapere cos'è una derivata e come usarla, e realizzare che persone come Fermat una tempo dovevano far fronte alla ricerca di massimi e minimi senza avere a disposizione le derivate.

Storicamente parlando, ci sono stati 4 passi nello sviluppo del concetto odierno di derivata, che elencherò di seguito in ordine cronologico. La derivata fu inizialmente usata; poi venne scoperta; in seguito fu esplorata e sviluppata; e solo in fine venne definita. Questo è quello che è successo, gli esempi di quello che noi conosciamo oggi come derivata vennero per prima cosa usati su basi ad hoc per risolvere particolari problemi; poi venne identificato il concetto generale che giaceva sotto questi usi (come parte dell'invenzione del calculus); poi molte proprietà della derivata furono spiegate e sviluppate in applicazioni sia matematiche che fisiche; e finalmente una definizione rigorosa venne data e il concetto di derivata venne incorporato in una teoria rigorosa. Descriverò qua gli step, e darò un esempio matematico specifico per ognuno di essi. Rifletteremo poi su cosa significano – per l'insegnante, per lo storico, e per il matematico.

Lo sfondo del XVII° secolo

La nostra storia inizia poco dopo che i matematici Europei vennero nuovamente in contatto con i matematici Greci, imparassero l'algebra Islamica, sintetizzando le due tradizioni, e strutturassero la loro. Viete inventò l'algebra simbolica nel 1591; Cartesio e Fermat inventarono indipendentemente la geometria analitica intorno al 1630. Geometria analitica significa, inizialmente, che le curve possono essere rappresentate da equazioni; al contrario, significa anche che ogni equazione determina una curva. I greci e i musulmani hanno studiato le curve, ma non poi così tante – principalmente la circonferenza e le sezioni coniche più alcune altre curve definite come "loci" (luoghi). Molti problemi sono stati risolti per queste curve, inclusi quelli di trovare le loro tangenti e aree. Ma poiché adesso qualsiasi equazione poteva definire una nuova curva, gli studenti della geometria delle curve nei primo XVII° secolo furono improvvisamente messi di fronte a un'esplosione di curve da considerare. Con queste nuove curve, i metodi antichi dei Greci per la geometria sintetica non erano più sufficienti. I Greci, ovviamente, conoscevano come trovare le tangenti alle circonferenze, alle sezioni coniche, e alcune altre curve sofisticate come ad esempio la spirale di Archimede, usando i metodi della geometria sintetica. Ma come si poteva descrivere le proprietà della tangente ad una linea arbitraria definita da un polinomio di 96° grado? I Greci avevano definito una tangente come una linea che tocca una curva senza tagliarla, e usualmente si aspettavano che essa avesse un solo punto in comune con la curva. Come si poteva allora definire la tangente nel punto (0,0) per la curva $y=x^3$ (FIG. 1), o per un punto su una curva con molti "punti di svolta" (turning points) (FIG. 2)?

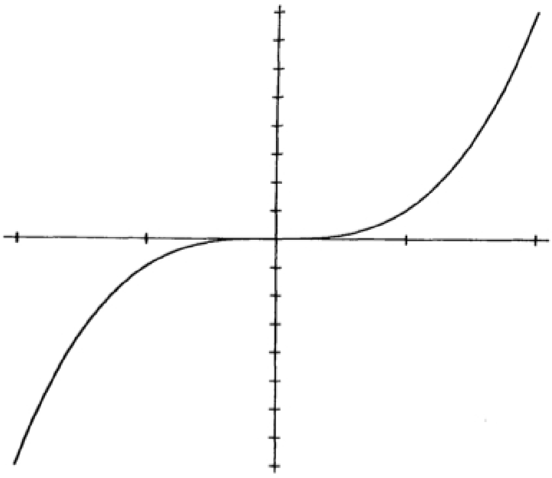


FIGURE 1

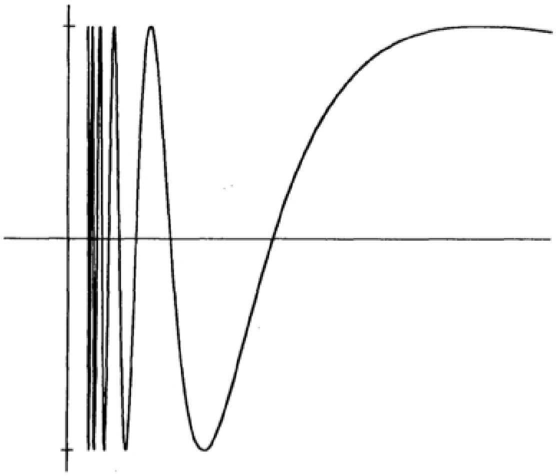


FIGURE 2

Le stesse nuove curve presentavano nuovi problemi per gli studenti dell'area e della lunghezza degli archi. I Greci avevano anche studiato alcuni casi di quelli che loro chiamavano "problemi isoperimetrici". Per esempio, loro si chiedevano: di tutte le figure piane con lo stesso perimetro, quale ha l'area maggiore? La circonferenza ovviamente, ma i Greci non avevano nessun metodo generale per risolvere questo tipo di problemi. I matematici del XVII° secolo speravano che la nuova algebra simbolica potesse in qualche modo risolvere tutti i problemi di massimo e minimo.

Così, anche se la maggior parte dell'agenda dei matematici del XVII° secolo – tangenti, aree, estremi – veniva riempita dai Greci, il soggetto d'interesse era stato vastamente esteso, e le soluzioni sarebbero giunte dall'utilizzo di nuovi strumenti: l'algebra simbolica e la geometria analitica.

Trovare massimi, minimi, e tangenti

Concentriamoci quindi sul primo dei quattro step nella storia della derivata: il suo uso, e anche l'illustrazione delle dichiarazioni generali che abbiamo fatto. Dobbiamo osservare i metodi di Fermat per trovare i massimi e i minimi, che sono datati intorno al 1630 [8]. Fermat illustrò il suo metodo prima nella risoluzione di un semplice problema, la cui soluzione era ben nota: *data una linea, dividerla in due parti tali che il prodotto delle due parti sia massimo*. Sia la lunghezza della linea B e la sua prima parte A (FIG. 3). Allora la seconda parte sarà B-A e il prodotto delle due parti risulta:

$$A(B-A)=AB-A^2 \quad . \qquad (1)$$

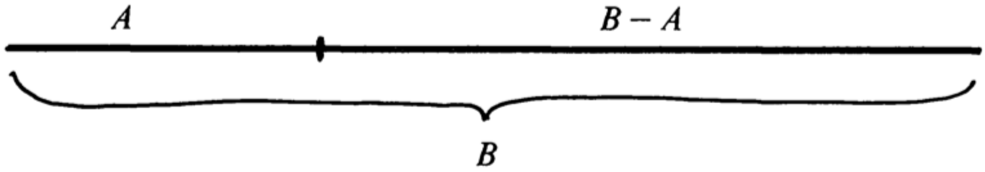


FIGURE 3

Fermat lesse negli scritti del matematico Greco Pappo di Alessandria che un problema che avesse, in generale, due soluzioni doveva avere solamente una soluzione nel caso del massimo. Questa osservazione lo portò al suo metodo per individuare massimi e minimi. Supponiamo che nel problema appena presentato ci fosse una seconda soluzione. Per questa soluzione, si consideri la prima parte della line come di lunghezza A+E; così la seconda parte risulterebbe di lunghezza B-(A+E)= B-A-E . Moltiplicando tra loro le due parti, otteniamo il prodotto

