
La funzione blancmange Continua ovunque ma non differenziabile da nessuna parte

DAVID TALL

Uno dei problemi della prima introduzione al calcolo e delle successive immagini mentali sviluppate dallo studente è che le funzioni coinvolte sono solitamente date da semplici formule come $f(x)=x^n$ e le derivate calcolate da formule crunching ("scricchiolanti"??): $f'(x)=n*x^{(n-1)}$.

Le idee fondamentali del calcolo e qualsiasi comprensione relazionale passano in secondo piano. Raramente si esce dalla giacca di forza e si considerano funzioni più generali a un certo punto. Quando esse vengono considerate, di solito viene eseguito nel contesto dell'analisi universitaria in cui le immagini sono vietate perché si pretende di ingannare l'intuizione.

Tale atteggiamento è completamente distruttivo. Quello che dobbiamo fare è mantenere la nostra intuizione in modo che i teoremi dell'analisi diventino naturali, dandoci una visione più coerente della teoria. Con l'avvento del microchip e la grafica ad alta risoluzione, il disegno di funzioni molto più generali diventerà una realtà in classe nei prossimi vent'anni. Ora è il momento di iniziare a riorientare la nostra comprensione del calcolo per sfruttare le nuove strutture e una più ampia comprensione dei concetti.

Il mio scopo qui è quello di dare una spiegazione concettuale raffinata di continuità e differenziazione che sono formalmente corrette e hanno un'interpretazione pittorica adeguata. Come esempio particolare, introdurrò la funzione Blancmange (il cui nome è stato coniato per la prima volta dal mio collega John Mills). Il grafico della funzione è illustrato in Fig. 1.

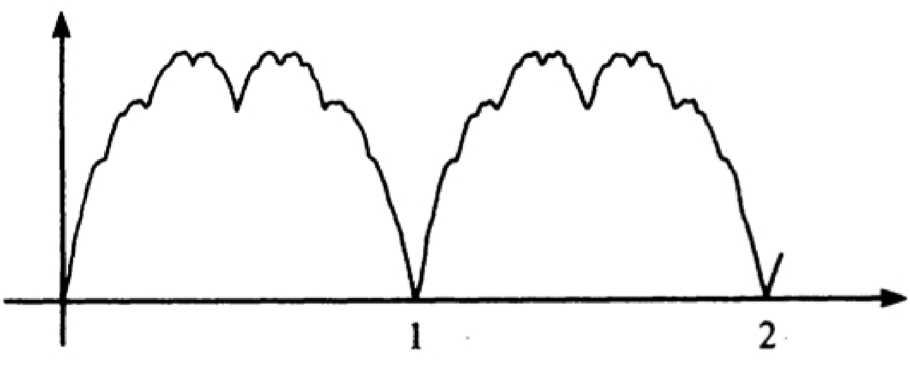

FIGURE 1.

Le idee presentate qui dovrebbero essere facilmente alla portata di studenti armati solo di carta millimetrata, un righello, una matita e una mente vivace. Come vedremo, la funzione blancmange risulta essere continua ovunque ma non differenziabile da nessuna parte. Impareremo come visualizzare un grafico molto ingrandito per vedere come si realizza.

La ricetta di Blancmange
Il primo ingrediente nella blancmange è un semplice grafico a dente di sega che ha il valore $f_1(x)=x$ per $0<x<\frac{1}{2}$ e $f_1(x)=1-x$ per $\frac{1}{2}<x<1$.

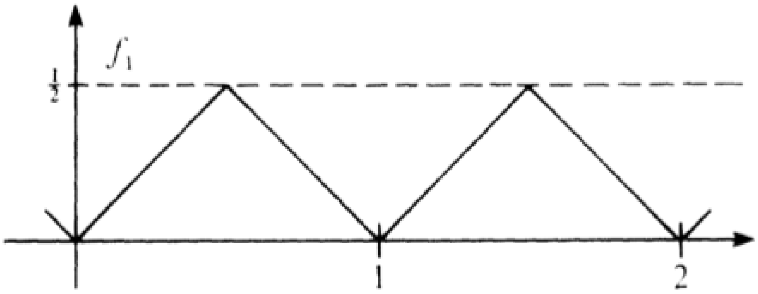

FIGURE 2.

quindi ripete i suoi valori su ciascun intervallo di unità successivo, come illustrato in Fig. 2.
In alternativa ciò può essere descritto come la distanza di x dal numero intero più vicino.
Se x=k+d dove "k" è un numero intero e "d" è l'espansione decimale del resto di x, (0<d<1), allora:

$$f_1(k+d)=d \quad \text{quando} \quad 0<d<\frac{1}{2}$$

e

$$f_1(k+d)=d \quad \text{quando} \quad 1/2<d<1$$

Per esempio, $f(2+\frac{1}{4})=\frac{1}{4}; f(3+\frac{3}{4})=\frac{1}{4}; f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})-1; f(e)=3-e$ (poiché "e" è compreso tra 2,5 e 3).

