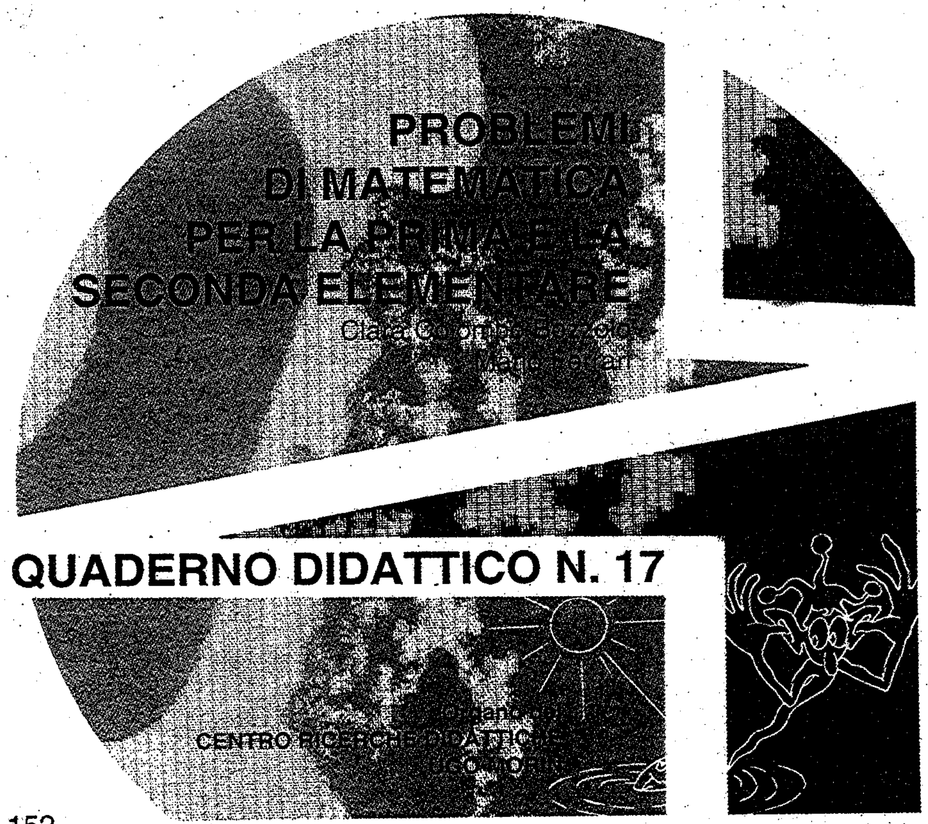
L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE

OTTOBRE 2001



NOTE PER UN CORSO DI ANALISI ZERO

ABSTRACT. The following paper starts from some considerations on the traditional rigorous approach to the teaching of Mathematical Analysis, which is now maintained in the greatest part of Italian high schools; a more intuitive presentation is here proposed to the fundamental concepts, giving a guideline of a concrete didactical course, essentially for technical and professional high schools. The aim of this paper is to contribute in searching some better methods in order to reach a real *comprehension* of the subject, avoiding meaningless routines.

Maurizio Berni

- Istituto Tecnico per Geometri "E. Santoni" – Pisa

- Scuola Superiore per l'Insegnamento Secondario di Pisa.

NOTE PER UN CORSO DI ANALISI ZERO

Maurizio Berni

Questo articolo prende le mosse da alcune considerazioni sul tradizionale approccio rigoroso all'insegnamento dell'Analisi Matematica, attualmente mantenuto nella maggior parte delle scuole superiori italiane; viene qui proposta una presentazione più intuitiva dei concetti fondamentali, fornendo le linee-guida di un percorso didattico concreto, essenzialmente per gli istituti tecnici e professionali. Lo scopo di questo articolo è quello di contribuire nella ricerca di metodi migliori che favoriscano una reale *comprensione* dell'argomento, evitando *routine* prive di significato.

Desidero ringraziare la prof. Maria Giuditta Campedelli per la consulenza ed il confronto che ha favorito all'interno del Nucleo Ricerche Didattiche di Firenze nel periodo in cui ho svolto la sperimentazione metodologico-didattica, il prof. Vinicio Villani per i suoi spunti e suggerimenti, in particolare sul dibattito internazionale, la collega (e consorte) prof. Leila d'Angelo per la rilettura e correzione del manoscritto e le discussioni sulla didattica dell'analisi nell'istituto tecnico industriale, ed il referee per le giudiziose osservazioni di cui ho cercato di tener conto.

1. Uno sguardo d'insieme sull'insegnamento dell'analisi.

La didattica dell'analisi matematica nella scuola secondaria ha sedimentato delle consuetudini, almeno nel nostro paese, dovute soprattutto alla presenza di un modello, quello del liceo scientifico; a sua volta l'approccio didattico in questo tipo di scuola ha un ben preciso vincolo: lo scritto dell'esame di stato. Questo scritto è, al-

