

Concept definition, concept image e la nozione di funzione

di Shlomo Vinner
Università Ebraica, Gerusalemme, Israele

(ricevuto il 3 Settembre 1981)

Un semplice modello per i processi cognitivi verrà costruito usando le nozioni di Concept Image e Concept Definition. Il modello verrà usato per analizzare alcuni fenomeni nel processo di apprendimento del concetto di funzione nelle classi 10 e 11. Conclusioni educative, simili a quelle in [3] che erano basate su argomenti storici, verranno avanzate.

1. Immagini mentali e Immagini di concetti

Vorremmo spiegare prima cosa intendiamo con immagine mentale di un concetto. Sia C un concetto e P una certa persona. L'immagine mentale di P di C è l'insieme di tutte le immagini che sono mai state associate a C nella mente di P . (Questa definizione è stata usata per la prima volta in [6]).

La parola "immagini" è usata nel senso più ampio e include ogni rappresentazione visiva del concetto (perfino i simboli). Così un grafo di una specifica funzione e i simboli " $y=f(x)$ " devono essere inclusi (insieme con altre cose) nell'immagine mentale del concetto di funzione di qualcuno.

Oltre alla "mental picture" di un concetto ci saranno una serie di proprietà associate con il concetto (nella mente della nostra persona P). Per esempio, qualcuno può pensare che l'altezza di un triangolo debba sempre cadere all'interno del triangolo stesso. Questa persona potrebbe pensare che le funzioni debbano sempre essere definite per mezzo di espressioni algebriche. Questo insieme di proprietà insieme con la mental picture verranno chiamate "concept image". È chiaro che per come è stata qua definita l'immagine di un concetto dipende dalla persona di cui si sta parlando. Però, nella discussione che seguirà, non la menzioneremo per il bene della convenienza. Sarà chiaro dal contesto.

2. La Concept definition e la formazione del concetto

Con "Concept Definition" intendiamo qui una definizione verbale che spiega accuratamente il concetto in un modo non circolare. Per qualcuno dei nostri concetti abbiamo anche concept definition che si aggiungono alla concept image. Per molti altri concetti no. Ad esempio, non abbiamo una definizione di "casa", "arancia", etc ... anche se ne abbiamo una concept image molto chiara. Essa è stata acquisita quando eravamo bambini probabilmente per mezzo di "definizioni ostensive". È certo che alcuni concetti, come questi, possono esserci introdotti per mezzo di definizioni verbali. La parola "foresta" può essere introdotta come: "molti molti alberi insieme formano una foresta". Si suppone che vengano visualizzati molti alberi insieme e così si venga a formare la concept image. Però noi affermiamo che (1) al fine di maneggiare concetti si necessita di una concept image e non di una concept definition, (2) la concept definition (dove il concetto è stato introdotto per mezzo di una definizione) rimarrà inattiva o addirittura verrà dimenticata. Durante il ragionamento, sarà quasi sempre evocata la concept image.

Questo è vero principalmente per l'apprendimento informale dei concetti.

Nell'apprendimento formale la situazione può essere diversa. Qua la concept definition diventa una parte del gioco. (in [1, pag. 181] si afferma che "in Inghilterra la tradizione è quella di fare affidamento sulla definizione formale nell'educazione di alto livello e sulla definizione informale o ostensiva nella scuola primaria e secondaria. Però, considerando alcuni libri di testo, non è chiaro quando questa è una tendenza piuttosto che una pratica".) Così, per concetti come le "reazioni