$$BA+BE-A^2-AE-EA-E^2=AB-A^2-2\,AE+BE-E^2 \quad . \qquad (2)$$

Seguendo il principio di Pappo per il massimo, invece di due soluzioni, ce ne deve essere solamente una. Quindi imponiamo i due prodotti (1) e (2) "come se fossero" uguali; quindi, possiamo formulare quella che Fermat definì la *pseudo-uguaglianza*:

$$AB-A^2=AB-A^2-2\,AE+BE-E^2 \quad .$$

Semplificando, otteniamo

$$2\,AE+E^2=BE$$

e

$$2\mathrm{A}+E=B \quad .$$

Adesso Fermat dice, senza alcuna giustificazione o cerimonia, "sopprimiamo E". Così ottenne

$$A=B/2 \quad ,$$

che infatti fornisce il massimo cercato. Egli conclude, "possiamo difficilmente aspettarci un metodo più generale (di questo)". E, ovviamente, aveva ragione.

Si noti che Fermat non chiamò E *infinitamente piccolo,* o *svanito*, o *limite;* egli non spiegò perché fosse possibile prima dividere per E (trattandolo come una quantità diversa da zero) e poi sbarazzarsene (trattandolo quindi come se valesse zero). Inoltre, egli non spiegò che cosa stesse facendo come un caso particolare di un concetto più generale, fosse esso la derivata, il "tasso di cambio" (rate change) oppure la pendenza di una tangente. Non capì neanche la relazione tra il suo metodo di massimo-minimo e la via per cui si trovano le tangenti; infatti egli proseguì il suo trattato sui massimi e minimi dicendo che lo stesso metodo – ovvero, aggiungere E, fare l'algebra, e poi sopprimere E – potesse essere usato per trovare le tangenti [8, pag. 223].

Anche se le considerazioni che portarono Fermat al suo metodo possono sembrare sorprendenti ai nostri occhi, egli escogitò un metodo per trovare gli estremi che funzionava, e forniva risultati che erano tutt'altro che banali. Ad esempio, Fermat applicò il suo metodo all'ottica. Assumendo che un raggio di luce che va da un mezzo ad un altro compia sempre il percorso più breve (quello che noi adesso chiamiamo il principio di Fermat del minor tempo), utilizzò il suo metodo per calcolare il percorso che richiedeva il minor tempo. Così mostrò che il principio del minor tempo produceva la legge di Snell della rifrazione [7] [12, pag. 387-390].

Anche se Fermat non pubblicò il suo metodo di massimi e minimi, esso divenne ben conosciuto attraverso la corrispondenza e venne ampiamente utilizzato. Dopo che i matematici furono diventati familiari con una varietà di esempi, uno schema emerse dalle soluzioni del metodo di Fermat. Nel 1659, Johann Hudde dette una formulazione verbale generale per questo schema [3, pag. 168], che in notazione moderna affermava che, *dato un polinomio della forma*

$$y=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

esso ha un massimo o un minimo quando

$$\sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}=0 \quad .$$

Di interesse maggiore rispetto al problema degli "extrema" nel XVII° secolo, fu quello relativo all'individuazione delle tangenti. Qua la tangente veniva spesso pensata come una secante per la quale i due punti di intersezione si avvicinavano fino a coincidere. Non venne mai precisamente spiegato cosa fosse necessario a una secante per "diventare" una tangente. Tuttavia, i metodi basati su questo approccio funzionavano. Data l'equazione di una curva

$$y=f(x)$$

Fermat, Cartesio, John Wallis, Isaac Barrow, e molti altri matematici del XVII° secolo erano in grado di trovarne la tangente. Il metodo comprendeva considerare, e calcolare, l'inclinazione della secante

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad ,$$

facendo l'algebra richiesta dalla formula f(x+h) al numeratore, poi dividendo per h. Il diagramma in FIG. 4 suggerisce che quando la quantità h svanisce, la secante diventa la tangente, quindi trascurando h nell'espressione per l'inclinazione della secante otteniamo l'inclinazione della tangente. Ancora, uno schema generale per le equazioni delle inclinazioni delle secanti divenne presto evidente, e una regola analoga alla regola di Hubble per i massimi e i minimi venne dichiarata da numerose persone, incluse René Sluse, Hudde, e Christiaan Huygens [3, pag185-186].

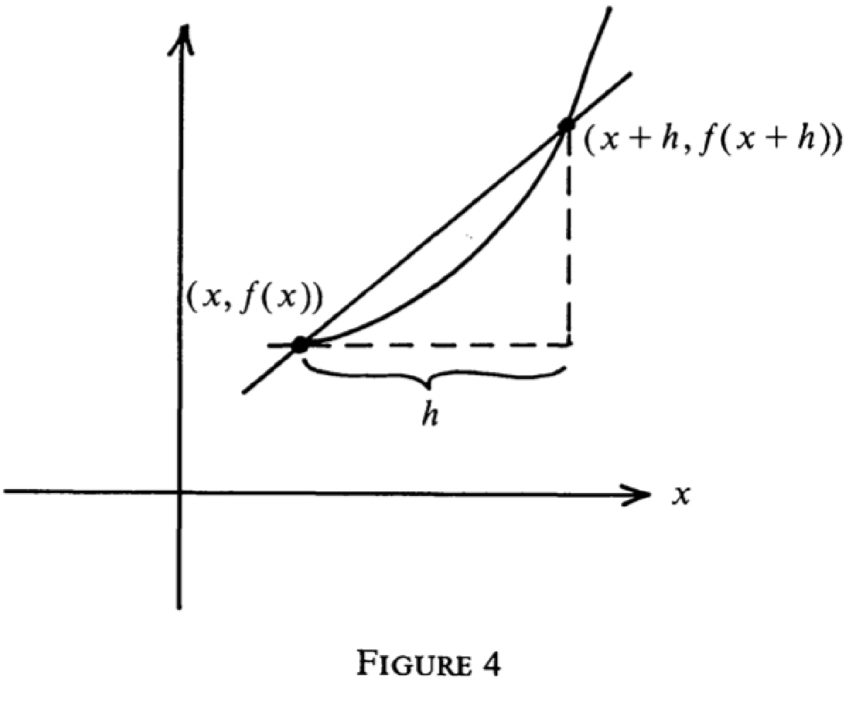


FIGURE 4

Per l'anno 1660, erano state chiaramente capite entrambe le relazioni (geometrica e computazionale) che intercorrevano tra il problema degli estremi e quello delle tangenti; ovvero, un massimo veniva trovato calcolando l'inclinazione di una tangente, in accordo con la regola, e chiedendosi quando questa fosse uguale a zero. Mentre nel 1660 non c'era ancora un concetto generale di derivata, c'era però un metodo generale per risolvere un tipo di problema geometrico. Però, la relazione la relazione tra la tangente e altri concetti matematici – l'area, ad esempio – non era stato capito, e non esisteva ancora una definizione completamente soddisfacente di tangente. Tuttavia, c'era un'abbondanza di metodi per risolvere problemi che adesso noi risolveremo col "calculus", e ripensandoci, sembrerebbe possibile generalizzare questi metodi. Così in questo contesto risulta naturale chiedersi, com'è successo che la derivata come la conosciamo oggi si è venuta a formare?