meno nei contenuti disciplinari, praticamente al livello di un primo anno di università. Vi è dunque, per chi prosegue gli studi scientifici in ambito universitario, una ripetizione del programma, che viene presentato col medesimo metodo generale, quello deduttivo, sia pur con differenti gradazioni di profondità. *Repetita juvant*? In questo caso pare proprio di no. Il riferimento precoce, nella scuola superiore, alla presentazione rigorosa, puramente deduttiva, avulsa da ogni contesto storico, degli argomenti di analisi sembra uccidere l'intuizione dei più, sembra salvare solo alcune punte di eccellenza (delle quali però si potrebbero ipotizzare risultati anche migliori se non fossero precocemente piegate verso il rigore svuotato dell'esperienza), e soprattutto, favorendo il meccanismo della memorizzazione meccanica, riempie la mente di pregiudizi e supponenza che creano resistenze verso l'approfondimento ulteriore. L'approccio quindi delineato per il liceo scientifico prepara per quelle facoltà nelle quali il programma (nominalmente lo stesso) viene sviluppato nello stesso modo, senza approfondimenti, controesempi o esperienze significative che rimettano in discussione i pregiudizi sedimentati; si tratta cioè di quelle facoltà universitarie scientifiche nelle quali l'esame di matematica ha valore strettamente strumentale (e che tuttavia abilitano all'insegnamento della matematica nelle scuole medie). Diverso è il discorso per i corsi di laurea di matematica, fisica, ed in parte anche ingegneria; gli ex studenti del liceo scientifico iscritti a questi corsi, infatti, per entrare nel cuore della disciplina, devono fare un preliminare lavoro di pulizia dai pregiudizi sedimentati, e di ripensamento complessivo dell'immagine mentale che si sono formati dell'analisi matematica. Ma lo scopo del presente lavoro non è quello di ipotizzare strade alternative per il liceo scientifico, che pure dovrebbero essere intraprese, quanto invece di mettere in evidenza quanto l'assurdità di questo approccio diviene enorme ed immotivata quando è applicato negli istituti tecnici e professionali; in queste scuole non si hanno gli strumenti, né per cogliere da tanto rigore qualche minimo appiglio per il senso di ciò che si fa, né per memorizzare forzatamente, come fanno molti studenti liceali, i quali spesso hanno forti motivazioni esterne (la famiglia *in primis*) verso lo studio quale che sia, indipendentemente dal reale interesse; l'assurdità è tanto maggiore se si pensa che non vi sono vincoli rigidi come lo scritto dell'esame di stato. Se allarghiamo l'orizzonte fuori dal nostro paese, assistiamo da più parti all'esigenza di rivedere lo stile d'insegnamento dell'analisi matematica. In Francia i nuovi programmi del 2000 sono ormai lontani dal formalismo esasperato tipico della moda *bourbakista* degli anni '70, ed anzi, tra le consegne, oltre a ciò che *si deve* fare, c'è molta attenzione anche a ciò che *non si deve* fare. Per esempio, nel programma di algebra ed analisi della classe *premiere* (corrispondente all'ultimo anno della nostra scuola superiore), si dice, per la derivata: "Per la sua introduzione, ci si accontenterà di un approccio intuitivo di limite finito in un punto. Ci si accosterà agli altri tipi di limite (limite infinito, limite all'infinito) sotto il punto di vista grafico e anche qui ci si rivolgerà ad una visione intuitiva." Vengono descritti poi i contenuti, le 'modalità di messa in opera', e i commenti, tra i quali leggiamo: "Non verrà data la definizione formale della nozione di limite. Il vocabolario e la notazione relativa ai limiti saranno introdotti con l'occasione di questo lavoro sulla nozione di derivata; ci si atterrà ad un approccio basato su esempi, e ad un'utilizzazione intuitiva."

Allarghiamo ancora l'orizzonte, uscendo dall'Europa, e troviamo la voce autorevole del prof. David Mumford, uno dei più importanti specialisti di geometria algebrica, della scuola di Harvard: "...abbiamo scienziati, ingegneri, economisti, e gente del mondo degli affari in una categoria - chiamiamola P (che sta per '*practical*'); e abbiamo la comunità dei matematici puri professionisti del ventesimo secolo in un'altra - chiamiamola T (che sta per '*theorem-loving*'). (...) Molte persone del gruppo P usano l'analisi. Un corso di analisi è spesso l'ultima interazione tra questi due mondi. Penso che circa il 99% dei nostri studenti in questi corsi non entreranno nella categoria T. Quindi l'analisi è la nostra grande occasione per parlare all'altro mondo, P. (...). Noi insegniamo l'analisi nella speranza che una piccola percentuale dei nostri studenti acquisirà il nostro amore per il rigore, oppure la insegniamo perché la maggior parte dei nostri studenti possa in futuro emergere grazie all'abilità di usare l'analisi nelle loro specialità?" ([M], pag.563). La testimonianza di questo articolo è interessante non tanto e non solo per ciò che Mumford argomenta in merito alla categoria P, largamente maggioritaria e assolutamente trascurata dall'approccio formalistico, ma anche per quello che racconta dell'esperienza personale di un autorevole membro della categoria T, se stesso: anch'egli, da giovane, ha avuto un primo approccio all'analisi matematica assolutamente informale, con un libro, di cui parla in termini entusiastici, di Lancelot Hogben, *Mathematics for the Million* (pressoché sconosciuto in Italia), che 'racconta' l'analisi in cinquanta pagine.

2. Ostacoli all'acquisizione del concetto di limite.

Dalla pratica didattica, prima che da considerazioni più generali, ci accorgiamo dell'esistenza di molti ostacoli all'acquisizione corretta del concetto di limite, o forse dovremmo dire all'uso corretto della definizione rigorosa e alla consapevolezza della necessità di questo tipo di definizione. Innanzitutto quelli che dovrebbero essere gli esempi chiarificatori, quelli grafici, hanno in sé una tale evidenza geometrica, da non motivare, anzi da demotivare l'accesso ad un formalismo pesante che pare eccessivo (e lo è rispetto a questi tipi di esempi!). C'è poi una difficoltà di struttura logica. Al primo anno di scuola superiore viene in genere svolto un modulo sulla logica, che ancora non trova generalmente una completa integrazione nel resto del programma di matematica; marginalmente si trattano i quantificatori universale ed esistenziale, ma dopo quattro anni, con la definizione di limite, occorre manipolare una frase che per la prima volta contiene ben tre di questi quantificatori: *per ogni* ε *esiste* un δ tale che *per ogni x...*, o meglio quattro, il primo essendo più celato: *esiste L* tale che *per ogni* ε *esiste* un δ tale che *per ogni*

x.... Oltre alle varie manipolazioni (le molte versioni coi limiti finiti ed infiniti) vi è la negazione (verificare quando il limite non è quello dato, o non esiste proprio...); la negazione di una frase con tre quantificatori (o addirittura quattro se il limite non esiste), se non tecnicamente preparata sul piano sintattico oltreché semantico, diventa un rompicapo. Andiamo oltre: l'idea, matura e raffinata, del rovesciamento *epsilon-delta*, rispetto ad una più immediata forma espositiva che assume come punto di partenza la variabile indipendente, non viene spontanea, così come non lo è stata per i matematici fino alla seconda metà dell'800, e deve quindi essere *previamente* sollecitata. Infine la staticità della definizione classica trova un ostacolo psicologico perfino nella notazione usata: $\lim_{x \to \ldots} \ldots$, notazione che tradisce una precedente (e implicitamente perdurante) concezione dinamica.