chimiche”, “il sistema coordinato” e “i triangoli equilateri” abbiamo delle definizioni. Queste definizioni ci vengono insegnate oppure vengono create da noi stessi quando qualcuno ci chiede di spiegare il concetto. Le definizioni che vengono create da noi quando “su richiesta” sono il risultato della nostra esperienza con il concetto. Esse sono una descrizione della nostra concept image. Le definizioni che ci vengono insegnate, d'altro canto, sono parte di un sistema generale (nel caso di concetti scientifici o matematici), un sistema con il quale non siamo necessariamente familiari. Alcune volte le definizioni ci vengono introdotte prima che abbiamo una qualsiasi concept image. Ci aspettiamo ulteriori approfondimenti per colmare questa lacuna. Si può discutere sul fatto che questa sia una strada efficace. Questa questione è discussa in [4, capitolo 2]. Però, se non si richiedono definizioni per il bene delle definizioni, la ragione di richiederle è che si crede che le definizioni aiutino la formazione della concept image e anche che esse siano utili nel portare avanti alcuni compiti cognitivi.

3. Concept image e concept definition – un modello

Per ogni concetto, assumiamo l'esistenza di due diverse celle nella struttura cognitiva (per evitare di far confusione, qua non si intendono cellule biologiche). Una cella è per le definizioni dei concetti l'altra e per la concept image. Una cella o entrambe possono essere vuote. Può esistere un'interazione tra di esse oppure possono essersi formate indipendentemente. Un bambino può avere una concept image per la nozione di sistema coordinato come il risultato di aver visto molti grafici in varie situazioni. In accordo con questa concept image i due assi del sistema sono perpendicolari. Successivamente l'insegnante di matematica di questo bambino può definire un sistema coordinato come due qualsiasi rette che si intersecano. Come risultato, possono presentarsi 3 scenari:

- (I) La concept image verrà cambiata per includere anche sistemi coordinati con assi che non formano un angolo retto
- (II) La cella della concept image rimarrà così com'è. La cella della definizione conterrà la definizione fornita dall'insegnante per qualche tempo ma questa definizione sarà dimenticata o distorta dopo un po' e quando verrà chiesto al bambino di definire un sistema coordinato lui parlerà di assi che formano un angolo retto.
- (III) Entrambe le celle rimarranno così come sono. Al momento che al bambino verrà chiesto di definire un sistema di coordinate lui ripeterà la definizione dell'insegnante, ma in tutte le altre occasioni penserà a un sistema di coordinate che ha due assi perpendicolari.

Un processo simile può avvenire quando un concetto viene introdotto prima tramite una definizione. In questo caso la cella contenente la concept image è vuota all'inizio. Dopo alcuni esempi e spiegazioni viene gradualmente riempita. Però, non rifletterà necessariamente tutti gli aspetti della concept definition. Scenari simili a (I) e (III) possono presentarsi anche in questo stage.

Questo viene mostrato nella Figura 1.

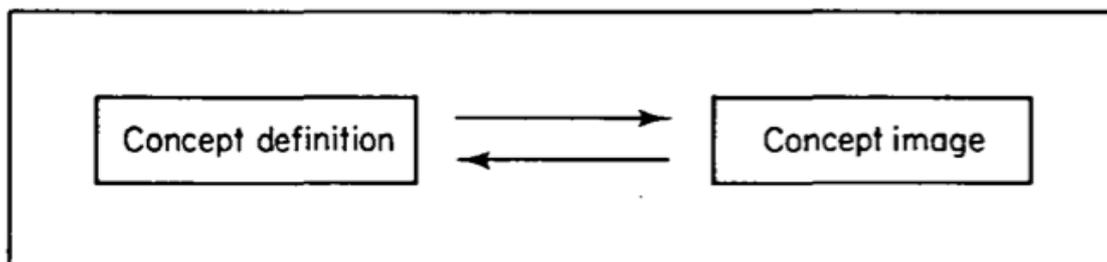


Figure 1.

Questo diagramma si riferisce allo stage della formazione del concetto. Ci sembra che molti insegnanti nella scuola secondaria e a livello dei collegi si aspettano a un certo punto della formazione del concetto si presenti un processo in una sola direzione, come si mostra in Figura 2.