Qualche volta viene detto che l'idea della derivata ebbe come motivazione principalmente dai fisici. Newton, dopotutto, inventò sia il calculus e moltissima della fisica "of motion". Infatti, già nel Medio Evo, i fisici, seguendo Aristotele, il quale aveva reso "il cambiamento" il concetto centrale nella sua fisica, logicamente analizzò e classificò i diversi modi in cui una variabile poteva cambiare. In particolare qualcosa può cambiare uniformemente o non uniformemente; se cambia non uniformemente, può cambiare "uniformemente-non uniformemente" o "non uniformemente - non uniformemente", etc... [3, pag73-74]. Queste classificazioni medievali di variazione aiutarono galileo ad arrivare nel 1638, senza l'aiuto del calculus, alla suo trattamento di successo sul moto uniformemente accelerato. Il moto, quindi, poteva essere studiato scientificamente. Erano questi studi l'origine e lo scopo del calculus? La risposta è no. Però plausibilmente, questo suggerimento può sembrare, comunque la fisica importante era nello sviluppo successivo del calcolo, questioni fisiche non erano infatti né la motivazione immediata né la prima applicazione del calculus. Certamente essi prepararono il pensiero delle persone per alcune proprietà della derivata, e per l'introduzione nella matematica del concetto di cambiamento. Ma la motivazione immediata per il concetto generale di derivata – al contrario di esempi specifici come la velocità o la pendenza della tangente – non venne dalla fisica. Il primo problema che venne risolto, proprio come la prima applicazione, avvenne in matematica, precisamente in geometria (si veda [1, capitolo 7]; e anche [3, capitoli 4-5] e per Newton [17]). Il concetto di derivata poi si sviluppò gradualmente, insieme all'idea degli estremi, tangenti, area, limiti, continuità, e funzione, e interagì con queste idee in modi inaspettati.

Tangenti, aree, e "rates of change"

Nell'ultimo terzo del XVII° secolo, Newton e Leibniz, indipendentemente l'uno dall'altro, inventarono il calculus. Con "inventarono il calculus" Intendiamo che essi fecero essenzialmente 3 cose. La prima fu che guardarono la ricchezza dei metodi che già esistevano per trovare tangenti, estremi e aree, e assorbirono tutti questi metodi sotto la voce di due concetti generali, i concetti che adesso chiamiamo **derivata** e **integrale**. Per seconda cosa Newton e Leibniz escogitarono ognuno una notazione che rendesse facile, quasi automatico l'uso di questi concetti generali. (usiamo ancora la notazione di Newton e di Leibniz). Per Terza cosa essi dettero un'argomentazione per dimostrare quello che oggi noi conosciamo come il Teorema Fondamentale del Calcolo: la derivata e l'integrale sono mutualmente inversi. Newton chiamava la nostra "derivata" "*fluxion*"- un rapporto del flusso di cambiamento; Leibniz vide la derivata come il rapporto di differenze infinitesime e lo chiamò *quoziente differenziale*. Ma qualsiasi termine fosse usato, il concetto di derivata era stato inserito in un tema generale – il calculus – e la sua relazione con gli altri concetti di base, che Leibniz chiamò l'integrale, venne così capita. Così abbiamo raggiunto lo stadio I, chiamato *scoperta*.

Diamo adesso un'occhiata a una versione Newtoniana precedente del Teorema Fondamentale [13, sezione 54-5, pag. 23]. Questo ci illustrerà come Newton presentò il calcolo nel 1669, e illustrerà anche sia la forza che la debolezza della comprensione della derivata in questo periodo.

Consideriamo con Newton una curva sotto la quale l'area fino al punto D=(x,y) è data da z (FIG. 5). Il suo argomento è generale: "Assumi qualsiasi relazione tra x e z a tuo piacimento;" poi procede a trovare y. L'esempio che usò è

$$z=\frac{n}{m+n}ax^{(m+n)/n}$$

però, sarà sufficiente usare $z=x^3$ per illustrare il suo argomento.

Nel diagramma della FIG. 5, la linea ausiliaria bd è scelta in modo che Bb = o, dove o non è zero. Newton poi specifica che BK=v deve essere scelto in modo che l'area BbHK = area BbdD. Così ov = area BbdD. Adesso, all'aumentare di x fino a x+o, il cambio dell'area z è dato da

$$z(x+o)-z(x)=x^3+3\mathrm{x}^2 o+3\mathrm{xo}^2+x^3=3\mathrm{x}^2 o+3\mathrm{xo}^2+o^3 \quad ,$$

il quale, per definizione di v, è uguale a ov. Adesso, poiché $3\mathrm{x}^2 o+3\mathrm{xo}^2+o^3=ov$, dividendo per

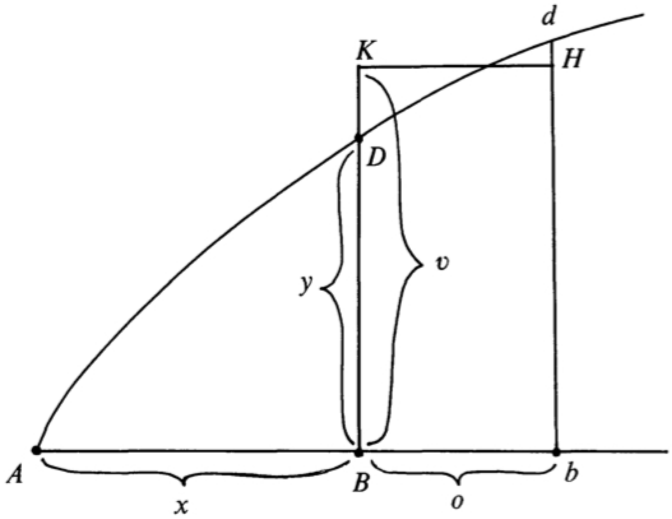


FIGURE 5

o si produce $e\,3\mathrm{x}^2+3\,ox+o^2=v$. Adesso, dice Newton, “se supponiamo che Bb diminuisca all'infinito e svanisca, o che “o” non sia niente, v e y in questo caso saranno uguali e i termini che sono moltiplicati da “o” svaniranno: così rimarrà... ”

$$3\mathrm{x}^2=y \quad .$$

Che cosa ha dimostrato? Poiché $(z(x+o)-z(x))/o$ è rapporto col quale cambia l'area z, questo rapporto è dato dall'ordinata y. Inoltre, riconosciamo che $3\mathrm{x}^2$ è la pendenza della tangente della curva $z=x^3$. Newton andò avanti e disse che l'argomento può essere invertito; così vale anche il contrario . Vediamo così che le derivate sono fondamentalmente coinvolte nelle aree come anche le tangenti, quindi il concetto di derivata ci aiuta a vedere che questi due problemi sono mutualmente inversi. Leibniz fornì analoghi argomenti su questo stesso punto (vedere, per esempio [16, pag. 282-284]).