Il prossimo ingrediente è un altro grafico a dente di sega $y=f_2(x)=\frac{1}{2}*f_1(2\text{x})$. Quindi:

$$f_2(\frac{1}{2}+a)=\frac{1}{2}*f_1(1+2\text{a})=\frac{1}{2}*f_1(2\text{a})=f_2(a)$$

Proprio come $f_1(x)$ ripete i suoi valori quando x è aumentato di 1 , $f_2(x)$ ripete i suoi valori quando x è aumentato di 1/2, come mostrato in Fig. 3.

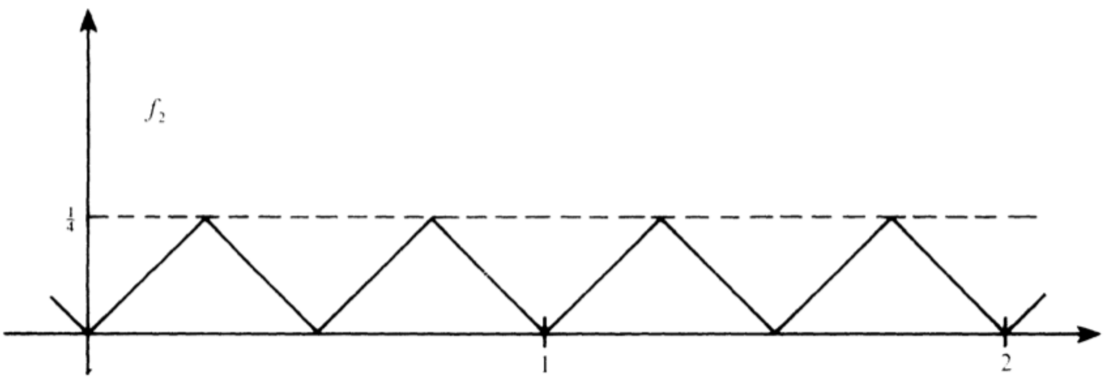

FIGURE 3.

Un modo alternativo per vedere la stessa cosa è notare che man mano che x aumenta, il grafico di $y=\frac{1}{2}*f_1(2\mathrm{x})$ sale su e giù, due volte più velocemente e a metà dell'altezza di $y=f_1(x)$.
Ora l'idea è ripetuta con

$$f_3(x)=\frac{1}{4}*f_1(4\mathrm{x})$$

e successivamente possiamo disegnare

$$f_4(x)=\frac{1}{8}*f_l(8\mathrm{x}) \quad , \ldots , \quad f_n(x)=(\frac{1}{2})^{(n-l)}*f_1(2^{(n-1)}x).$$

Ad ogni passo il grafico è "metà" della dimensione del grafico precedente. (Fig. 4)

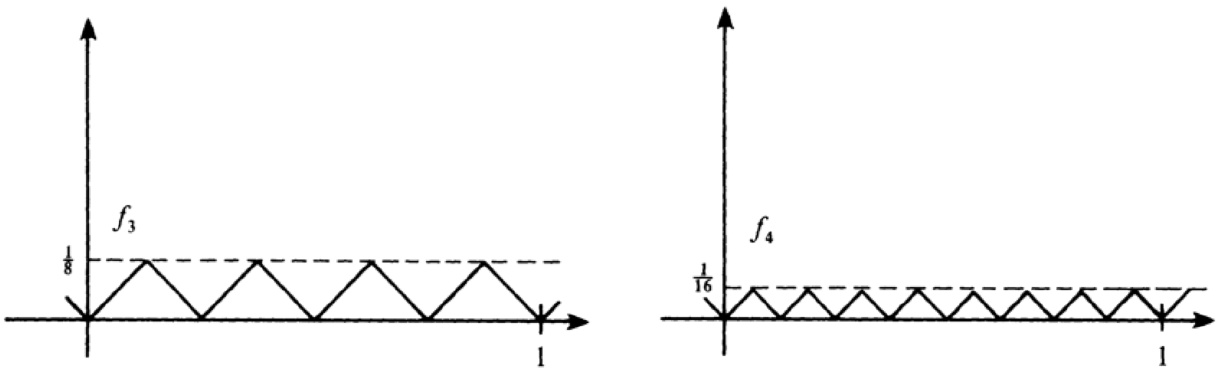

FIGURE 4.

Per ottenere la funzione blancmange, sommeremo questi grafici insieme. Potrebbe essere fatto in più fasi. Prima consideriamo $b_1(x)=f_1(x)$, quindi disegniamo
$b_2(x)=f_1(x)+f_2(x)$,
$b_3(x)=f_l(x)+f_2(x)+f_3(x)$,
e, in generale,
$b_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)=b_{(n-1)}(x)+f_n(x)$.
La cosa interessante è che dopo alcuni grafici, attorno a $b_{6,} b_7, b_8$, a seconda della scala, le nuove aggiunte diventano così piccole, che non alterano significativamente lo status quo. Il lettore dovrebbe disegnare i grafici su qualsiasi scala appropriata. L'atto fisico del disegno, invece della semplice osservazione passiva del prodotto statico finale, imprimerà indelebilmente questo fatto nella memoria (figura 5).

