

# Matematica Elementare

Da un punto di vista superiore

(pag. 162-165)

## Le funzioni Goniometriche

Lasciatemi dire, prima di iniziare, che il nome “funzioni goniometriche” sembra preferibile al consueto nome “funzioni trigonometriche”, dal momento che la trigonometria non è altro se non una particolare applicazione di queste funzioni, che sono di grandissima importanza per tutta la matematica. Le loro funzioni inverse sono analoghe al logaritmo, mentre esse stesso sono analoghe alla funzione esponenziale. Dovremmo chiamare queste funzioni inverse come “funzioni ciclometriche”.

### 1. La teoria delle funzioni goniometriche

Come punto di partenza per le nostre considerazioni teoriche lasciami suggerire la questione come il modo più appropriato di introdurre le funzioni goniometriche nella scuola. Penso che qui sarebbe meglio fare uso del nostro principio generale di quadratura. La procedura consueta, che inizia con la misurazione dell'arco circolare, non mi sembra essere così ovvia, e manca, soprattutto, del vantaggio di permettersi un controllo semplice e coerente di entrambi i campi elementare e avanzato.

Di nuovo, vorrei fare immediato uso della geometria analitica. Iniziamo con la circonferenza unitaria:

$$x^2 + y^2 = 1$$

e consideriamo il settore formato dal raggio nei punti  $A=(1,0)$  e  $P=(x,y)$ . Per essere in accordo con la notazione usuale, denoterò l'area di questo settore con  $\varphi/2$ . (Quindi l'arco nella consueta notazione sarà denotato con  $\varphi$ ).

Definisco le funzioni goniometriche seno e coseno di  $\varphi$  come le lunghezze delle coordinate  $x$  e  $y$  del punto limite  $P=(x,y)$  del settore  $\varphi/2$ :

$$x = \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi.$$

L'origine di questa notazione non è chiara. Il termine “seno” probabilmente sorge da una traduzione errata di una parola Araba in Latino. Poiché non siamo partiti dall'arco non possiamo definire adeguatamente le funzioni inverse (ovvero il doppio settore), usando i termini consueti “arcoseno” e “arcocoseno”, in funzione delle coordinate. Piuttosto, in analogia, chiameremo “ $\varphi/2$ ” l’“area” del seno (o del coseno) e scriveremo

$$\varphi = 2 \text{ area } \sin y = \arcsin y$$

$$\varphi = 2 \text{ area } \cos x = \arccos x.$$

La notazione seguente, usata in Inghilterra e in America è abbastanza appropriata:

$$\varphi = \cos^{-1} x, \quad \varphi = \sin^{-1} y.$$

Le ulteriori funzioni goniometriche:

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}, \quad \cotan \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$$

(nella trigonometria più vecchia dette anche “secant” e “cosecant”) sono definite come semplici combinazioni razionali delle due funzioni fondamentali. Esse sono introdotte solo

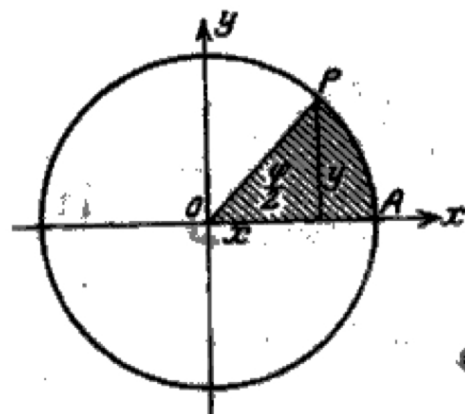


Fig. 63.

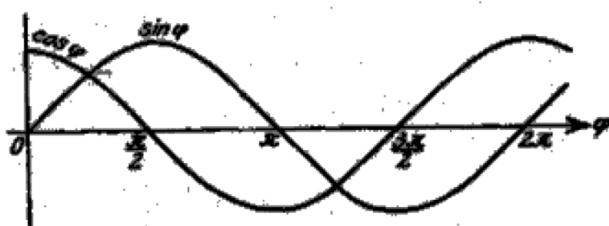


Fig. 64.

come una scorciatoia nel calcolo pratico e non hanno per noi una significanza teorica.