Newton e Leibniz non ebbero ovviamente l'ultima parola sul concetto di derivata. Anche se ciascun uomo avesse la proprietà più utile del concetto, c'erano ancora molte domande senza risposta. In particolare, cosa è, esattamente, un quoziente differenziale? Alcuni discepoli di Leibniz, come Johann Bernoulli e il suo pupillo il marchese de l'Hospital, dissero che un quoziente differenziale era un rapporto di infinitesimali; dopotutto, era quello il modo in cui veniva calcolato. Ma gli infinitesimali, come i matematici del XVII° secolo erano ben a conoscenza, non obbediscono agli assiomi Archimedei. Poiché gli assiomi Archimedei erano la base per la teoria Greca dei rapporti, che era, a sua volta, la base dell'aritmetica, dell'algebra e della geometria per i matematici del tempo. Gli oggetti non Archimedei erano visti con sospettosità. Di nuovo, cos'è una “fluxsion”? Anche se essa può essere intuitivamente associata ad una velocità, le dimostrazioni date da Newton nel 1671 nel suo “Method of Fluxion” comprendevano tutte una “grandezza indefinitamente piccola o”, [14, pag. 32-33] che sollevava molti degli stessi problemi che la “o” che svanisce aveva sollevato nell'esempio di Newton del 1669 che abbiamo visto sopra. In particolare, qual'è lo status della piccola “o”? È zero? Se lo è, come possiamo dividere qualcosa per o? Se non è zero, non stiamo facendo un errore quando ce ne sbarazziamo? Queste domande erano già state poste ai tempi di Newton e Leibniz. Per evitare questi problemi, Newton disse nel 1687 che le quantità definite nello stesso modo in cui $3x^2$ è stata definita nel nostro esempio erano il limite del rapporto degli incrementi “vanishing”. Questo suonava bene, ma la comprensione del termine “limite” di Newton non era la stessa che abbiamo noi. Newton nei suoi Principia (1687) descrisse i limiti com “rapporti ultimi” - ovvero, come il rapporto con quelle quantità che svaniscono proprio quando queste quantità stanno svanendo. Egli disse, “Questi rapporti ultimi coi i quali le quantità svaniscono non sono veramente i rapporti delle ultime quantità, ma i limiti ai quali questi rapporti o queste quantità decrescendo senza limite convergono sempre; e verso i quali approcciano più vicino di qualsiasi differenza data, ma non superano mai, né in effetti raggiungono,affinché le quantità vengono diminuite all'infinito” [15, Book I, Scholium to Lemma XI, pag. 39].

Si noti la frase “ma non superano mai” - quindi una variabile non può oscillare intorno al limite. Con “limite” Newton sembra avere in mente “bound”, e i matematici del tempo spesso citavano il particolare esempio della circonferenza come limite dei poligoni inscritti. Inoltre, Newton disse “neppure … lo raggiungono, finché le quantità vengono diminuite all'infinito”. Questo sollevò una questione centrale: è stato spesso chiesto se una quantità variabile avesse mai raggiunto il limite. Se non lo faceva, non c'era un errore? Newton non aiutò a chiarire questo punto quando enunciò il suo teorema “Le quantità e i rapporti delle quantità che in ogni tempo finito convergono continuamente all'uguaglianza, e prima della fine di questo tempo si avvicinano più di quanto qualsisia differenza, diventano in definitiva uguali” [15, Book I, Lemma I, pag. 29]. Cose significa “diventano in definitiva uguali”? Non era per nulla chiaro nel XVIII° secolo, figuriamoci nel XVII°.

Nel 1734, George Berkeley, Vescovo di Cloyne, attaccò il calculus precisamente su questo punto. Gli scienziati, disse, attaccano la religione per essere irragionevole; bene, permetti loro di migliorare prima il loro ragionamento. Una quantità è zero oppure no; non esiste niente nel mezzo. E Berkeley descrisse i matematici del suo tempo come uomini “più abituati a calcolare, piuttosto che a pensare”[2].

Forse Berkeley aveva ragione, ma molti matematici non erano molto preoccupati. I concetti di quoziente differenziale e integrale, concetti resi più efficienti dalla notazione di Leibniz e dal Teorema Fondamentale, avevano un enorme potere. Per i matematici del XVIII° secolo, specialmente quelli sul continente dove i maggiori risultati erano stati raggiunti, era da un po' che i concetti del calculus erano stati compresi sufficientemente bene tanto da essere applicati per risolvere un grande numero di problemi, sia in matematica che in fisica. Quindi, arriviamo al nostro III° stage: *l'esplorazione e lo sviluppo*.

Equazioni differenziali, le serie di Taylor e le funzioni.

Newton aveva iniziato le sue tre leggi del moto a parole, e derivò la loro forma fisica da quelle leggi tramite la geometria sintetica [15]. La seconda legge di Newton affermava: “il cambiamento di moto [ovvero il nostro 'momento'] è proporzionale alla forza motrice applicata, e si sviluppa nella direzione della linea [retta] nella quale la forza viene impressa” [15, p. 13]. Una volta tradotta nel linguaggio del calculus, questa legge fornì ai fisici uno strumento di scoperta fisica con un potere tremendo – a causa del potere del concetto della derivata.

Per spiegarlo, se F è la forza e x la distanza (quindi mx' era il momento, per masse costanti, e mx'' era il “rate of change” del momento), allora la seconda legge di Newton prese la forma di F=mx''. La legge di Hooke dell'elasticità (quando un corpo elastico viene “distorto” la forza"restoring” è proporzionale alla distanza [nella direzione opposta] della distorsione) prese la forma algebrica di F = -kx. Mettendo in equazione queste due espressioni per la forza, Eulero nel 1739 poté facilmente risolvere l'equazione differenziale mx''+kx=0 che descriveva il moto di una molla vibrante [10, p. 482]. Era matematicamente sorprendente, e fisicamente interessante, che la soluzione dell'equazione differenziale comprendesse seni e coseni.