3. Brevi considerazioni di carattere storico.

Un concetto analogo a quello di limite era stato acquisito già dai greci, sia in forma intuitiva che rigorosa, come testimonia quanto ci è stato tramandato sul *metodo di esaustione*, attribuito ad Eudosso di Cnido (408?-355? a.C.). Dopo che il mondo scientifico ha "dimenticato", insieme alla gran parte della matematica greca, il metodo di esaustione, esso è stato riscoperto, interpretato e generalizzato col concetto di limite dell'analisi moderna, ma solo in forma intuitiva, intorno al 1600 (Newton, Leibniz). Una vera definizione di limite, il cui rigore fosse paragonabile a quello usato nel metodo di esaustione degli antichi greci, si è dovuta attendere fino al 1870, per opera di Weierstrass, grazie anche al contributo determinante di Cauchy. Grandi analisti quali Leibniz, Lagrange, Eulero e molti altri fino a Cauchy hanno studiato e prodotto risultati basilari dell'analisi senza essere giunti al già citato rovesciamento *epsilon/delta*. Ma allora che cosa ha spinto verso il rigore? Spesso vogliamo dare agli

studenti un senso estetico del rigore, facendo loro credere, più di quanto non risponda al vero, che i matematici ricercano una definizione rigorosa perché altrimenti non fanno matematica; ma la matematica è grande, mettere ordine dappertutto è pressoché impossibile; e le discipline di frontiera non si spingono verso il rigore, se non con forti motivazioni, spesso anche di carattere operativo, più o meno esplicitate. E' questo il caso anche della definizione di limite data da Weierstrass: qualche decennio prima, ad opera soprattutto di Cauchy, vi è stato un impressionante sviluppo dell'*analisi complessa*, ossia l'analisi delle funzioni definite e a valori nel campo dei numeri complessi. Ma i numeri complessi possono essere rappresentati su un piano, il *piano di Gauss-Argand*; dunque il grafico di una funzione di variabile complessa "vive" in uno spazio a quattro dimensioni, impossibile da rappresentare; ecco che, proprio per la mancanza del supporto geometrico, si è dovuti ricorrere ad una definizione talmente astratta e generale. Ho voluto sottolineare questa mancanza del supporto geometrico ripensando quanto sia fallace, in quest'ottica, usare un supporto geometrico elementare e non adeguato per spiegare la definizione di limite. Infine, la definizione statica di Weierstrass, elegante e pregevole, ha avuto un effetto perverso: essa ha bandito dalla matematica ufficiale i concetti di infinitesimi ed infiniti attuali, largamente utilizzati da Leibniz, mentre essi hanno continuato a sopravvivere nei trattati di fisica, creando grosso imbarazzo verso la fisica da parte di molte persone con formazione matematica. Questa chiusura è stata in parte corretta dall'*Analisi Non Standard* di Robinson, assai recente (1960) e poco diffusa.

Vorrei presentare un esempio concreto e a mio avviso sconcertante di come la trattazione rigorosa dell'analisi abbia stravolto l'esposizione dei teoremi, rispetto alla forma originale; si tratta del *teorema di Rolle*:

Forma attuale: Sia $f(x)$ una funzione definita su un intervallo chiuso $[a;b]$ della retta reale e derivabile sull'intervallo aperto $(a;b)$, se $f(a)=f(b)$, allora esiste $c\in(a;b)$ tale che $f'(c)=0$.

E' un classico teorema di esistenza, elegante, non costruttivo; esso deriva da:

Originale: *(da "Traité d'algebre"- 1690)* "...un metodo per risolvere le equazioni con una sola incognita .... si moltiplica ogni termine per il proprio esponente, si divide tutto per x, e si uguaglia a zero, e così via, finché non si ottiene un'equazione lineare...".

E' un metodo costruttivo per risolvere in modo approssimato tutte le equazioni polinomiali; si può riconoscere nella regola di moltiplicare ogni termine per il proprio esponente e dividere per x l'istruzione pratica per derivare il polinomio, nell'uguagliare a zero la ricerca di punti stazionari, prima del polinomio, poi della sua derivata, e così via. Alla base del metodo sta la considerazione che affinché esistano due zeri della funzione, occorre che la derivata si annulli almeno una volta tra di essi. In questa considerazione sta il filo sottile che lega la formulazione originale a quella moderna (l'esempio è stato tratto da [Me], pag. 912).

4. La proposta didattica.

Le considerazioni che seguono si basano su un'esperienza concreta, sviluppatasi per quattro anni nella quarta classe di un istituto tecnico per geometri; si tratta di un corso che potremmo definire di "analisi zero", propedeutico a quello universitario di "analisi 1".

Il corso si articola nei seguenti temi:

(a) disequazioni
(b) studio qualitativo di funzioni razionali
(c) calcolo differenziale (alla Leibniz) e integrale
(d) alcuni argomenti scelti
(e) la formalizzazione del concetto di limite.

Nella trattazione di questi temi, si tiene d'occhio l'obiettivo principale di fondo, che è quello di arricchire l'esperienza su questioni che sfociano tutte in modo convergente verso il concetto di limite. Occorre quindi ripensare tutte le consuetudini didattiche e chiederci se certe tecniche specifiche per il compito assegnato (ad es. risolvere una disequazione) concludono la loro funzione, diciamo così, formativa, con la soluzione degli esercizi, oppure se esistono altri modi più ricchi sia di significati specifici che di collegamenti col contesto. Bisogna poi operare una scelta sulla varietà delle funzioni da analizzare. Ritengo che per un corso di analisi zero avere una padronanza delle caratteristiche delle funzioni razionali, confinando quelle irrazionali, trascendenti e periodiche ai soli casi notevoli, non sia riduttivo, ma onesto, e non sempre questo obiettivo minimo viene raggiunto quando il "taglio" viene operato a posteriori, come spesso succede valutando i risultati negativi di obiettivi più ambiziosi. Vediamo in dettaglio i singoli temi.

(a) disequazioni.