La funzione blancmange b è il limite della "sequenza" (successione??) delle b_n :

$$b(x)=\lim_{n\to\infty} b_n(x) \quad \text{(per ogni numero reale x).}$$

Per quanto riguarda le disuguaglianze di $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{(x)}$ abbiamo chiaramente:

$$0\le b_{(n-1)}(x)\le b_n(x)\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}^2+\ldots+\frac{1}{2}^n$$

Ma $\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\ldots+(\frac{1}{2})^n=1-(\frac{1}{2})^n$, quindi per ogni "n" abbiamo $0\le b_{n-1}(x)\le b_n(x)\le 1$.
Quindi per ogni valore fissato di x, la sequenza $b_1(x), b_2(x), \ldots, b_n(x), \ldots$ è crescente e limitata

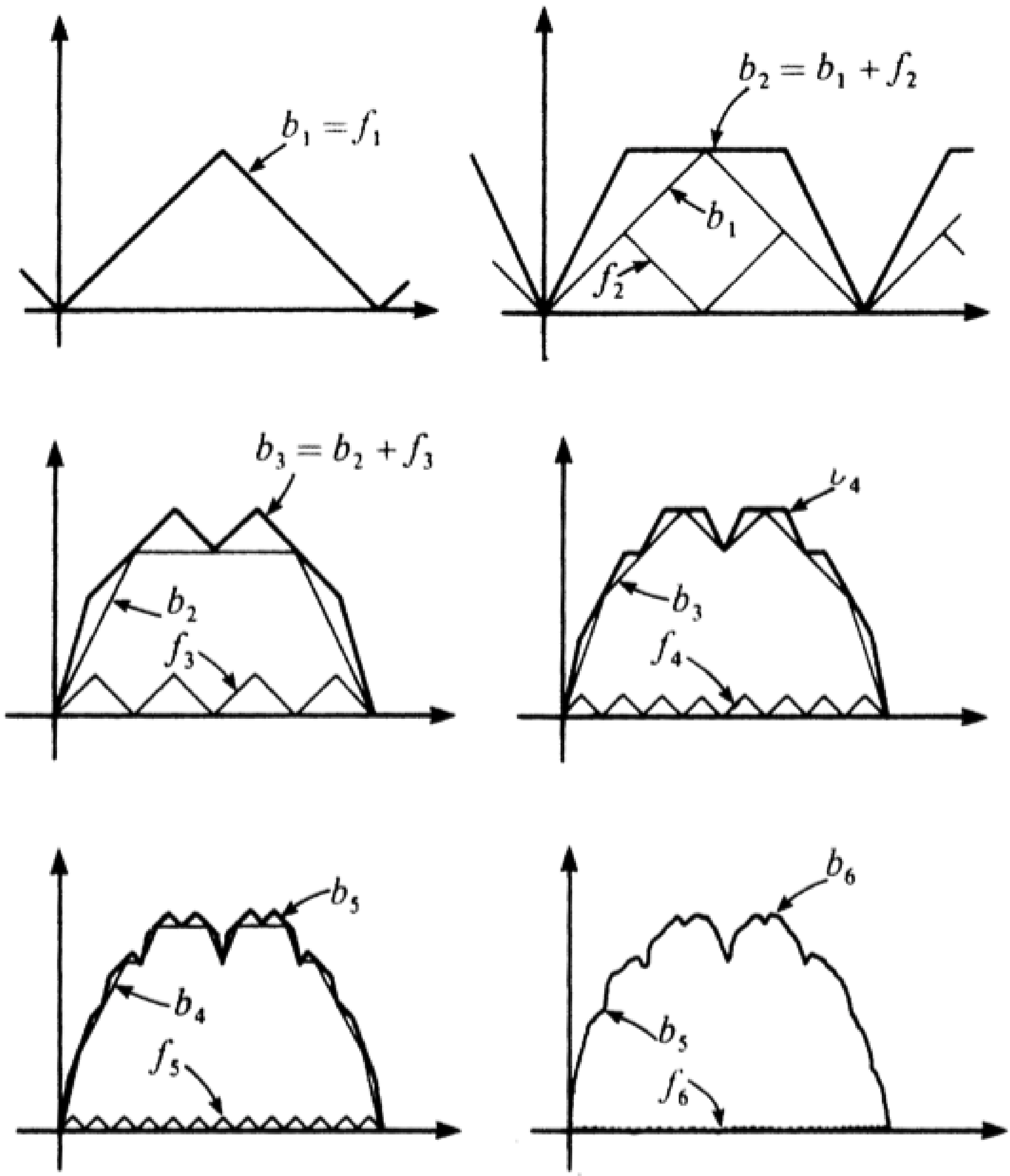

FIGURE 5.

superiormente da 1.
Quindi tende a un limite $b(x)$ che non è maggiore di 1.
Per scopi pratici non dobbiamo calcolare molti termini per ottenere una buona approssimazione a $b(x)$.
Ad esempio, per $n > 20$ abbiamo

$$0 \le b_n(x) - b_{20}(x) = f_{21}(x) + \ldots + f_n(x) \le (\frac{1}{2})^{21} + \ldots + (\frac{1}{2})^{n} =$$

$$= (\frac{1}{2})^{21}(1-(\frac{1}{2})^{n-20})/(1-\frac{1}{2}) < (\frac{1}{2})^{20} < 0{,}000001$$

quindi

$$b_{20}(x) \le b_n(x) \le b_{20}(x) + 0{,}000001 \quad \text{con} \quad n > 20 \quad .$$

Permettendo a “n” di aumentare, avremo che $b_n(x)$ tenderà a $b(x)$, ottenendo

$$b_{20} \le b(n) \le b_{20}(x) + 0{,}000001 \quad .$$

Usando 1 metro come unità di lunghezza e una penna da disegno con la punta fine (un tratto di 0,1 millimetri), il grafo della funzione blancmange b e di b_{20} sono praticamente indistinguibili.