Un problema analogo, ma considerevolmente più sofisticato, era quello dell'enunciazione e risoluzione dell'equazione differenziale per la corda vibrante. In notazione moderna risulterebbe

$$\frac{\delta^2 y}{\delta t^2} = \frac{T \delta^2 y}{\mu \delta x^2} \quad ,$$

dove T è la tensione della stringa e mu è la massa per unità di lunghezza. La questione di come la soluzione di questa equazione differenziale parziale ci comportasse fu investigata da uomini del calibro di d'Alambert, Bernoulli e Eulero, e portò a una lunga discussione sulla natura della continuità, e ad un'espansione della nozione di funzione dalle formule ad una relazione di dipendenza più generale [10, pag. 502-514], [16, pag. 367-368]. Le discussioni che circondarono il problema della corda vibrante illustravano i modi inaspettati nei quali le scoperte matematiche e fisiche potevano interagire ([16, pag. 351-368] ha una buona selezione presa dai testi originali). Numerosi altri esempi possono essere citati, dall'uso delle serie infinite nell'approssimazione della meccanica celeste alla dinamica del corpo rigido, per mostrare che per la metà del XVIII° secolo le equazioni differenziali erano diventate lo strumento matematico più utile nella storia della fisica.

Un altro strumento molto utile furono le serie di Taylor, sviluppate in parte per aiutare a risolvere le equazioni differenziali. Nel 1715, Taylor, discutendo a proposito delle proprietà delle differenze finite, scrisse una equazione che esprimeva quello che noi scriveremmo come f(x+h) in termini di f(x) e il loro quoziente delle differenze di vario ordine. Poi Taylor rese le differenze piccole, passando al limite, e dette la formula che ancora porta il suo nome: le Serie di Taylor. (In realtà, James Gregory e Newton avevano anticipato questa scoperta, ma il lavoro di Taylor ebbe una influenza diretta maggiore). L'importanza di questa proprietà delle derivate venne presto riconosciuta, in particolare da Colin Maclaurin (il cui nome è associato ad un caso speciale), da Eulero, e da Lagrange. Nelle loro mani, le serie di Taylor divennero un mezzo potente nello studio delle funzioni e nell'approssimazione delle soluzioni delle equazioni.

Oltre a questo, lo studio delle serie di Taylor fornì nuovi approfondimenti sulla natura della derivata. Nel 1755, Eulero, nel suo studio sulle serie di Potenze, disse che per ogni serie di potenze,

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots \quad ,$$

si poteva trovare una x sufficientemente piccola da permettere di interrompere la serie dopo un particolare termine – diciamo x^2 – cosicché il termine x^2 superi, in valore assoluto, la somma di tutti i termini rimanenti della serie [6, sezione 122]. Anche se Eulero non lo dimostrò – probabilmente lo riteneva banale dal momento che di solito lavorava con serie a termini finiti – lo applicò traendone grandi vantaggi. Per esempio, egli poteva analizzare la natura dei massimi e di minimi. Consideriamo, per determinatezza, il caso del massimo. Se f(x) è un massimo relativo, allora per definizione, per h piccolo,

f(x-h)<f(x) e f(x+h)<f(x).

Il Teorema di Taylor dava, per queste disuguaglianze,

$$f(x-h) = f(x) - h\frac{df(x)}{dx} + h^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} - \ldots < f(x) \qquad (3)$$

$$f(x+h) = f(x) + h\frac{df(x)}{dx} + h^2 \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \ldots < f(x) \qquad (4)$$

Adesso se h è così piccolo che moltiplicato per df(x)/dx domina il resto dei termini, l'unico modo in cui entrambe le disequazioni (3) e (4) possono essere soddisfatte è quando df(x)/dx è zero. Così il quoziente differenziale è zero per un massimo relativo. Inoltre, Eulero affermò che, dal momento che h^2 è sempre positivo, se $d^2 f(x)/dx^2 \neq 0$, l'unico modo in cui entrambe le disuguaglianze possono essere soddisfatte è che $d^2 f(x)/dx^2$ è negativo. Questo perché il termine h^2 domina il resto della serie – a meno che $d^2 f(x)/dx^2$ non sia zero, nel qual caso possiamo andare avanti e pensare a quozienti differenziali di grado ancora più elevato. Questa analisi, prima fornita e dimostrata geometricamente da Maclaurin, fu fatta funzionare in dettaglio in maniera analitica da Eulero [6, sezione 253 – 254], [9, pag. 117-118]. È tipico dell'abilità di Eulero scegliere calcoli che producono la comprensione di concetti fondamentali. Si assume, ovviamente, che la funzione in questione possieda una serie di Taylor, una assunzione che Eulero faceva senza dimostrarlo per nessuna funzione; assumeva inoltre che la funzione fosse unicamente la somma della sua serie di Taylor, che Eulero prendeva per garantita. Tuttavia, questa analisi è un bell'esempio dell'esplorazione e dello sviluppo del concetto di quoziente differenziabile di primo, secondo ed n-esimo grado – uno sviluppo che risolve completamente il problema della caratterizzazione dei massimi e dei minimi, un problema che risale agli antichi Greci.

Lagrange e la derivata come funzione

Anche se Eulero fece un ottimo lavoro analizzando i massimi e i minimi, ha portato poco avanti la comprensione della natura del quoziente differenziale. La nuova importanza che venne data alle serie di Taylor significava che ci si doveva preoccupare non solo dei quozienti differenziali i primo e di secondo grado, ma anche dei quozienti differenziali di qualsiasi ordine.

La prima persona a prendere queste cose seriamente fu Lagrange. Intorno al 1770, Lagrange fu impressionato con quello che Eulero fu in grado di ottenere manipolando le serie di Taylor con i quozienti differenziali, ma Lagrange presto si preoccupò della inadeguatezza logica di tutte le giustificazioni esistenti per il calculus. In particolare, Lagrange scrisse nel 1797 che il concetto Newtoniano di limite non era abbastanza chiaro per poter essere il fondamento di una branca della matematica. Inoltre, non permettendo alle variabili di sorpassare il proprio limite, Lagrange pensava che il concetto di limite fosse troppo restrittivo. Invece, disse, il calcolo dovrebbe essere ridotto all'algebra, un argomento i cui fondamenti nel XVIII° secolo erano generalmente considerati sani [11, pag. 15-16].

L'algebra che Lagrange aveva in mente era quella che lui chiamava "algebra delle serie infinite", perché Lagrange era convinto che le serie infinite fossero parte dell'algebra. Come l'aritmetica si occupa di frazioni decimali infinite senza smettere di essere aritmetica, Lagrange pensava che anche l'algebra avesse a che fare con espressioni algebriche infinite senza smettere di essere algebra. Lagrange credeva che espandendo f(x+h) nella serie di potenze di "h" fosse sempre un processo algebrico. Ovviamente è un procedimento algebrico quello di trasformare 1/(1-x) in una serie di potenze tramite una divisione. E Eulero aveva trovato, manipolando le formule, espansioni in serie di potenze infinite per funzioni come il seno il coseno e l'esponenziale. Se funzioni come queste avevano espansioni in serie di potenze infinite, forse qualsiasi cosa poteva essere ridotta all'algebra. Eulero, ne suo libro "Introduction to the analysis of the infinite" (introductio in analysin infinitorum, 1748), aveva studiato le serie infinite, prodotti infiniti, e frazioni continue infinite con quello che pensava come un metodo puramente algebrico. Per esempio, convertì serie infinite in prodotti infiniti trattando una serie come un polinomio molto lungo. Eulero pensava che questo procedimento fosse puramente algebrico, e – quello che qua è cruciale – anche Lagrange pensava che i metodi di Eulero fossero puramente algebrici. Quindi Lagrange provò a rendere il calculus rigoroso riducendolo all'algebra delle serie infinite.