Le tecniche consuete di soluzione delle disequazioni sono molto specifiche; inoltre sono inutili in situazioni diverse; sono talmente specifiche da non dare un quadro unitario neanche di questo singolo argomento; si pensi ad esempio alla immotivata separazione tra disequazioni intere e frazionarie, che non permette agli studenti di riflettere su un fatto che già conoscono, ciè che ai fini dello studio del segno, è indifferente trattare un prodotto o un quoziente. L'unico vantaggio di utilizzare una tecnica talmente poco generale dovrebbe essere quella della chiarezza e facilità di comprensione e d'uso; ma un minimo di esperienza d'insegnamento ci dice il contrario. Soprattutto disorienta gli studenti quello studio del segno dei fattori ("...pongo questo maggiore di zero...") indipendentemente dal fatto che nel testo della disequazione compaia la condizione di essere maggiore o minore di zero; essi tendono a confondere i ruoli della variabile indipendente (diciamo x) e quella dipendente (l'espressione, che possiamo chiamare y, che viene posta maggiore o minore di zero). Inoltre non distinguono le espressioni dichiarative (dico che questo è maggiore di zero) da quelle ipotetiche (vedo se e quando questo è maggiore di zero, il che è equivalente a vedere, per esclusione, quando questo è minore di zero; in pratica ne studio il segno). Ostacoli superabili, è vero, e superati da una parte degli studenti; ma a quale scopo e con quanto sforzo? Se è solo per risolvere delle disequazioni mi sembra poco. Una tecnica ricca di spunti più generali è quella di cominciare con lo studio qualitativo delle funzioni polinomiali. Questo studio consente non solo di risolvere tutte le disequazioni intere e fratte risolubili col metodo consueto, ma fornisce il primo esempio di grafico di una funzione; inoltre introduce i concetti di continuità e di limite in casi facilmente comprensibili e controllabili dalla grande generalità degli studenti. Le caratteristiche di una funzione polinomiale sono: l'essere ovunque definita, continua, divergente per $x \to \pm\infty$ in modo dipendente solo dal grado e dal segno del coefficiente direttore, avere un numero di zeri (intersezioni con l'asse delle ascisse) minore o uguale al grado. Infine, se il numero degli zeri, contati con molteplicità, è uguale al grado, allora *è possibile tracciarne un grafico qualitativo.* Al fine specifico della risoluzione di disequazioni è importante notare che ogni testo di esercizio risolubile col metodo consueto, portato alla forma canonica, dopo l'eventuale eliminazione di fattori di segno costante, dà luogo proprio a quest'ultimo tipo di polinomi. Il caso più elementare è quello dei polinomi con zeri semplici; è interessante vedere come ogni volta che l'asse delle ascisse viene toccato dal grafico, esso viene anche attraversato e si ha un cambio di segno. Per il calcolo dei limiti per $x \to \pm\infty$ basta riscrivere il polinomio scomposto in fattori (necessariamente lineari in questo caso) e osservare come definitivamente i segni di questi fattori siano tutti positivi o tutti negativi, diventando ininfluente l'apporto dei termini noti; basta poi applicare la regola dei segni (qui supponiamo, per fissare le idee, che il coefficiente direttore sia positivo). Questi limiti servono per impostare il grafico qualitativo all'esterno della zona degli attraversamenti con l'asse delle ascisse, e quindi per interpretare correttamente (e verificare dall'espressione analitica) i cambi di segno. "Avvicinando" progressivamente alcuni di questi punti d'intersezione, prima a coppie, poi a terne, e così via, giungiamo al concetto di zeri multipli, e vediamo come essi diano luogo a fenomeni di tangenza; senza attraversamento (massimi o minimi relativi) nel caso di molteplicità pari, con attraversamento (flessi) nel caso di molteplicità dispari. Vediamo come con queste attività semplici da un punto di vista tecnico si tocchino molti importanti capitoli dell'analisi, ovviamente in modo intuitivo, ma necessario per una propedeuticità efficace.

(b) Studio qualitativo di funzioni razionali.

Lo studio, ancora a livello elementare ed intuitivo, delle funzioni razionali del tipo $y=\frac{f(x)}{g(x)}$, con $f(x)$ e $g(x)$ polinomi, riveste un certo interesse; innanzitutto perché amplia la varietà dei grafici introducendo gli asintoti verticali ed obliqui (da cui anche la generalizzazione delle funzioni polinomiali asintotiche), ma non solo; come vedremo, è possibile utilizzare una tecnica di calcolo, quella della divisione di polinomi, che dà simultaneamente tutte le informazioni sugli asintoti orizzontali od obliqui, e ancora, l'uso di questa semplice tecnica, che in genere viene appresa nel primo biennio della scuola media superiore, va al di là della soluzione del singolo esercizio, e fornisce gli strumenti per congetturare se esistono grafici che hanno certe caratteristiche assegnate. I limiti, sia per $x \to \pm\infty$, sia in prossimità degli asintoti verticali, sono ancora trattabili in modo intuitivo e geometrico, ed infine il bagaglio di informazioni sulla curva-grafico sono sovrabbondanti, così da consentire controlli di compatibilità.

Vediamo in dettaglio. Per lo studio del segno, basta risolvere la disequazione $f(x)\cdot g(x)>0$, cioè, come già detto nel paragrafo precedente, studiare il segno della funzione polinomiale $y=f(x)\cdot g(x)$, o di quella ottenuta cancellando, a secondo membro, fattori di segno costante (così da ottenere un polinomio con un numero di zeri, contati con molteplicità, uguali al grado). I limiti in prossimità degli eventuali asintoti verticali sono facilmente calcolabili: basta combinare le due informazioni della divergenza e del segno. Sulla divergenza, a livello intuitivo, si può usare un'immagine "fisica" della frazione "impossibi-

le", $\frac{1}{0}$: basta pensarla come una velocità $v=\frac{spazio}{tempo}$; un razzo, per esempio, che percorre 1 km in 0 secondi... è molto veloce, troppo veloce; ha velocità infinita.