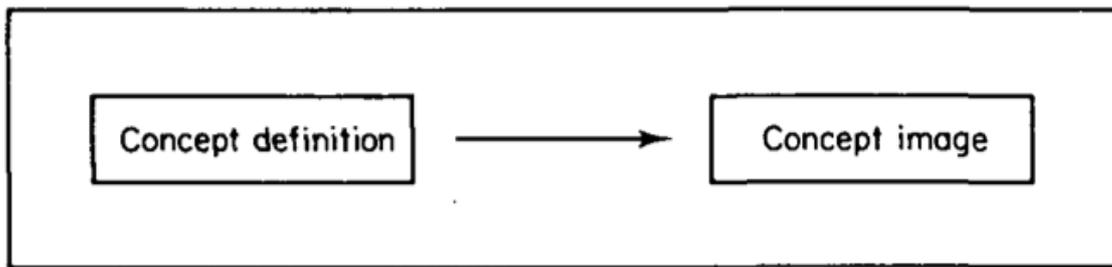


Figure 2.

Cioè, la concept image si forma tramite la concept definition e sotto il suo controllo. Noi, però, lo consideriamo un “pio desiderio”.

In aggiunta agli stage della formazione del concetto c'è anche lo stage della performance. In questo stage viene dato un compito cognitivo e la concept image e si suppone che le celle della concept definition vengano attivate. In questo articolo ci occuperemo solamente di compiti di identificazione o di costruzione. Di nuovo, la nostra impressione è che il modello, implicitamente assunto da molti insegnanti, sia una di quelle descritte nelle Figure 3,4,5.

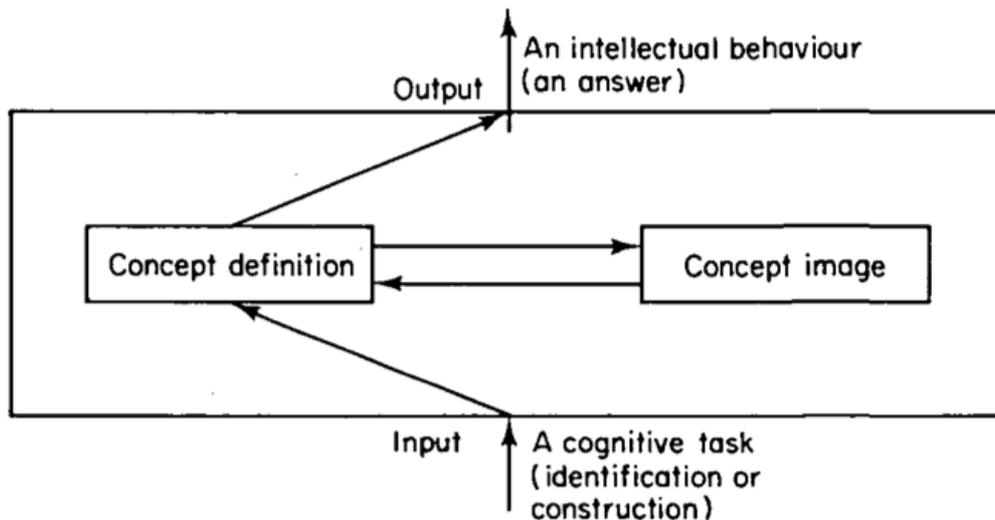


Figure 3.