Lagrange dichiarò nel 1797, e pensava di averlo dimostrato, che ogni funzione (ovvero, ogni espressione analitica, finita o infinita) aveva una espansione in serie di potenze:

$$f(x+h)=f(x)+p(x)h+q(x)h^2+r(x)h^3+\dots \quad , \qquad (5)$$

eccetto, possibilmente, per un numero finito di valori isolati di x. Egli definì una nuova funzione, il coefficiente del termine lineare in h che è p(x) nell'espansione (5), e lo chiamò la **funzione derivata prima** di f(x). Il termine di Lagrange "funzione derivata" è l'origine del termine "derivata". Lagrange introdusse una nuova notazione, f '(x), per questa funzione. Definì f "(x) come la prima funzione derivata di f '(x), e così via, ricorsivamente. Finalmente, usando queste definizioni, dimostrò che, nell'espansione (5), q(x)=f "(x)/2 , r(x)=f "'(x)/6, e così via [11, capitolo 2].

Cosa c'era di nuovo con le definizioni di Lagrange? Il concetto di funzione – che sia semplicemente una espressione algebrica (possibilmente infinito) o, più in generale, una relazione di dipendenza – aiuta a liberare il concetto di derivata dalle nozioni precedenti mal definite. La spiegazione di Newton di una flussione come il “rate of change” sembrava coinvolgere il concetto di moto in matematica; inoltre, una flussione sembrava essere un tipo di oggetto differente rispetto alla quantità fluente di cui era il flusso. Per Leibniz, il quoziente differenziale era il quoziente di differenze incredibilmente piccole; il secondo quoziente differenziale, o anche differenze più piccole. Il vescovo Berkeley, nel suo attacco al calculus, si prese gioco di questi primi concetti, chiamando gli incrementi “vanishing” come “i fantasmi di quantità svanite” [2, sezione 35]. Ma poiché, per Lagrange, la derivata era una funzione, era adesso lo stesso tipo di oggetto della funzione originale. La derivata seconda è precisamente lo stesso tipo di oggetto della funzione originale; perfino la n-esima derivata è semplicemente un'altra funzione, definita come il coefficiente di h nella serie di Taylor $f^{(n-1)}(x+h)$. La notazione di Lagrange f '(x) era stata scelta appositamente per questo punto.

Non possiamo pienamente accettare la definizione di Lagrange di derivata, dal momento che essa assume che ogni funzione differenziabile sia la somma di una serie di Taylor e perciò doveva avere una infinità di derivate. Tuttavia, questa definizione portò Lagrange a un certo numero di importanti proprietà delle derivate. Egli usò la sua definizione insieme al criterio di Eulero per usare le serie di potenze troncate approssimate per fornire una caratterizzazione più utile delle derivate di una funzione [9, pag. 116, pag. 118-121]:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+hH \quad \text{, dove H va a zero con h.}$$

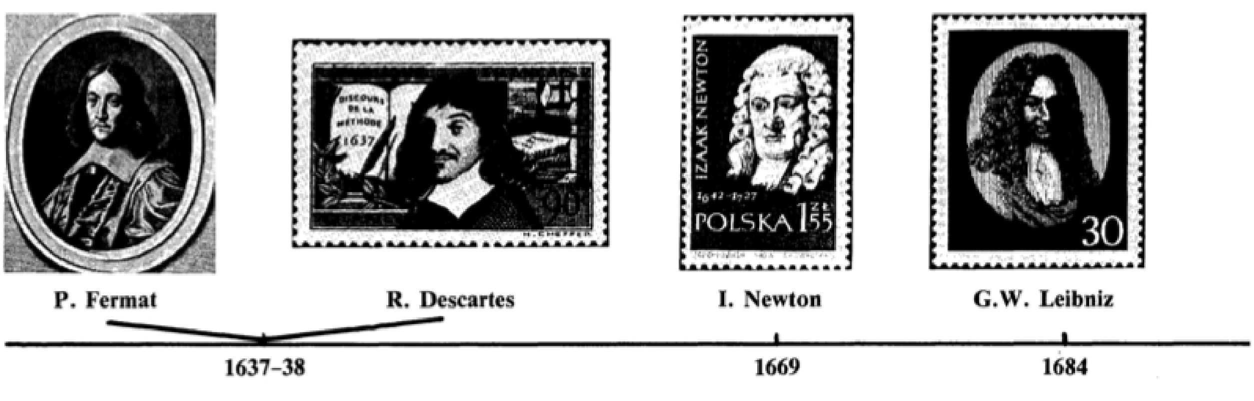
(Io chiamo questa la proprietà di Lagrange delle derivate.) Lagrange interpretava la frase “H va a zero con h” in termini di disequazioni. Lui scrisse che

Dato D, h può essere scelta in modo che f(x+h)-f(x)
giaccia tra h(f '(x)-D) e h(f '(x)+D). (6)

La formula (6) è visibilmente vicino alla definizione delta-epsilon della derivata.

Lagrange usò la disuguaglianza (6) per dimostrare teoremi. Ad esempio, dimostrò che una funzione con derivata positiva su un intervallo è crescente su tale intervallo, e usò questo teorema per derivare che il promemoria di Lagrange delle serie di Taylor [9 pag. 122-127], [11, pag. 78-85]. Inoltre, disse, considerazioni come la disuguaglianza (6) sono ciò che rende possibile l'applicazione del calcolo differenziale a un'intera gamma di problemi in meccanica, geometria e, come abbiamo descritto, i problemi di massimo e minimo (che Lagrange risolse usando il promemoria delle serie di Taylor che porta il suo nome [11. pag. 233-237]).

Nel lavoro di Lagrange del 1797, quindi, le derivate sono definite dalla loro posizione nella serie di Taylor – una strana definizione per noi. Ma le derivate sono anche descritte come soddisfacenti quella che noi riconosciamo come una appropriata disequazione delta-epsilon, e Lagrange applicò questa disequazione e il suo analogo di ordine n, il promemoria di Lagrange per risolvere problemi sulle tangenti, ordini di contatto tra le curve e estremi. Qui le derivate erano chiaramente considerate come funzioni, piuttosto che come rapporti o velocità.