Per definire meglio le caratteristiche del grafico appena abbozzato, effettuiamo la divisione $f(x):g(x)$, ottenendo un quoziente $q(x)$ e un resto $r(x)$, di grado minore di quello del divisore. Ne segue che la frazione $\frac{f(x)}{g(x)}$ può essere riscritta come $q(x)+\frac{r(x)}{g(x)}$, cioè una "parte principale" polinomiale, ed un "resto infinitesimo" per $x\to\pm\infty$; ne segue che *q(x)* è una funzione polinomiale asintotica, e questo generalizza il concetto di asintoto obliquo, e lo mette in relazione con quello di asintoto orizzontale (sono i casi particolari in cui il grado di $q(x)$ è 1 o 0 rispettivamente). E' immediato verificare che l'esistenza di eventuali intersezioni con la funzione polinomiale asintotica è data dalle soluzioni dell'equazione $r(x)=0$ (basta impostare il sistema e risolverlo). Questo, come preannunciato, non solo serve a risolvere singoli esercizi, ma fornisce gli strumenti per formulare semplici congetture, e dimostrarle. Per esempio: se il denominatore $g(x)$ della frazione algebrica che esprime la funzione razionale ha grado *n*, allora il numero delle possibili intersezioni con le funzioni polinomiali asintotiche è al più *n-1* (perché questo è il grado massimo del polinomio *r(x)*).

Il grafico qualitativo è così determinato, compaiono per necessità punti di massimo e minimo relativi, dei quali non siamo ancora in grado di determinare le coordinate; verrà fatto successivamente, con lo studio (sempre a livello intuitivo) delle derivate. Ma ci si può spingere un po' oltre, con la seguente proposta: *Qual è il grafico (qualitativo) che esprime la variazione dei* *coefficienti angolari delle rette tangenti a questo grafico, supponendo che in ogni punto dell'insieme di definizione la tangente esista e sia unica?* Dal "grafico delle tangenti" emergono tutte le più importanti proprietà della derivata, prima ancora che se ne parli esplicitamente: l'asintoto obliquo $y = mx + q$ dà luogo ad un asintoto orizzontale $y = m$; l'asintoto orizzontale dà luogo ad un altro asintoto orizzontale, coincidente sempre con l'asse x; i punti di massimo e minimo relativo danno luogo ad intersezioni con l'asse x; il "grafico delle tangenti" di $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ è lo stesso di $y = \dfrac{f(x)}{g(x)} + k$, per ogni costante reale k.

(c) Introduzione al calcolo differenziale (alla Leibniz).

Diamo nuovamente uno sguardo alla storia. C'è un capitolo della matematica che si è chiuso molto presto, forse per esigenze di rigore. Si tratta di certe grandezze che si comportano in modo 'strano' rispetto alla relazione d'ordine tra numeri reali (intesi come misure di queste grandezze rispetto ad una fissata unità). Vediamo la definizione di angolo data da Euclide:

Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee su un piano, le quali si incontrino fra loro e non giacciano in linea retta.

Quando le linee che comprendono l'angolo sono rette, l'angolo si chiama rettilineo. ([E], definizioni I-8 e I-9).

Come vediamo, Euclide considera (con maggiore generalità rispetto all'attuale definizione) angoli con lati curvilinei, e considera quelli coi lati rettilinei come un caso particolare; per inciso, non ammette gli angoli piatti. Gli angoli curvilinei erano ammessi ed utilizzati nella geometria pre-euclidea; Aristotele, nei Primi Analitici, li usa per dimostrare che gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali. Euclide, dopo averli ammessi, li usa una sola volta, nella prop. III 16 degli Elementi, quindi li abbandona, anzi, con la definizione. V 4 (sempre degli Elementi), toglie ad essi l'ammissibilità come grandezze che possono avere rapporto, e quindi che possono essere misurate. Euclide afferma infatti che *le grandezze aventi rapporto sono quelle che possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente*; si tratta di una formulazione di quello che oggi viene chiamato il *postulato di Eudosso-Archimede*, che caratterizza, appunto, le *grandezze archimedee*. Ma il mondo delle grandezze non archimedee esiste ed è visibile; l'analisi matematica, pur nella sua forma più elementare ed intuitiva, ce lo ha già messo sotto gli occhi. Qual è infatti la distanza tra un grafico ed un suo asintoto verticale? E qual è la misura dell'angolo curvilineo formato, ad esempio, da una parabola e da una sua tangente? Questi sono esempi di *segmenti* ed *angoli non archimedei*, se rapportati a segmenti finiti ed angoli rettilinei. Non è possibile, con questi rapporti, ottenere un ben definito numero reale che ne rappresenta la misura; dovrebbe esistere un numero reale positivo minore di qualsiasi altro numero reale, ma non nullo. Quelli che stiamo trattando sono modelli geometrici di *infinitesimi attuali*. Se all'insieme dei numeri reali positivi "aggiungiamo" dei numeri "più piccoli di ogni altro numero reale, ma diversi da zero" (*infinitesimi*) ed altri "più grandi di ogni altro numero reale" (*infiniti*) otteniamo un'estensione dell'insieme dei numeri reali, l'insieme dei *reali non standard*, così come è stato definito e sistematizzato da Robinson; egli, usando questo nuovo insieme, ha sviluppato la cosiddetta *Analisi Non Standard* ([R]). Parlare delle possibilità didattiche di una trattazione Non Standard dell'analisi nella scuola secondaria esula dallo scopo di questo lavoro, nel quale mi limito ad affermare che l'uso degli infinitesimi attuali (in particolare, dei differenziali) non è solo un espediente didattico privo di senso dal punto di vista teorico, ma una precisa strategia che potrebbe essere formalizzata; per approfondire l'argomento, segnalo i Quaderni di Lavoro N.13 e N. 14

del Centro Ugo Morin (Analisi Non-Standard, Parte I e Parte II).

L'idea principale, intorno a cui si sviluppa il calcolo differenziale, è allora quella di passare dalla variazione *finita* Δx della grandezza variabile x, a quella *infinitesima* dx, detta anche *differenziale* di x, non archimedea rispetto alle grandezze finite. Dal calcolo elementare della variazione finita della somma e del prodotto di due grandezze a e b, visualizzabili con il semiperimetro e con l'area di un rettangolo di dimensioni a e b, cioè $\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b$ e $\Delta(a \cdot b) = a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a + \Delta a \cdot \Delta b$, si giunge alle ben note regole di differenziazione

(i) $d(a+b) = da + db$ e
(ii) $d(ab) = adb + bda$,

dove il prodotto $da \cdot db$, infinitesimo di ordine superiore rispetto ai differenziali da e db, viene trascurato. Queste due regole, insieme a quella ovvia che afferma che il differenziale di una grandezza costante è zero, si possono *differenziare tutte le grandezze che esprimono relazioni di tipo algebrico*, come entusiasticamente espone Leibniz in "*Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus quae nec fractas nec irrationales qualitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*" (Acta Eruditorum, Lipsia, ottobre 1684). L'esercizio di calcolare i differenziali di una potenza, con esponente intero o frazionario, e del quoziente, usando solo le tre regole del differenziale della costante, della somma e del prodotto, può essere fatto in classe, è come un gioco.