Se scegliamo le coordinate di  $P$  all'aumentare di  $\phi$  possiamo ottenere in una sola volta una rappresentazione qualitativa delle curve del coseno e del seno in un sistema di coordinate rettangolari. Queste curve sono le ben note onde di periodo  $2\pi$ , dove  $\pi$  è definito come l'area dell'intera circonferenza unitaria, invece che come la lunghezza del semicerchi, come si fa usualmente.

Confrontiamo adesso la nostra introduzione del logaritmo e della funzione esponenziale con queste definizioni. Il nostro punto di partenza sarà un'iperbole rettangola in riferimento ai suoi asintoti, definiti come gli assi; ovvero:

$$\xi\eta=1$$

Il semi asse dell'iperbole è  $OA=\sqrt{2}$ , mentre la circonferenza avrà raggio uguale a 1.

Consideriamo adesso l'area della striscia compresa tra l'ordinata fissata  $AA'$  ( $\xi=1$ ) e l'ordinata variabile  $PP'$ . Se la nominiamo  $\Phi$ , possiamo definire  $\Phi=\log \xi$ , e le coordinate di  $P$  vengono espresse in termini di  $\Phi$  nella forma

$$\xi=e^{\Phi}, \quad \eta=e^{-\Phi}$$

Noterai una certa analogia con la discussione precedente, ma che tale analogia fallisce per due motivi. Per prima cosa,  $\Phi$  non è un settore come era in precedenza, e inoltre le due coordinate sono adesso espresse razionalmente in termini di una sola funzione  $e^{\Phi}$ , mentre, nel caso della circonferenza, abbiamo avuto bisogno di introdurre due diverse funzioni, il seno e il coseno "to secure" espressioni razionali. Vedremo adesso che queste divergenze possono essere facilmente risolte.

Nota, in primo luogo, che l'area del triangolo  $OP'P$ , definita  $\frac{1}{2}\xi\eta=\frac{1}{2}$ , è indipendente dalla posizione di  $P$ . In particolare, quindi, è la stessa di  $OA'A$ . Quindi, se aggiungiamo quest'ultimo triangolo a  $\Phi$  e poi sottraiamo il triangolo precedente da questa somma, vedremo che  $\Phi$  può essere definita come l'area del settore iperbolico che giace tra il raggio vettore del vertice  $A$  e uno di un punto variabile  $P$ , proprio come nel caso della circonferenza. C'è ancora una differenza da risolvere. Prima, l'arco  $AP$ , guardato da  $O$ , era in senso antiorario, mentre adesso è in senso orario. Possiamo rimuovere questa differenza riflettendo l'iperbole in  $OA$ , cioè, scambiando  $\xi$  e  $\eta$ . Abbiamo adesso come coordinate di  $P$

$$\xi=e^{-\Phi}, \quad \eta=e^{\Phi}$$

Finalmente possiamo introdurre gli assi principali al posto degli asintoti come assi di riferimento, ruotando la figura di  $45^\circ$  (dopo aver compiuto la riflessione in  $OA$ ). Se chiamiamo le nuove coordinate  $(X,Y)$ , allora le equazioni di questa trasformazione saranno:

$$X=\frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}, \quad Y=\frac{-\xi+\eta}{\sqrt{2}}$$

L'equazione dell'iperbole quindi diventa

$$X^2-Y^2=2$$

e il settore  $\Phi$  ha adesso precisamente la stessa posizione che il settore  $\Phi/2$  aveva nella circonferenza. Le nuove coordinate di  $P$  in funzione di  $\Phi$  possono essere scritte nella forma

$$X=\frac{e^{\Phi}+e^{-\Phi}}{\sqrt{2}}, \quad Y=\frac{e^{\Phi}-e^{-\Phi}}{\sqrt{2}}$$

Rimane solo da ridurre l'intera figura in scala  $1:\sqrt{2}$  in modo da rendere il semiasse dell'iperbole uguale a 1 e non a radice di 2, come era nel caso della circonferenza. Quindi il settore in questione ha l'area uguale a  $\phi/2$ , in completo accordo con la precedente. Se chiamiamo le nuove