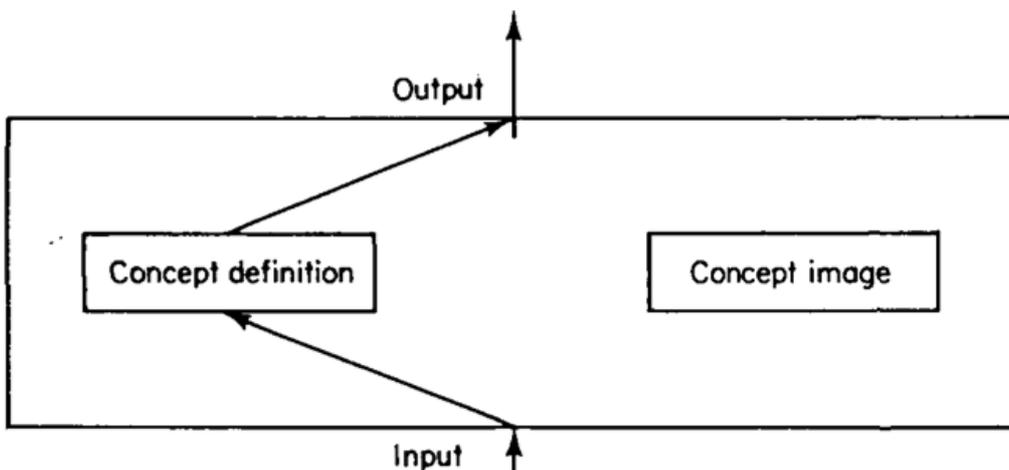


Figure 4.

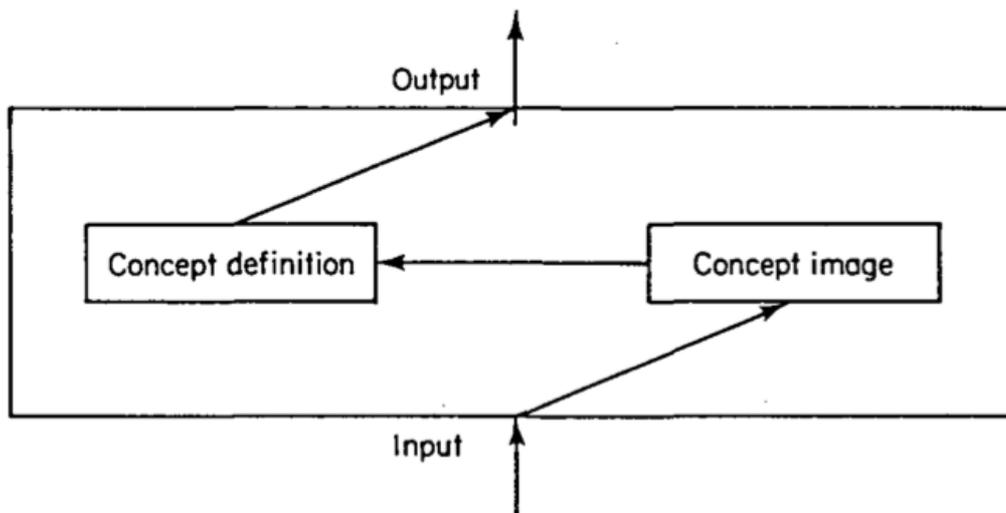
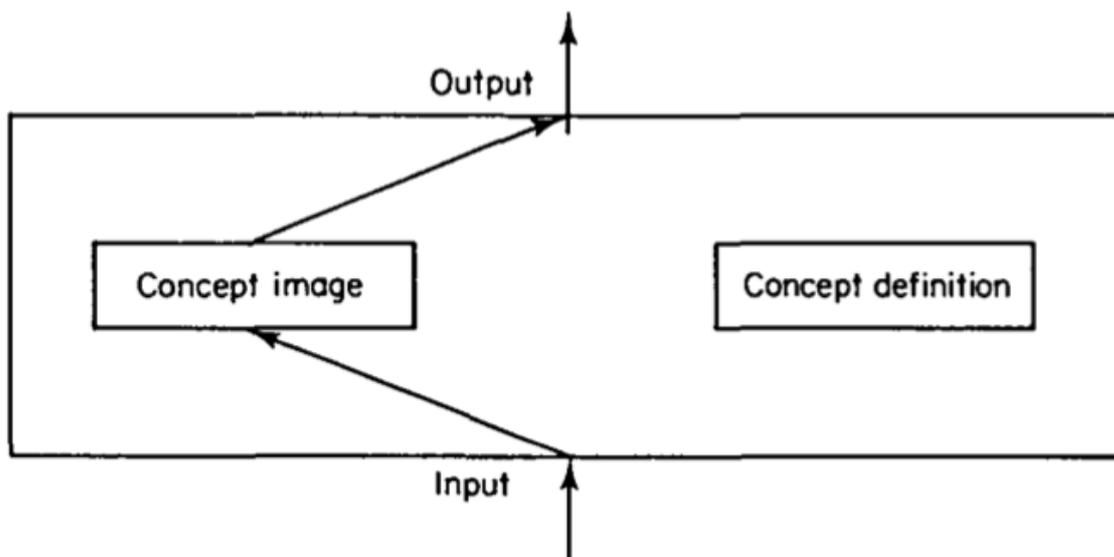