Vediamo qualche esempio esplicito.

(I) <u>Potenza con esponente intero.</u>

Dalla (ii) si ricava che

$$d(x^2) = d(x \cdot x) = x \cdot dx + x \cdot dx = 2xdx;$$
$$d(x^3) = d(x^2 \cdot x) = x^2 dx + x \cdot d(x^2) =$$
$$= x^2 dx + x \cdot 2xdx = 3x^2 dx;$$
$$\dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots \quad \dots\dots$$
$$d(x^n) = d(x^{n-1} \cdot x) = x^{n-1} dx + xd(x^{n-1}) = \dots\dots = nx^{n-1} dx;$$

applicando un'induzione più o meno esplicita.

(II) <u>Potenza con esponente frazionario.</u>

Sia $y = x^{\frac{m}{n}}$; allora $y^n = x^m$; differenziando ambo i membri si ha: $ny^{n-1} dy = mx^{m-1} dx$; sostituendo $x^{\frac{m}{n}}$ a y ed esplicitando dy si ottiene:

$$dy = \frac{mx^{m-1} dx}{ny^{n-1}} = \frac{mx^{m-1}}{n\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{n-1}} dx = \frac{m}{n} x^{m-1-\frac{m}{n}(n-1)} dx =$$
$$= \frac{m}{n} x^{\frac{mn-n-mn+m}{n}} dx = \frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} dx = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} dx$$

(III) Quoziente.

Sia $y = \frac{a}{b}$; allora $by = a$; differenziando membro a membro si ottiene: $bdy + ydb = da$; sostituendo $\frac{a}{b}$ a y ed esplicitando dy si ha:

$$dy = \frac{da - ydb}{b} = \frac{da - \frac{a}{b}db}{b} = \frac{\frac{bda - adb}{b}}{b} = \frac{bda - adb}{b^2}.$$

Il calcolo è formale, e non necessita di particolari discussioni di casi particolari (che possono essere esplicitate nei singoli esercizi). Anche qui, l'apparente abbattimento del rigore (differenziare senza passaggi al limite, senza controlli sulla continuità, ecc.) è confortato dall'approccio ai differenziali utilizzato in algebra, geometria algebrica e teoria dei numeri; esso è basato proprio sulle tre regole del Leibniz, e staccandosi dall'ambito tradizionale dell'analisi classica, è stato suscettibile di generalizzazioni inimmaginabili, applicandosi ad insiemi molto diversi dai numeri reali, i quali tuttavia hanno una struttura algebrica compatibile con una opportuna struttura topologica; si veda ad es. [W1].

Una relazione algebrica tra due o più variabili differenziabili, passando ai differenziali, si traduce in una relazione *lineare* ed *omogenea* rispetto ai differenziali (del primo ordine). Possiamo definire la *derivata* di una variabile rispetto ad un'altra variabile come il *rapporto dei rispettivi differenziali*, esattamente come viene fatto nei corsi di fisica. Se le variabili in gioco sono esattamente due, questa derivata si può scrivere come espressione finita delle due variabili; in particolare, se y è funzione di x, allora l'espressione della derivata $\frac{dy}{dx}$ dipende solo da

x, e prende il nome di *funzione derivata* della y. Ovviamente $\frac{dy}{dx}$ è la versione infinitesimale di $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, da cui l'immediata interpretazione geometrica della derivata come coefficiente angolare di una retta secante al grafico passante per due suoi punti infinitamente vicini, cioè, in definitiva, di una retta tangente.

Nel calcolo integrale, introdotto come area con segno, l'uso degli infinitesimi attuali rende molto evidente il *teorema fondamentale del calcolo integrale*: sia $f(x)$ una funzione non negativa definita in un certo intervallo; chiamiamo $A(x)$ l'area compresa tra il grafico della funzione e l'asse x, da un punto iniziale arbitrario (ma supposto fissato) x_0 a un punto x. Quest'area è formata da tanti rettangoli con base infinitesima dx e altezza finita $f(x)$; ognuno di tali rettangoli, di area $f(x)\cdot dx$, rappresenta la variazione infinitesima dA della funzione area $A(x)$, dunque, dall'uguaglianza $dA = f(x)\cdot dx$, dividendo ambo i membri per il differenziale di x, si ottiene $\frac{dA}{dx} = f(x)$, cioè proprio il teorema fondamentale del calcolo integrale.

E' molto naturale, in quest'ottica, non solo comprendere, ma addirittura pervenire alla formula del volume del solido generato dalla rotazione intorno all'asse x dal sottografico di una funzione positiva $f(x)$, tra due estremi fissati a e b. Basta "sommare", per tutte le x comprese tra a e b, le aree delle sezioni circolari di raggio $f(x)$, che evidentemente misurano $\pi\cdot\left[f(x)^2\right]$; la "somma" è l'integrale definito $\pi\int_a^b [f(x)]^2\cdot dx$.

(a) Alcuni argomenti scelti.

Ritengo opportuno arricchire quest'esperienza con la scelta di taluni argomenti, di per sé notevoli, che possono essere affrontati in un modo che ben si presta all'impostazione fin qui scelta. Vediamo in particolare:

(i) il numero e
(ii) la quadratura dell'iperbole
(iii) il metodo meccanico di Archimede per il calcolo di aree e volumi
(iv) il teorema di Guldino.