Tuttavia, vi è un'importante differenza teorica tra b e b_{20}. Il grafico di b_{20} è costituito da segmenti di linea retta molto brevi ma, come vedremo, il grafico della funzione blancmange oscilla continuamente. Questo può essere visto immaginando cosa succederebbe se iniziassimo ad aggiungere i denti di sega non iniziando a farlo alla funzione f_1, ma in qualche dente successivo, diciamo

$$f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots$$

I “denti di sega” della funzione f_{n+1} sono la versione in scala $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ -esima di f_1, poi f_{n+2} è riscalata di un ulteriore fattore $\frac{1}{2}$ e così via. Così, la somma di cui sopra è solamente una funzione blancmange in scala $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Per essere precisi abbiamo:

$$f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+r}(x) + \ldots = (\frac{1}{2})^{n} f_1(2^n x) + \ldots + (\frac{1}{2})^{n+r-1} f_1(2^{n+r-1}x) + \ldots =$$

$$= (\frac{1}{2})^{n} f_1(2^n x) + \ldots + (\frac{1}{2})^{r-1} f_1(2^{r-1}(2^n x)) + \ldots = (\frac{1}{2})^{n} f_1(2^n x) + \ldots + f_r(2^n x) + \ldots =$$

$$= (\frac{1}{2})^{n} b(2^n x)$$

questo ci da

$$b(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x) + f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+r}(x) + \ldots = b_n(x) + (\frac{1}{2})^{n} b(2^n x)$$

Quindi il grafico della funzione blancmange $b(x)$ si ottiene sommando insieme il grafico di $b_n(x)$ e quello blancmange $(\frac{1}{2})^{n} b(2^n x)$ scalato $(\frac{1}{2})^{n}$. Ad esempio, per n = 1, l'identità

$$b(x) = b_1(x) + \frac{1}{2} b(2\mathrm{x})$$

ci dice che se aggiungiamo il grafico di $y = b_1(x)$ a una blancmange di misura dimezzata $y = \frac{1}{2} b(2x)$, allora otteniamo la blancmange di misura intere $y = b(x)$ (figura 6).

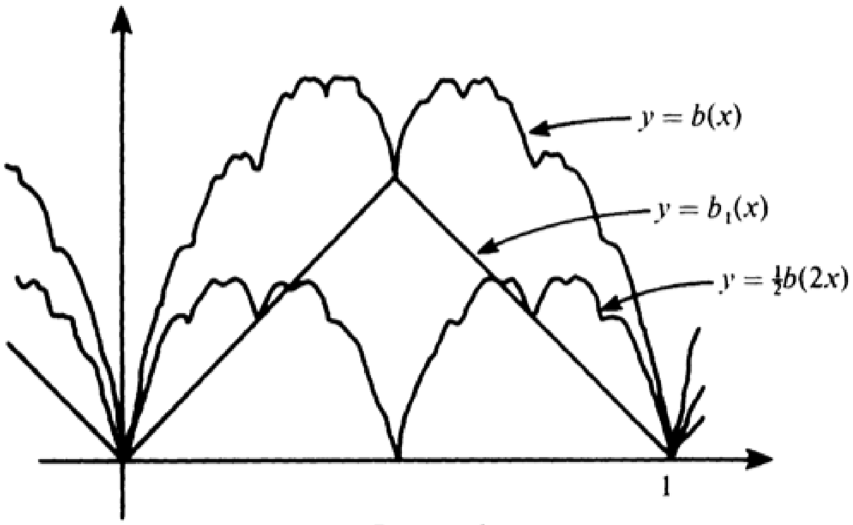

FIGURE 6.

Più in generale, se i grafici di $b(x)$ e $b_n(x)$ sono disegnati nella stessa immagine, essa rivelerà il fatto che la funzione blancmange ha minuscole mini-blancmange che sono trascinate e crescono ovunque. Ad esempio, la Fig. 7 mostra i blancmange in scala 1/16 che crescono su $b_4(x)$. Dove b_4 ha parti piatte le mini-blancmange sono versioni rimpicciolite perfette, altrove sono tranciate.