Dates refer to these mathematician's major works which

Ancora, risulta una richiesta molto pesante quella di assumere che una funzione abbia una serie di Taylor quando si voglia definire solamente una derivata. Inoltre, Lagrange sbagliava riguardo l'algebra delle serie infinite. Come fece notare Cauchy nel 1821, l'algebra delle quantità finite non poteva automaticamente essere esportata a processi infiniti. E, come Cauchy fece inoltre notare, manipolare le serie di Taylor non è infallibile. Per esempio, e^{-1/x^2} ha una serie di Taylor uguale a zero in x=0, ma la funzione non è identicamente 0. Per queste ragioni, Cauchy respinse la definizione di Lagrange di derivata e la sostituì con la propria.

Definizioni, rigore, e dimostrazioni

Adesso arriviamo all'ultimo stage nella nostra lista cronologica: la definizione. Nel 1823, Cauchy definì la derivate di f(x) come il limite, se esiste, del quoziente delle differenze (f(x+h)-f(x))/h quando h va a zero [4, pag. 22-23]. Ma Cauchy intese “limite” in maniera differente rispetto a come avevano fatto i suoi predecessori. Cauchy evitò completamente la questione se una variabile potesse mai raggiungere il suo limite; lui non ne discusse affatto. In oltre, riconoscendo un valore assoluto quando ne vedeva uno, Cauchy seguì Simon l'Huilier e S.F. Lacroix nell'abbandono della restrizione secondo la quale le variabili non potessero mai sorpassare il proprio limite. Finalmente, anche se Cauchy, come Newton e d'Alambert prima di lui, aveva dato la sua definizione di limite a parole, la comprensione del limite da parte di Cauchy (per la maggior parte del tempo) rimase algebrica. Con questo, intendo dire che quando Cauchy aveva bisogno di una proprietà del limite in una dimostrazione, usava la disequazione-caratterizzazione algebrica di limite. La dimostrazione di Cauchy del Teorema del valor medio per le derivate ce lo mostra. Prima lui dimostrò un teorema che affermava:

Se f(x) è continuo su [x , x+a], allora

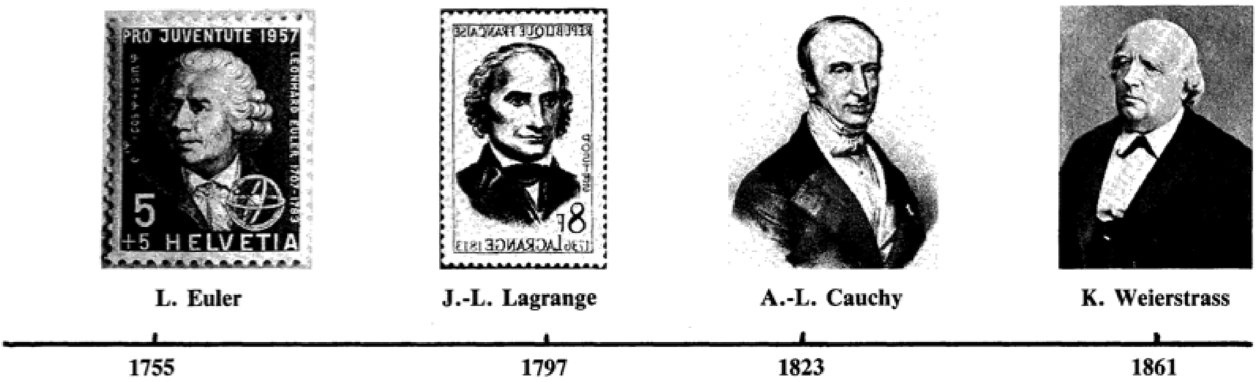
$$min_{[x,x+a]} f'(x) \leq \frac{f(x+a)-f(x)}{a} \leq max_{[x,x+a]} f'(x) \quad . \qquad (7)$$

Il primo passo della sua dimostrazione era [4, pag. 44]:

> Siano delta e epsilon due numeri molto piccoli; delta scelto in modo che per tutti i valori assoluti di h minori di delta, e per ogni valore di x [sull'intervallo dato], il rapporto (f(x+h)-f(x))/h sarà sempre più grande di f '(x)-epsilon, e più piccolo di f '(x)+ epsilon.

(La notazione in questa citazione è quella di Cauchy, eccetto che ho sostituito h con la “i” che lui aveva usato.) Assumendo il Teorema del valor medio per le funzioni continue, che Cauchy aveva dimostrato nel 1821, il teorema del valor medio (mean-value) è un semplice corollario di (7) [4, pag. 44-45], [9, pag. 168-170].

Cauchy prese la disuguaglianza-caratterizzazione della derivata da Lagrange (probabilmente da un foglio del 1806 di A.M. Ampère [9, pag. 127-132]). Ma Cauchy fece di questa caratterizzazione una definizione di derivata. Cauchy inoltre prese da Lagrange il nome “derivata” e la notazione f '(x), enfatizzando la natura di funzione della derivata. E, come ho mostrato in dettaglio in un altro articolo [9, capitolo 5], Cauchy adattò e migliorò la disuguaglianza di Lagrange dimostrazione-metodo per provare risultati come il teorema del “mean-value”, i metodi-dimostrazione adesso erano giustificati dalla definizione di Cauchy di derivata.



contributed to the evolution of the concept of the derivative.

Ma ovviamente, con la nuova definizione più rigorosa, Cauchy andò molto oltre Lagrange. Ad esempio, usando il suo concetto di limite per definire l'integrale come il limite delle somme, Cauchy fece una prima buona approssimazione di una dimostrazione reale del Teorema fondamentale del calcolo [9, pag. 171-175], [4, pag. 122-125, 151-152]. E fu Cauchy che non solo sollevò la questione, ma dette la prima dimostrazione, dell'esistenza di una soluzione di una equazione differenziale [9, pag. 158-159].

Dopo Cauchy, il calculus stesso venne visto diversamente. Era visto come un argomento rigoroso, con buone definizioni e con Teoremi le cui dimostrazioni erano basate su queste definizioni piuttosto che un insieme di metodi potenti. Non solo il nuovo rigore di Cauchy fissò i precedenti risultati su una base solida, ma fornì anche una cornice per una gran quantità di nuovi risultati, alcuni dei quali non potevano neanche essere formulati prima del lavoro di Cauchy.

Di certo, Cauchy non risolse da solo tutti i problemi che scaturirono dal suo lavoro. In particolare la definizione di Cauchy della derivata soffrì di una mancanza della quale lui non fu mai consapevole. Dato un epsilon, lui sceglieva un delta che assumeva avrebbe funzionato per ogni x. Lui assumeva che il quoziente delle differenze convergesse uniformamene al suo limite. Così fu fino al 1840 quando G.G. Stokes, V. Seidel, K. Weierstrass e Cauchy stesso lavorarono sulla distinzione tra convergenza e convergenza uniforme. Dopo tutto, per poter compiere questa distinzione, bisognava prima chiarire e capire algebricamente cosa fosse un limite – la comprensione che Cauchy stesso aveva fornito.