Figure 5.

Di nuovo, noi crediamo che le Figure dalla 3 alla 5 non riflettano la realtà. Non c'è alcuna possibilità di forzare una struttura cognitiva a usare le definizioni, né per formare concept images né per gestire un compito cognitivo. È troppo complicato avere a che fare con certe definizioni. Esse non aiutano la creazione della concept image nella mente degli studenti. Quindi esse risultano essere inutili. D'altro canto, esistono alcune definizioni che non hanno senso tranne che nel momento in cui vengono forniti alcuni esempi specifici dall'insegnante o dal libro di testo, essi formano la concept image e per (1) e (2) della sezione precedente le definizioni possono diventare inattive o perfino dimenticate. Così, il modello per i compiti cognitivi precedenti è più simile a quello che segue.



4. Rivelando la concept image e l'Insegnamento

Vorremmo fare il punto in questa sezione con un esempio di tipo geometrico. Alcune volte mettiamo alla prova gli studenti per vedere se possiedono la conoscenza di alcuni concetti geometrici molto semplici come quello di angolo retto, triangolo isoscele, altezza di un triangolo e così via. Lo facciamo tramite questionari a scelta multipla dove viene chiesto di identificare i concetti o di costruire esempi specifici. Molto spesso scopriamo che i nostri studenti non conoscono i concetti appena illustrati e hanno concept image incorrette. Queste immagini possono essere il

risultato di insiemi specifici di esempi dati agli studenti. Probabilmente c'è un assunto (implicito) per il quale gli studenti devono usare la concept definition quando gli viene imposto un compito cognitivo e quindi non c'è bisogno di fornirgli numerosi esempi distinti, ma, come abbiamo affermato prima, questo assunto non ha fondamento.

Ecco qua 3 esempi:

- (1) in un libro di testo (in Ebreo) per le classi di secondo grado l'autore definisce un triangolo isoscele come un triangolo che ha due lati uguali. Tutti i triangoli isosceli che sono disegnati nel libro hanno basi orizzontali. Disegniamo adesso un insieme di triangoli alcuni dei quali sono isosceli ma solo uno di questi ha la base orizzontale. Sarà una sorpresa se solo questo triangolo sarà identificato come isoscele dei nostri studenti?
- (2) In un libro di testo di geometria (Geometry with Coordinates, SMSG, parte I, pag. 143-144) un angolo è considerato come "l'unione di due raggi concomitanti". Un angolo piatto è "l'unione di due raggi opposti". C'è un solo disegno di un angolo piatto nel testo, e ovviamente è orizzontale. Di nuovo, sarà sorprendente se gli studenti identificheranno solo angoli piatti che sono orizzontali?
- (3) In un altro libro di SMSG (Mathematics for Junior High School, Volume 2, parte I, pag 194-195) vengono discussi i triangoli rettangoli. In tutti questi un lato dell'angolo retto è orizzontale (sono disegnati 10 triangoli rettangoli tutti insieme). Non sembra necessario chiedere di nuovo la nostra domanda.