(i) Il probabilista Bruno De Finetti, in un bell'articolo ([D]), mostra, "usando la mano sinistra", come egli stesso afferma, vari modi per introdurre certi numeri notevoli della matematica, tra cui $e=2,718281...$. Un capitale (che per semplicità supponiamo unitario) viene investito in modo da raddoppiare in un certo periodo di tempo T. Si suppone di avere due conti, uno fruttifero, in cui è depositato il capitale, ed uno infruttifero, nel quale vengono versati periodicamente gli interessi. Si suppone di poter prelevare prima del termine, ad esempio a metà periodo, gli interessi dal conto infruttifero per versarli su quello fruttifero in cui è depositato il capitale, in modo da poter avere gli interessi anche sugli interessi maturati; invece di un montante uguale a 2, ne avremo uno un po' più alto: $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$; se invece di dividere T in 2 sottoperiodi uguali lo dividiamo in n sottoperiodi (trasferendo più volte gli interessi dal conto infruttifero a quello fruttifero), otterremo un montante ancora più alto: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Con questa interpretazione risulta del tutto

evidente, senza inutili tecnicismi, che la successione è crescente: più volte trasferisco gli interessi dal conto infruttifero a quello fruttifero, maggiore sarà il montante. Il limite di questa successione sarà la situazione ideale di un "travaso continuo" degli interessi. Questo può far sorgere l'idea di ottenere un montante sempre più grande...; ma un'altra considerazione ci fa capire che la successione è limitata: se tutti gli interessi maturati alla fine del periodo T vengono corrisposti e versati sul conto fruttifero all'istante iniziale dell'investimento, si otterrà un montante necessariamente maggiore di quello ottenuto col travaso continuo, che non fa altro che trasferire interessi parziali ad istanti differiti; così ci rendiamo conto che il montante non può arrivare neanche a quadruplicare il capitale iniziale (con un ragionamento ancora più fine, ma non necessario, si intuisce che in realtà il capitale non può neanche triplicare). Conclusione: la successione è crescente e limitata, dunque (sempre su un piano intuitivo, che può essere formalizzato nei corsi successivi) ammette limite finito, che chiamiamo e, e che possiamo valutare con una calcolatrice assegnando valori alti ad n.

(ii) Ora che il numero e è noto, possiamo affrontare il problema della quadratura dell'iperbole, che emerge naturalmente integrando le funzioni monomiali $y=x^{\alpha}$ con esponenti α qualsiasi; ci si imbatte infatti nella singolarità del caso $\alpha=-1$; come sappiamo, una sua primitiva è il logaritmo naturale del modulo di x; si entra nel campo delle funzioni trascendenti, che non sono da escludere a priori nella trattazione; il criterio di scelta iniziale non era quello di un'esclusione forzata, quanto il rifiuto di una trattazione per elencazione sistematica e decontestualizzata. Con l'integrale di x^{-1}, viene *motivata* la ne-

cessità di uscire dal campo delle relazioni algebriche, esattamente come in altri contesti viene motivata l'introduzione di estensioni degli ambienti numerici con l'impossibilità di seguire certe operazioni. Osserviamo preliminarmente che mentre la misura infinitesima indotta dal differenziale dx è invariante per *traslazioni* ($d(x+a)=dx$), il differenziale $dy=\frac{dx}{x}$ fornisce una misura infinitesima invariante per *omotetie* $\left(day=\frac{dax}{ax}=\frac{dx}{x}=dy\right)$ sui numeri reali positivi. Dunque, posto $F(x)=\int_1^x \frac{dt}{t}$, si ha che

$$F(ab)=\int_1^{ab}\frac{dt}{t}=\int_1^{a}\frac{dt}{t}+\int_a^{ab}\frac{dt}{t}=\int_1^{a}\frac{dt}{t}+\int_1^{b}\frac{dt}{t}=$$
$$=F(a)+F(b),$$

cioè F trasforma prodotti in somme; l'unica funzione reale di variabile reale che agisce in tal modo è il logaritmo: $F(x)=\log_b x$, per una base opportuna b da determinare; essa è soluzione dell'equazione $\int_1^b \frac{dt}{t}=1$. Per n grande $\int_1^{1+\frac{1}{n}}\frac{dt}{t}\approx\frac{1}{n}$; usando l'invarianza per omotetia si ha:

$$1=n\cdot\frac{1}{n}\approx n\cdot\int_1^{1+\frac{1}{n}}\frac{dt}{t}=\int_1^{1+\frac{1}{n}}\frac{dt}{t}+\int_{1+\frac{1}{n}}^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\frac{dt}{t}+$$
$$+\ldots+\int_{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}}^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\frac{dt}{t}=\int_1^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\frac{dt}{t};$$

ne segue che $b\approx\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, con un'approssimazione tanto migliore quanto più n è grande; o, in altri termini $b=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

(iii) Archimede possedeva un metodo per il calcolo delle aree e volumi basato sulla meccanica; e' un metodo attualmente poco conosciuto ma a mio avviso molto adeguato e fruibile da parte degli studenti. Secondo questo metodo le figure di cui si vuol calcolare l'area sono immaginate pesanti, di materiale omogeneo; si opera sulle loro sezioni, precorrendo di quasi duemila anni l'intuizione di Cavalieri. Il metodo è basato sull'equazione dei momenti, cioè sull'uguaglianza, per due corpi in equilibrio su una leva, del prodotto tra peso dell'oggetto e distanza dal fulcro. Immaginiamo di voler calcolare il volume di un solido, e che i baricentri delle sue sezioni (scelte opportunamente) siano tutti allineati su una stessa retta; immaginiamo poi che questa retta rappresenti una leva meccanica, con un fulcro posto all'esterno della figura, (oggi lo potremmo vedere rappresentato dall'origine di una retta orientata e graduata, pensata come un asse cartesiano). Se la misura della sezione (area o lunghezza che sia) è multipla della distanza, si interpreta questa misura in due modi, usando l'equazione dei momenti: il momento della sezione esaminata posta a distanza unitaria dal fulcro, oppure il momento di una sezione (di un solido incognito) posta alla distanza vera dal fulcro. Materialmente si può pensare di bilanciare queste due sezioni sulla leva. Facendo scorrere le sezioni delle due figure, è sempre possibile mantenere l'equilibrio, con l'accorgimento di fissare tutte le sezioni del solido di cui si cerca il volume a distanza unitaria dal fulcro (è come se il volume fosse schiacciato su un'area;