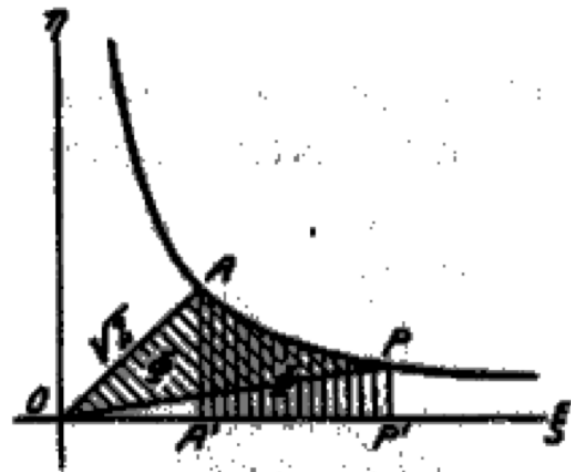


Fig. 65.

coordinate di nuovo  $(x,y)$ , esse saranno le seguenti funzioni di  $\Phi$

$$x = \frac{e^{\Phi} + e^{-\Phi}}{2}, \quad y = \frac{e^{\Phi} - e^{-\Phi}}{2},$$

che soddisfano la relazione  $x^2 - y^2 = 1$ , che è l'equazione dell'iperbole. Queste funzioni sono chiamate "coseno iperbolico" e "seno iperbolico" e sono scritte nella forma

$$x = \cosh \Phi = \frac{e^{\Phi} + e^{-\Phi}}{2},$$

$$y = \sinh \Phi = \frac{e^{\Phi} - e^{-\Phi}}{2}.$$

Il risultato finale, quindi, è che se trattiamo la circonferenza e l'iperbole rettangola, entrambe con semiasse uno, esattamente nella stessa maniera otteniamo: da una parte le ordinarie funzioni goniometriche, e dall'altra le funzioni iperboliche, quindi queste funzioni si corrispondono completamente.

Sai bene che queste funzioni,  $\cosh$  e  $\sinh$ , possono essere usate vantaggiosamente in molti casi. Nondimeno abbiamo davvero compiuto un passo indietro, per quanto riguarda il trattamento dell'iperbole. Mentre inizialmente, le coordinate  $(\xi, \eta)$  potevano essere espresse razionalmente in termini di una singola funzione  $e^{\Phi}$ , adesso sono richieste due funzioni, che sono connesse da una relazione algebrica (ovvero l'equazione dell'iperbole). È quindi naturale provare un trattamento inverso per le funzioni goniometriche, analogo all'originale sviluppo per l'iperbole. Questo è, infatti, abbastanza facile, se uno non si oppone all'uso di quantità complesse, e ci porta alla costruzione di una singola funzione fondamentale nei quali termini possono essere espressi razionalmente  $\cos \varphi$  e  $\sin \varphi$ , proprio come  $\cosh \varphi$  e  $\sinh \varphi$  vengono espressi in termini di  $e^{\Phi}$ , e che viene quindi chiamata a giocare il ruolo chiave nella teoria delle funzioni goniometriche.

Per questo introduciamo l'equazione della circonferenza  $x^2 + y^2 = 1$  (dove  $x = \cos \varphi$ ,  $y = \sin \varphi$ ) le nuove coordinate

$$x - iy = \zeta, \quad x + iy = \eta$$

che ci forniscono

$$\zeta \eta = 1.$$

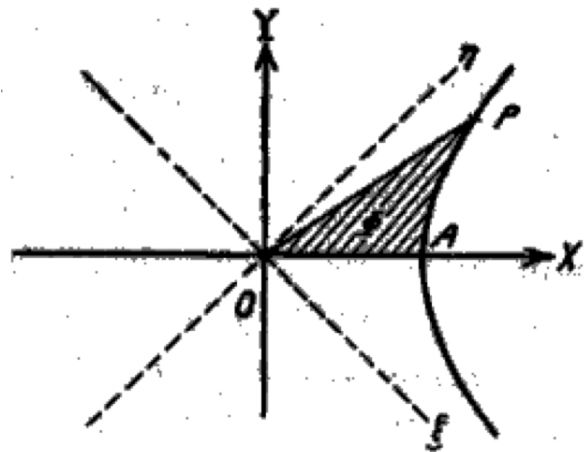


Fig. 66.