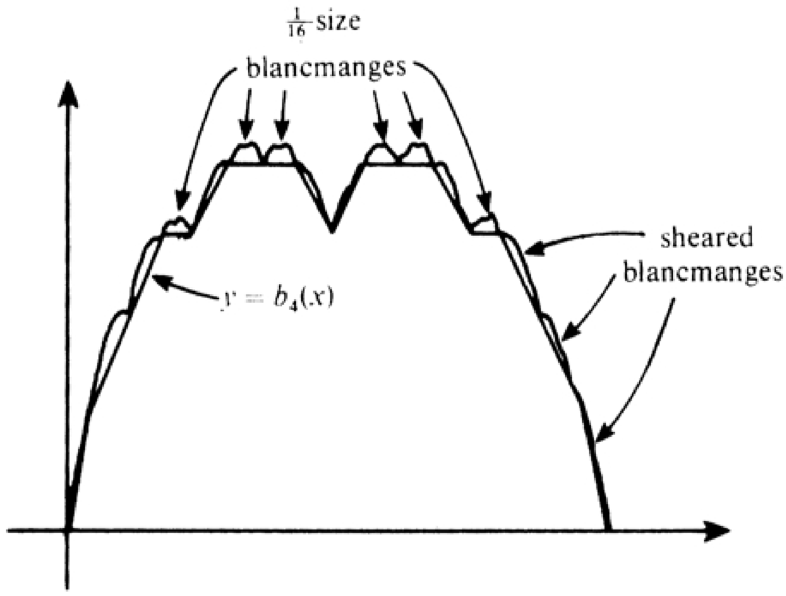

FIGURE 7.

Continuità pittorica: la funzione blancmange è continua

Una proprietà centrale delle funzioni continue da un sottoinsieme dei numeri reali (D), nei numeri reali, è che esse possono essere disegnate su un qualsiasi intervallo chiuso in D senza staccare il lapis dal foglio. In breve, una funzione continua può essere disegnata “continuamente”, in senso colloquiale.
Purtroppo, le esperienze che “gli studenti del 6° anno” ottengono dalla nozione di continuità sono

spesso in contrasto con la definizione formale. Alcuni credono che una "funzione continua" sia quella che "ha il suo grafico in un unico pezzo", altri che "è data da una singola formula", e altri ancora la collegano erroneamente con la differenziazione, per esempio "ha una tangente che gira senza difficoltà".

Una funzione $f: D \to \mathbb{R}$ è continua per $a \in D$ se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

In questo senso, la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua in tutti i punti di $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ perché

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a} \quad (a \neq 0)$$

ma il grafo di $y = 1/x$ non è “in un pezzo”. Il problema è che il dominio D ha un “gap” al suo interno. Possiamo solo sperare che il disegno del grafico sia “in un pezzo” su ogni parte del dominio che non ha “gap”, quindi proviamo a disegnarlo su un intervallo.
Ma c'è un ulteriore azzardo; se proviamo a disegnare il grafico su un intervallo che contenga uno o più “endpoints” omessi, ad esempio

$$I = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\} \quad ;$$

allora può succedere che la funzione sia “unbounded” vicino all' “endpoint” mancante (proprio come 1/x è “unbonded” vicino a zero) e quindi il grafico non può essere catturato su un pezzo di carta finito.

Con questo in mente, diremo che una funzione $f: D \to \mathbb{R}$ è **Pittoricamente Continua** se su ogni intervallo $[a,b]$ in D, dato $k > 0$ possiamo trovare $c > 0$ tale che $s, t \in [a,b]$ e $|s-t| < c$ implica $|f(s) - f(t)| < k$, vedi figura 8.

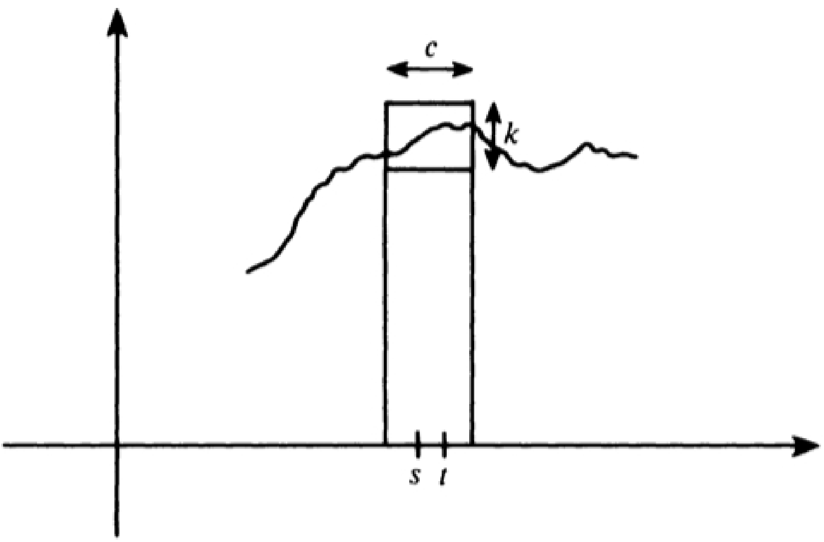

FIGURE 8.

Given $k > 0$, if s, t differ by less than the corresponding c, then the values $f(s), f(t)$ differ by less than k

(A condizione che i domini come $\mathbb{Q}$ vengano evitati, in cui punti interni e punti esterni sono mescolati inestricabilmente, ciò equivale alla continuità.)