Così, rivelare la concept image dei nostri studenti diventa molto importante per l'insegnamento; non solo essa ci potrà fornire una maggiore comprensione dei nostri studenti (conoscendo cosa li fa comportare nel modo in cui si comportano) ma potrebbe anche suggerirci alcuni miglioramenti al nostro insegnamento che ha creato una concept image così sbagliata.

5. La temporary concept image

Bisogna fare il punto su una cosa molto importante adesso. In un compito intellettuale specifico alcune volte vengono attivate solamente delle parti della concept image o della concept definition. Quindi, la concept image (o la concept definition) non possono essere determinate da una singola osservazione di uno specifico comportamento. Noi, quindi, dobbiamo parlare di questa parte della cella che è stata attivata quando stiamo lavorando su un compito specifico. Quindi, abbiamo a che fare con la cella della concept image (o concept definition) in un certo momento. Possiamo quindi chiamarla "temporary concept image" (o definition).

Ad esempio, si potrebbe chiedere di disegnare un quadrilatero tale che, disegnando una sola linea retta, risulta possibile ottenere 4 triangoli (si consiglia al lettore di farne un disegno prima di continuare). La domanda è stata presa da [2, pag. 142]. Quando si prova a risolvere il problema molte persone lavoreranno su quadrilateri semplici (in particolare, quadrilateri che non si intersecano). Rimanendo fissi solamente su questi quadrilateri queste persone falliranno il compito. Alcuni di loro non sono molto familiari con quadrilateri non-semplici, ma altri semplicemente falliranno nel richiamarli nonostante conoscano questo concetto. Possiamo affermare che la loro temporary concept image non include i quadrilateri non-semplici, sebbene la loro concept image permanente li includa.

Useremo il termine "temporary concept image" solo quando crederemo che solo una specifica parte della concept image venga attivata; altrimenti diremo semplicemente "concept image". Ovviamente, si può discutere su quali basi abbia questa affermazione, e si avrebbe perfettamente ragione nel farlo. Quindi nella sezione successiva quando diremo "concept image" e il lettore crederà che si tratti della temporary concept image (e vice versa), non diremo che si sbaglia. La controversia non può essere risolta sulle basi delle informazioni che abbiamo senza la presenza di interviste. Ma la nostra intenzione in questo articolo non è di determinare su una certa concept image è temporary o no, ma piuttosto esporre l'esistenza di concept image permanenti e temporary.

6. Il concetto di funzione e il problema

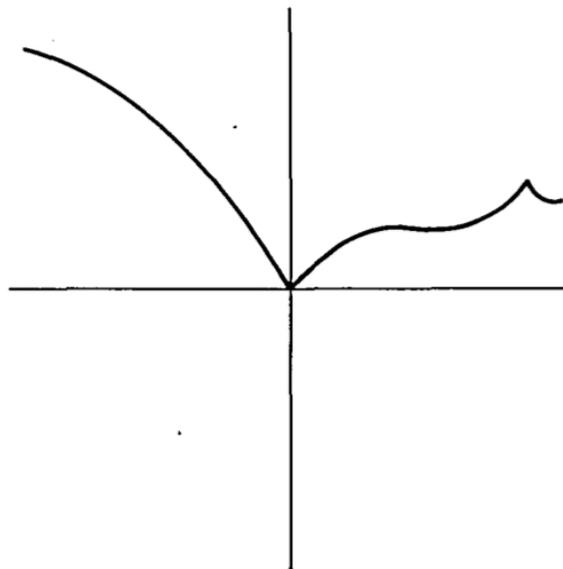
Andremo ad usare il modello precedente per analizzare alcuni fenomeni nell'apprendimento del concetto di funzione nelle classi 10 e 11. Abbiamo a che fare con studenti che hanno incontrato (in un modo o nell'altro) il concetto di funzione nella classe 9. Nella classe 10, il concetto di funzione gli è stato formalmente introdotto come se essi non lo avessero mai incontrato in precedenza. Gli insegnanti di questi studenti stavano utilizzando un libro di testo secondo il quale una funzione è qualsiasi corrispondenza tra due insiemi (un dominio e un codominio) tali che ogni elemento nel dominio ha esattamente un elemento nel codominio che gli corrisponde. L'insegnante ha usato la definizione del libro e ha anche introdotto ai suoi studenti funzioni non matematiche come corrispondenze tra una persona e il numero della sua carta di identità, i bambini e le loro madri, etc ... Abbiamo quindi posto due domande:

- (1) In che misura la concept definition degli studenti soddisfa la definizione del libro di testo?
- (2) In che misura la concept definition e la definizione del libro di testo si soddisfano l'un l'altra?

7. Il questionario e il campione

Introdurremo prima il questionario e poi faremo alcuni commenti su di esso. In esso ci sono 5 domande. Nelle prima 4, lo studente deve scegliere tra SI e NO e poi spiegare la propria risposta a parole.

- (1) Esiste una funzione che fa corrispondere ad ogni numero diverso da 0 il suo quadrato e a zero fa corrispondere -1?
- (2) Esiste una funzione che fa corrispondere 1 a ogni numero positivo, -1 a ogni numero negativo, e 0 a 0?
- (3) Esiste una funzione che ammette valori interi per numeri non interi e valori non interi per numeri interi?
- (4) Esiste una funzione il cui grafico è il seguente?



- (5) Secondo te che cos'è una funzione?

È stato spiegato agli studenti che il questionario non era un test e che il suo scopo era solo quello di esaminare alcuni concetti. Non gli è stato chiesto di scriverci sopra il proprio nome. È

stato chiesto agli studenti di collaborare, e la nostra impressione è che abbiamo ricevuto una buona cooperazione. Abbiamo anche ricordato agli studenti di spiegare le proprie risposte e anche in questo caso abbiamo registrato una buona reazione.

Alcuni commenti al questionario: *era un questionario strano. Le domande non assomigliavano alle domande che si trovano nei test regolari o nei compiti per casa. Le risposte alle prime 4 domande erano "si" (gli studenti si aspettavano anche qualche risposta negativa). Nel momento in cui capisci la domanda e conosci il concetto di funzione come è definito nel libro di testo tutto comincia a sembrare così semplice che inizi a dubitare su quale fosse l'intenzione della domanda.* Avendo questi elementi nel questionario, ci aspettavamo di evitare le ben note abitudini condizionate degli studenti nei test. Questa aspettativa era supportata dalle spiegazioni scritte che abbiamo ricevuto. Nella nostra analisi abbiamo considerato solo questionari che avessero spiegazioni scritte.

Il compito imposto dalle prime 4 domande sembrava a prima vista essere un essere un compito costruttivo. A un secondo sguardo sembra maggiormente un compito di riconoscimento, poiché le condizioni nelle domande 1,2 e 4 possono essere usate così come sono per definire le funzioni richieste. Solo nella domanda 3 è richiesto un po' di sforzo per definire esplicitamente una funzione che adempia completamente le condizioni richieste.

Il nostro campione includeva 65 studenti della classe 10 e 81 della classe 11. Essi avevano studiato in due high school accademicamente selettive in Gerusalemme nel 1978. Gli studenti della classe 10 sono stati testati alcuni mesi dopo aver studiato il capitolo sulle funzioni. Gli studenti della classe 11 avevano studiato questo capitolo quando erano nella classe 10.

8. La main concept definition

In questa sezione analizzeremo le risposte alla domanda 5 (secondo te cos'è una funzione?). Sono state distinte 4 categorie principali. Definiremo tali categorie e riporteremo alcune risposte che appartengono a ciascuna di esse.

Categoria I: La definizione del testo (vedi 6.) alcune volte mischiata con elementi della cella della concept image.