Intorno al 1850, K. Weierstrass iniziò le lezioni all'università di Berlino. Nelle sue lezioni, Weierstrass fece si che le disequazioni algebriche prendessero il posto delle parole nei teoremi di analisi, e usò la sua chiara distinzione tra convergenza puntuale e uniforme insieme con le tecniche delta-epsilon di Cauchy per presentare un trattamento sistematico e completamente rigoroso del calcolo. Anche se Weierstrass non pubblicò le sue lezioni, i suoi studenti H.A. Schwartz, G. Mittang-Leffler, E. Heine , S. Pincherle, Sonya Kowalevsky, George Cantor, per nominarne alcuni – disseminarono il rigore di Weierstrass nei centri matematici d'Europa. Quindi anche se la nostra definizione moderna delta-epsilon di derivata non può essere citata dai lavori di Weierstrass, essa è in effetti opera di Weierstrass [3, pag. 284-287]. La comprensione rigorosa portata al concetto di derivata da Weierstrass è segnalata dalla sua pubblicazione del 1872 di un esempio di una funzione ovunque continua ma derivabile da nessuna parte. Questo è molto diverso dal semplice riconoscimento che le derivate non possono sempre esistere, e questo esempio mostra una completa padronanza del concetto di derivata, limite, e esistenza del limite [3, pag. 285].

Sviluppo storico contro l'esposizione dei libri di testo

L'arco di tempo tra Fermat e Weierstrass è di oltre 200 anni. Come si è sviluppato il concetto di derivata? Fermat lo usò implicitamente; Newton e Leibnitz lo scoprirono; Taylor, Eulero, Maclaurin lo svilupparono; Lagrange lo nominò e caratterizzò; e solamente alla fine di questo lungo periodo di sviluppo Cauchy e Weierstrass lo definirono. Questo è certamente un capovolgimento completo dell'ordine normale di esposizione di un libro di testo in matematica, dove si inizia con la definizione, poi si esplorano alcuni risultati, e sono successivamente si suggeriscono applicazioni.

Questo punto è importante per gli insegnanti di matematica: l'rodine storico dello sviluppo della derivata è l'inverso dell'ordine usuale dell'esposizione in un testo. Conoscere la storia ci aiuta quando insegniamo le derivate. Dovremmo metterci nei panni dei matematici che precedettero Fermat, e dove si trovano i nostri studenti alle prime armi – dall'altro lato, prima di avere un qualsiasi concetto di derivata, e anche prima di conoscere i suoi molti usi. Vedendo le origini storiche di un concetto aiuta a motivare il concetto stesso, che noi – come Newton e Leibniz – vogliamo utilizzare per risolvere alcuni problemi. Conoscere l'ordine storico ci aiuta anche a motivare la definizione rigorosa – che noi, come Cauchy e Weierstrass – vogliamo per poter giustificare l'uso della derivata, e per mostrare precisamente quando la derivata esiste e quando no. Abbiamo bisogno di ricordare che le definizioni rigorose sono spesso la fine, piuttosto che l'inizio, di un argomento.

Il vero sviluppo storico della matematica – in ordine di scoperta – rivela l'aspetto del matematico creativo a lavoro, e anche che è la creazione che rende il "fare matematica" così eccitante. L'ordine di esposizione, d'altro canto, è quello che da alla matematica la sua caratteristica struttura logica e la sua certezza deduttiva incomparabile. Sfortunatamente, una volta che l'esposizione classica viene fornita, l'ordine di scoperta viene spesso dimenticato. Lo scopo dello storico è quello di riconquistare l'ordine della scoperta: non come noi pensiamo possa essere avvenuta, non come pensiamo dovrebbe essere avvenuta, ma come realmente avvenne. E questo era lo scopo della storia che abbiamo appena raccontato, della derivata da Fermat a Weierstrass.

Questo articolo si basa su un intervento orale esposto alla Conferenza della storia della Matematica Moderna; Indiana Region of the Mathematical Association of America; Ball State University, April 1982; una versione precedente fu presentata al Southern California Section of M.A.A e a vari colloqui matematici. Ringrazio i giudici del Mathematics Magazine per i loro utili suggerimenti.

References

[1] Margaret Baron, Origins of the Infinitesimal Calculus, Pergamon, Oxford, 1969.
[2] George Berkeley, The Analyst, or a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician, 1734. In A. A. Luce and T. R. Jessop, eds., The Works of George Berkeley, Nelson, London, 1951 (some excerpts appear in [**16**, pp. 333–338]).
[3] Carl Boyer, History of the Calculus and Its Conceptual Development, Dover, New York, 1959.
[4] A.-L. Cauchy, Résumé des leçons données à l'école royale polytechnique sur le calcul infinitésimal, Paris, 1823. In Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy, Gauthier-Villars, Paris, 1882- , series 2, vol. 4.
[5] Pierre Dugac, Fondements d'analyse, in J. Dieudonné, Abrégé d'histoire des mathématiques, 1700–1900, 2 vols., Hermann, Paris, 1978.
[6] Leonhard Euler, Institutiones calculi differentialis, St. Petersburg, 1755. In Operia omnia, Teubner, Leipzig, Berlin, and Zurich, 1911- , series 1, vol. 10.
[7] Pierre Fermat, Analysis ad refractiones, 1661. In Oeuvres de Fermat, ed., C. Henry and P. Tannery, 4 vols., Paris, 1891–1912; Supplement, ed. C. de Waard, Paris, 1922, vol. 1, pp. 170–172.
[8] ______, Methodus ad disquirendam maximam et minimam et de tangentibus linearum curvarum, Oeuvres, vol. 1, pp. 133–136. Excerpted in English in [**16**, pp. 222–225].
[9] Judith V. Grabiner, The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus, M. I. T. Press, Cambridge and London, 1981.
[10] Morris Kline, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford, New York, 1972.
[11] J.-L. Lagrange, Théorie des fonctions analytiques, Paris, 2nd edition, 1813. In Oeuvres de Lagrange, ed. M. Serret, Gauthier-Villars, Paris, 1867–1892, vol. 9.
[12] Michael S. Mahoney, The Mathematical Career of Pierre de Fermat, 1601–1665, Princeton University Press, Princeton, 1973.
[13] Isaac Newton, Of Analysis by Equations of an Infinite Number of Terms [1669], in D. T. Whiteside, ed., Mathematical Works of Isaac Newton, Johnson, New York and London, 1964, vol. 1, pp. 3–25.
[14] ______, Method of Fluxions [1671], in D. T. Whiteside, ed., Mathematical Works of Isaac Newton, vol. 1, pp. 29–139.
[15] ______, Mathematical Principles of Natural Philosophy, tr. A. Motte, ed. F. Cajori, University of California Press, Berkeley, 1934.
[16] D. J. Struik, Source Book in Mathematics, 1200–1800, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1969.
[17] D. T. Whiteside, ed., The Mathematical Papers of Isaac Newton, Cambridge University Press, 1967–1982.