Supponiamo di voler disegnare una funzione pittoricamente continua su un intervallo [a, b]. Dato k> 0 coprire l'intervallo [a, b] con successivi piccoli intervalli [a, a + d], [a + d, a + 2d], ... dove d è inferiore al c corrispondente a k. Quindi il grafico viene catturato in una successione di caselle larghe d e alte k (figura 9 (a)). Per la punta di una matita delle dimensioni fissate, basta scegliere k, d abbastanza piccoli da permettere a questo rettangolo di essere contenuto all'interno del segno fatto sulla carta dalla matita. Quindi spostiamo i rettangoli in successione per disegnare una linea a matita che catturi il grafico al suo interno. La Fig. 9 (b) è una caricatura di questo processo: 9 (c) è più realistico, in pratica una linea di matita cattura i rettangoli molto piccoli al suo interno.

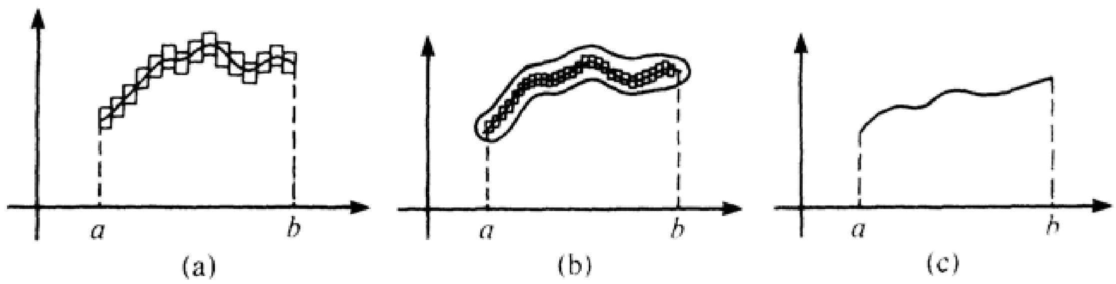

FIGURE 9.

Ora possiamo stabilire la continuità (pittorica) della funzione blancmange. Sia k > 0 dato. Troveremo un c > 0 tale che, in tutto $\mathbb{R}$.

$$|s-t|<c \quad \text{implica} \quad |b(s)-b(t)|<k \quad .$$

Lo facciamo in due fasi. Abbiamo già visto che possiamo prendere n abbastanza grande da rendere $b(x)-b_n(x)$ il più piccolo possibile. Quindi scegliamo n tale $0 \le b(x)-b_n(x)<k/2$ per tutti i reali x. Quindi, in particolare, per ogni s, t in $\mathbb{R}$,

$$-\frac{k}{2}<(b(s)-b_n(s))+(b_n(t)-b(t))<\frac{k}{2}$$

Successivamente, si noti che il grafico di b_n è costituito da segmenti di linea retta aggiungendo n denti di sega insieme. Ma ogni dente di sega ha segmenti di linea ciascuno di gradiente -1 o + 1, quindi i gradienti dei segmenti di linea di b_n , si trovano tra -n e + n. Se capita a s, t di trovarsi sotto lo stesso segmento di b_n , abbiamo:

$$|b_n(s)-b_n(t)| \le n|s-t| \quad .$$

Ma se si trovano sotto segmenti diversi, questa disuguaglianza è ancora valida (ancora di più!). Così

$$|s-t|<\frac{k}{2n} \quad \text{implica} \quad -\frac{k}{2}<b_n(s)-b_n(t)<\frac{k}{2} \quad .$$

Mettendo insieme questi fatti, abbiamo trovato un c (cioè k / 2n) così che $|s-t|<c$ implica

$$|b(s)-b(t)|=|(b(s)-b_n(s))+(b_n(s)-b_n(t))+(b_n(t)-b(t))|<k$$

come richiesto: la continuità di b è stabilita .

Funzioni differenziabili: la funzione blancmange è differenziabile da nessuna parte

La differenza tra una funzione semplicemente continua e una funzione differenziabile è facilmente visibile ingrandendo il grafico e osservandolo da vicino. Se una funzione differenziabile è molto ingrandita, il suo grafico appare come una linea retta. Una funzione continua che non è differenziabile non si livella allo stesso modo. Ad esempio, il grafico di $y=x^2$ ingrandito vicino a x = 1, y = 1 appare come una linea retta di gradiente 2 (come mostrato in Fig. 10).

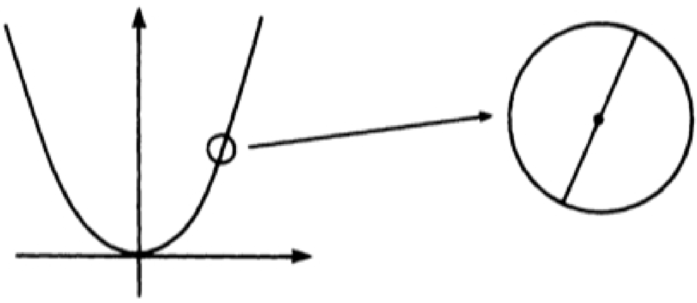

FIGURE 10.

In pratica, ciò può essere fatto sia tracciando valori su un piccolo intervallo, ad esempio [0.999 , 1.001], su una grande scala di ingrandimento; sia con calcoli semplici; oppure con grafica ad alta risoluzione su un microcomputer.