poco importa, una volta che abbiamo interpretato il volume come peso; peso che in fisica si può pensare concentrato addirittura in un punto, il baricentro). Naturalmente le sezioni di contrappeso dall'altra parte del fulcro variano la loro distanza dal fulcro generando un solido, di cui supponiamo di poter calcolare volume e baricentro. "Sommando" le equazioni dei momenti delle singole sezioni sui due bracci della leva (e quindi, diremmo oggi, integrando) si ottiene l'equazione del momento totale: volume per distanza dal baricentro della figura contrappeso, estesa, di valori entrambi noti, a primo membro; peso, e quindi volume, del solido cercato a secondo membro, risolvendo così il problema. Infatti, a secondo membro, il baricentro, per costruzione, si trova a distanza 1 dal fulcro (perché tale è la distanza a cui abbiamo vincolato i baricentri di tutte le sezioni). Vi è una difficoltà intrinseca nel cercare di comunicare il funzionamento generale del metodo, perché necessita di un'intuizione che si acquisisce solo riflettendo sugli esempi concreti. Per questo suggerisco di leggere la presentazione ed i dettagli del Metodo Meccanico che si trovano nella traduzione delle opere di Archimede [A]; sono tanti, oltre al metodo meccanico, gli spunti di interesse didattico di questo volume; in [B] si può trovare una trasposizione didattica del metodo. Vorrei sottolineare come parlando con questo linguaggio abbondino le parole "vedere", "immaginare", "pensare"; le figure astratte, invece di essere associate ad attributi e descrizioni tecniche asettiche e non coinvolgenti, vengono prima materializzate, e poi scoperte nei loro dettagli per mezzo di eventi.

(iv) Il teorema di Guldino afferma che il volume generato dalla rotazione di una superficie piana, di cui è nota l'area, intorno a un asse esterno, è uguale all'area della figura piana generatrice moltiplicata per la distanza dal baricentro all'asse di rotazione. Non credo di esagerare se affermo che l'elasticità mentale che si acquisisce col metodo meccanico di Archimede è tale da rendere intuibile e perfettamente prevedibile il teorema di Guldino. Esso permette di calcolare facilmente il volume del toro; inoltre, quando si conosca per altre vie (in genere con le simmetrie della figura) il volume di un solido di rotazione, si individua la posizione del baricentro delle sue sezioni.

(e) La formalizzazione del concetto di limite.

La formalizzazione del concetto di limite, verso il temine del corso è auspicabile, ora che viene inserita in un contesto ridimensionato che le è proprio, e che, a questo punto dell'esperienza, non le deve però essere espropriato: al termine di un'attività di scoperta, di esperimenti, di prove, di congetture, c'è la formalizzazione, coi suoi aspetti affascinanti (il senso di oggettività delle argomentazioni logiche) e quelli duri da accettare (l'inaridimento, la sensazione di perdita della consistenza affettiva verso ciò che si sta facendo, il distacco). Come diceva André Weil, il grande teorico dei numeri "*...on atteint à la connaissance et a l'indifférence en même temps. La métaphysique est devenue mathématique, prête à former la matière d'un traité dont la beauté froide ne saurait plus nous émouvoir.*" ([W2], pag. 408). Vivere consapevolmente questi sentimenti verso la matematica consente di capirla a fondo, di entrare nella sua atmosfera culturale, di percepire che è fatta e vissuta in tanti modi, da personalità opposte tra loro, che non esiste il *cliché* del matematico: c'è quello creativo e disordinato, c'è quello maniaco dell'ordine, il freddo e il passionale, e ogni studente dovrebbe accostarsi nel modo che più gli è consono; senza snobismi e chiusure, che invece si trovano in quegli adulti, spesso affermati professionalmente, che si vantano di non aver capito nulla di matematica, scienza evidentemente inutile nella vita; ma questo fa parte di un equilibrio della persona che dovrebbe essere un obiettivo educativo della scuola nel suo complesso. Questa premessa serve per arrivare a dire che non tutti giungeranno a comprendere la formalizzazione del concetto di limite, e non bisognerebbe farne un dramma, in questo corso di analisi zero (ritorno alle considerazioni, quelle di Mumford in particolare, fatte nell'introduzione); sarebbe un atteggiamento ipocrita che non tiene conto del diffuso insuccesso di chi ne vuol fare un punto fermo. Essa è un gioco, un gioco quasi capzioso, e nello stesso tempo il frutto di una grande sintesi della mente umana. E' però possibile far rilevare, con opportuni quesiti 'provocatori', che spesso, anche nella futura attività professionale, un committente potrà non accontentarsi di frasi del tipo "Nella realtà due più due non fa quattro; comunque, vedrai che se gli errori di approssimazione sono piccoli, il risultato sarà accettabile"; potrebbe essere necessario *rovesciare* le premesse e le conseguenze, fissando a priori il grado di precisione del *risultato*: "Dato il massimo errore consentito del risultato, posso permettermi una tolleranza massima dei dati pari a...". Dopo queste motivazioni, e le definizioni di intorni al finito e all'infinito, è interessante vedere come la classe, a gruppi, costruisce un *'puzzle linguistico'* utilizzando l'insieme di simboli $\{\exists, \forall, x, f(x), x_0, L, U(x_0), V(L), \Rightarrow, \in, \neq\}$, con eventuali ripetizioni. Con questi simboli noti si chiede di dare un significato all'espressione $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$; essa infatti contiene a sua volta simboli $\{\lim, \to\}$ mai definiti rigorosamente. Qui termina, a mio avviso, il corso di analisi zero e inizia, senza soluzione di continuità, quello di analisi 1.

BIBLIOGRAFIA

[A] Archimede, *Metodo sui teoremi meccanici, ad Eratostene*, su "Opere di Archimede", UTET, Torino, 1988.

[B] M. Berni, *Calcolo di aree e volumi con l'idea "baricentrica" di Archimede,* su "Archimede, n. 1, 2000.

[D] B. De Finetti, *Tre personaggi della matematica: e, π, i,* su "Numeri, caso e frequenze", Quaderni de Le Scienze n.45, dic. 1988.

[E] Euclide, *Gli Elementi*, UTET, Torino, 1988.

[M] D. Mumford, *Calculus Reform - For the Millions*, Notices of the A.M.S., May 1997.

[Me] M. Menghini, *Problematiche didattiche attuali e sviluppo storico dell'Analisi Matematica,* L'Insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 14 n.10, ottobre 1991.

[R] A. Robinson, *Non Standard Analysis*, North Holland Publ., 1966.

[W1] A. Weil, *Differentiation in algebraic number fields*, in: Collected Papers, vol. I, Springer, New York, 1980.

[W2] A. Weil, *De la métaphisique aux mathématiques*, in: Collected Papers, vol. II, Springer, New York, 1980.