Teoricamente, supponiamo che una funzione $f: D \to \mathbb{R}$ sia differenziabile in un $a \in D$ e che l'intervallo $[a-r, a+r]$ risieda in D per qualche r> 0. Quindi

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right) = 0$$

e quindi, data k > 0, esiste una c > 0 tale che

$$0 < [x-a] < c \quad \text{implica} \quad \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right| < k \quad ,$$

da dove

$$[f(z)-f(a)-f'(a)(x-a)] < k[x-a]$$

Adesso prendiamo un qualsiasi 0 < λ < c. Allora per $0 < [x-a] \leq \lambda$ abbiamo

$$[f(z)-f(a)-f'(a)(x-a)] < k\lambda$$

Per sostituzione, questa disuguaglianza vale anche per x=a; così per $x \in [a-\lambda, a+\lambda]$ abbiamo

$$-k\lambda < f(x)-f(a)-f'(a)(x-a) < k\lambda$$

Ciò può essere scritto come

$$f(x)+f'(a)(x-a)-k\lambda < f(x) < f(a)+f'(a)(x-a)+k\lambda$$

che significa che il grafico di y=f(x) giace compreso tra le due linee parallele

$$y = f(a) + f'(a)(x-a) - k\lambda \quad \text{e} \quad y = f(a) + f'(a)(x-a) + k\lambda$$

(che sono esse stesse parallele alla tangente a y=f(x) nel punto (a,f(a))).
Queste due linee sono ad una distanza verticale di $2k\lambda$ (vedi figura 11).

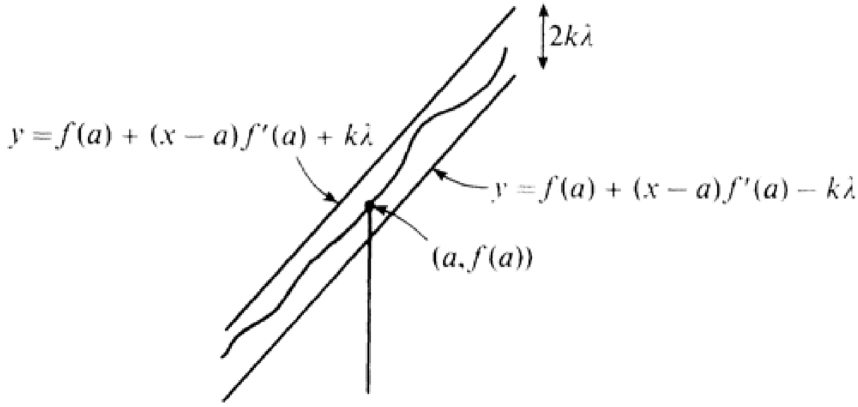

FIGURE 11.

Supponiamo che si voglia disegnare un grafico, ingrandendo l'intervallo $[a - lamdbabar, a+\lambda]$ fino ad una larghezza w; quindi avremo bisogno di moltiplicarlo per un fattore scalare $\frac{w}{2\lambda}$. Ingrandendo tutta la figura per questo fattore, la distanza verticale tra le due linee parallele viene scalata: $2k\lambda * \frac{w}{2\lambda} = kw$.

Adesso possiamo considerare k come un qualsiasi numero positivo e questo ci fornisce un valore appropriato per λ. Ad esempio prendendo $k = \frac{h}{w}$, abbiamo il seguente teorema:

TEOREMA:

Supponiamo che f sia definito su un dominio che include un intervallo $[a-d, a+d]$ e f sia differenziabile in x = a. Quindi per tutti i numeri positivi w e h, esiste un intervallo $[a-\lambda, a+\lambda]$ tale che il grafico di y = f (x) su questo intervallo ingrandito di un fattore $w/2\lambda$ si trovi tra due rette parallele di gradiente f '(a) che sono a una distanza verticale h sul disegno in scala.

Come applicazione pratica, prendiamo w = 20 centimetri e h = 0,01 centimetri, (questi valori vengono scelti per rappresentare una larghezza di carta decente w e la profondità della linea tracciata da una matita da disegno sottile). Quindi esiste qualche $\lambda > 0$ tale che il grafico di y=f(x) sull'intervallo $[a-\lambda, a+\lambda]$ scala fino a trovarsi all'interno di una sottile linea di penna dritta di larghezza 0,01 centimetri su un intervallo di larghezza 20 centimetri (figura 12).

La linea della penna ha gradiente $\tan(\theta) = f'(a)$ e l'altezza dell'immagine è $20\tan(\theta) + 0.01$ centimetri. (Se il grafico è ripido potrebbe essere piuttosto alto!)

Questo ragionamento può essere usato per mostrare che la funzione blancmange non ha una derivata da nessuna parte. Se accadesse che fosse differenziabile in x = a, per esempio, su un intervallo $[a-\lambda, a+\lambda]$, il grafico ingrandito con una larghezza orizzontale di 20 centimetri si trova tra due linee parallele che sono a una distanza verticale di 0,01 centimetri l'una dall'altra.

Scegli i numeri interi m, n $(n \geq 1)$ in modo che $\left[\frac{m}{2^n}, \frac{(m+1)}{2^n}\right]$ sia il più grande intervallo che si trova all'interno di $[a-\lambda, a+\lambda]$, il che significa che

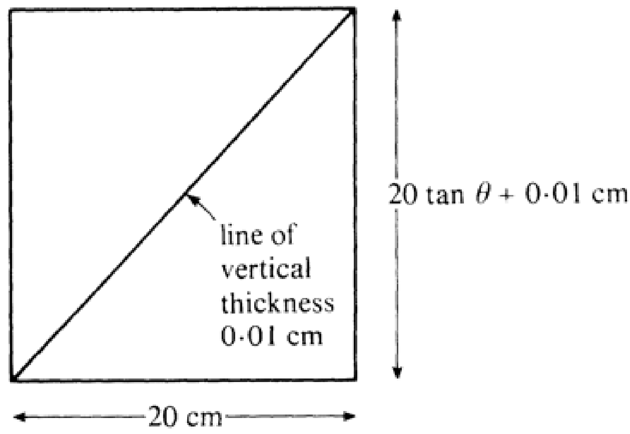

FIGURE 12.

$$\frac{m-1}{2^n} < a-\lambda \leq \frac{m}{2^n} < \frac{m+1}{2^n} \leq a+\lambda < \frac{m+2}{2^n}$$

allora

$$2\lambda = (a+\lambda)-(a-\lambda) < \frac{m+2}{2^n} - \frac{m-1}{2^n} = \frac{3}{2^n} \quad .$$

che ci da $1/2^n > 2\lambda/3$. Questo significa che quando $[a-\lambda, a+\lambda]$ è ingrandito fino a una lunghezza di 20 centimetri, allora $\left[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\right]$ viene ingrandito fino a una lunghezza di almeno $20/3 = 6+\frac{2}{3}$ centimetri. Ma, dalla prima sezione, il grafico della funzione blancmange sull'intervallo $\left[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\right]$ è una mini-blancmange "spalmata". Dal momento che la funzione blancmange sull'intervallo [0,1] si innalza ad un'altezza di più di ½, allora ingrandita fino ad una lunghezza di base maggiore di 6+2/3 centimetri, una blancmange raggiunge un'altezza maggiore di $\frac{1}{2} * 6 + \frac{2}{3} = 3 + \frac{1}{3}$ centimetri. Quando essa viene traslata ("spalmata"), non c'è alcuna possibilità che essa possa essere compresa tra due linee parallele ad una distanza verticale di 0,01 centimetri!! La ragione per cui la funzione blancmange non è differenziabile in alcun punto adesso risulta manifestamente ovvia - "traballa" troppo!!

CONSEGUENZE

Abbiamo visto che alle idee di continuità e differenziabilità possono essere date interpretazioni pittoriche ovvie: una funzione continua può essere disegnata senza togliere la matita dal foglio su qualsiasi intervallo chiuso nel dominio, e una funzione differenziabile quando ingrandita è molto simile a una retta. Queste idee sono abbastanza familiari ai matematici, fisici e ingegneri pratici, sebbene la nozione di continuità possa essere incrostata da altre interpretazioni personali che ne offuscano il vero significato. Molti matematici formalisti, d'altra parte, negano queste immagini molto utili. Alcuni troverebbero difficile immaginare una funzione continua, in nessun luogo differenziabile; tuttavia la funzione blancmange ha una ricetta per il disegno che dà un'idea molto chiara del perché ha queste proprietà apparentemente insolite.

Il fatto è che le immagini, correttamente interpretate, possono svolgere un ruolo molto importante nel dare un'intuizione delle idee nell'analisi matematica. È salutare notare che, usando le idee pittoriche, è possibile mostrare che la funzione blancmange è da nessuna parte differenziabile, un fatto che è considerato "troppo difficile" da spiegare nella maggior parte dei corsi di matematica universitari. Inoltre è importante che queste idee pratiche si traducano in una prova formale corretta, ora investita di intuizioni geometriche che mancano tristemente in così tanta matematica formale. "L'intuizione" non è un fenomeno di basso livello da escludere dalla matematica superiore, è un'attività mentale altamente personale prodotta dall'esperienza. Se diamo le giuste esperienze e miglioriamo l'intuizione, allora può risultare in una comprensione molto più profonda.

DAVID TALL

Centro di ricerca per l'insegnamento della matematica, Università di Warwick, Coventry CV4 7AL

Somma di potenze di interi: un accenno di storia

A. W. F. Edwards

La mancanza di uno schema ovvio tra i numeri di Bernoulli $\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}, 0, -\frac{1}{30}, ...\right)$ è uno degli shock di analisi che la successiva familiarità con i molti modi belli e semplici di derivarli non assorbe del tutto. Storicamente, essi sono nati per la prima volta in connessione con le somme delle potenze r-esime n interi

$$\sum_{i=1}^{n} i^r = 1^r + 2^r + 3^r + \ldots + n^r$$

che si può scrivere, convenientemente come $\sum n^r$. I Greci, gli Hindu e gli Arabi avevano regole simili:

$$\sum n = \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$\sum n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2\mathrm{n}+1) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$\sum n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

mentre una regola Araba del quindicesimo secolo per la quarta potenza era equivalente a

$$\sum n^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2\mathrm{n}+1)(3\mathrm{n}^2+3\mathrm{n}-1) =$$

$$= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n \quad .$$

dove non compaiono termini di secondo grado nell'ultima formula.