Qui la definizione del libro di testo è stata ripetuta con le parole degli studenti. La formulazione può risultare inaccurata o persino sbagliata. In un test regolare ad alcune delle formulazioni non sarebbe assegnato nessun punto, ma qui esse risultano prove che la cella della concept definition ha qualcosa in comune con la definizione del libro di testo (nonostante sia imperfetta).

- (1) È la corrispondenza tra un numero che appartiene ad un insieme di numeri (il dominio) e un numero in un altro insieme (il codominio). Ad ogni numero nel dominio corrisponde solamente un numero nel codominio, ma i numeri nel codominio possono avere numerose corrispondenze nel dominio. Non ci devono essere numeri nella funzione. Tutto può essere una funzione (oggetti concreti, animali, etc ...) (classe 11).
- (2) Ogni punto nel dominio ha un punto nel codominio (classe 10).
- (3) Una funzione secondo me è quando ogni x ha un numero o un oggetto in y ma non vice versa (classe 10).

Categoria II: La funzione è una regola di corrispondenza.

Questo elimina la possibilità di una corrispondenza arbitraria. Una regola e una corrispondenza arbitraria si contraddicono. In alternativa alla parola "regola", gli studenti usano anche la parola "legge", "relazione", "dipendenza tra le variabili", etc ...

In questa categoria si può percepire l'influenza della Categoria I. Lo studente usa le parole della definizione trovata sul libro di testo. Però, l'aspetto di "legge" è dominante.

- (1) è una relazione tra due insiemi di numeri che si basa su una certa regola (classe 10).

- (2) è una relazione tra due fattori che dipendono l'uno dall'altro. Questa relazione è descritta con un grafico (classe 10).
- (3) è prendere qualcosa e cambiarlo tramite un processo costante determinato da una funzione specifica (classe 10).
- (4) Una funzione è un metodo di ottenere da un insieme di numeri un altro insieme di numeri per mezzo di una certa regola. Ho risposto “no” alla domanda (4) nel questionario perché generalmente nelle applicazioni alla vita di tutti i giorni una funzione ha una regola definita. Non è definita per ogni punto separatamente (classe 11).
- (5) Una funzione è una relazione nella quale ogni elemento in un insieme è in relazione con un singolo elemento di un altro insieme in accordo con una certa legge. Dobbiamo scoprire la legge ma questa deve sempre esistere (classe 11).

L'idea di questa categoria è stata anche espressa nelle domande dalla 1 alla 4. Per esempio, una risposta alla domanda 3: “No, una funzione con una regola così non esiste. Questo perché non c'è una legge nei numeri non interi che potrebbero essere anche irrazionali” (classe 10).

Categoria III: La funzione è un termine algebrico, una formula, una equazione, una manipolazione algebrica, etc ...

- (1) Una funzione è un insieme di numeri tali che quando facciamo con essi una certa operazione aritmetica, otteniamo un altro insieme di numeri che è funzionale al primo insieme (classe 10).
- (2) Una funzione è la riflessione di numeri per mezzo di una equazione, cioè, quando un numero viene sostituito in un termine algebrico otteniamo un numero che è la riflessione del primo numero (classe 10).
- (3) Per quanto ne so una funzione è un'operazione aritmetica svolta su numeri. Ogni elemento nel dominio ha un singolo elemento nel codominio e non ci sono elementi nel dominio che non hanno una immagine (classe 10).
- (4) Una funzione è una equazione che ha un codominio da una lato e un dominio dall'altro. Ad ogni numero (o fattore) nel dominio corrisponde un fattore nel codominio (classe 10).
- (5) Una funzione è qualcosa che assomiglia a una equazione. Quando metti i numeri al posto dell'incognita trovi una soluzione (classe 10).

Si noti l'influenza della definizione del libro di testo nelle risposte 3 e 4. D'accordo con il nostro modello, c'è stata una interazione tra la cella della concept image e la cella della definizione che prima aveva contenuto la definizione del testo. Dopo un po' la cella della concept image è divenuta dominante ma alcune tracce della definizione del testo sono rimaste.

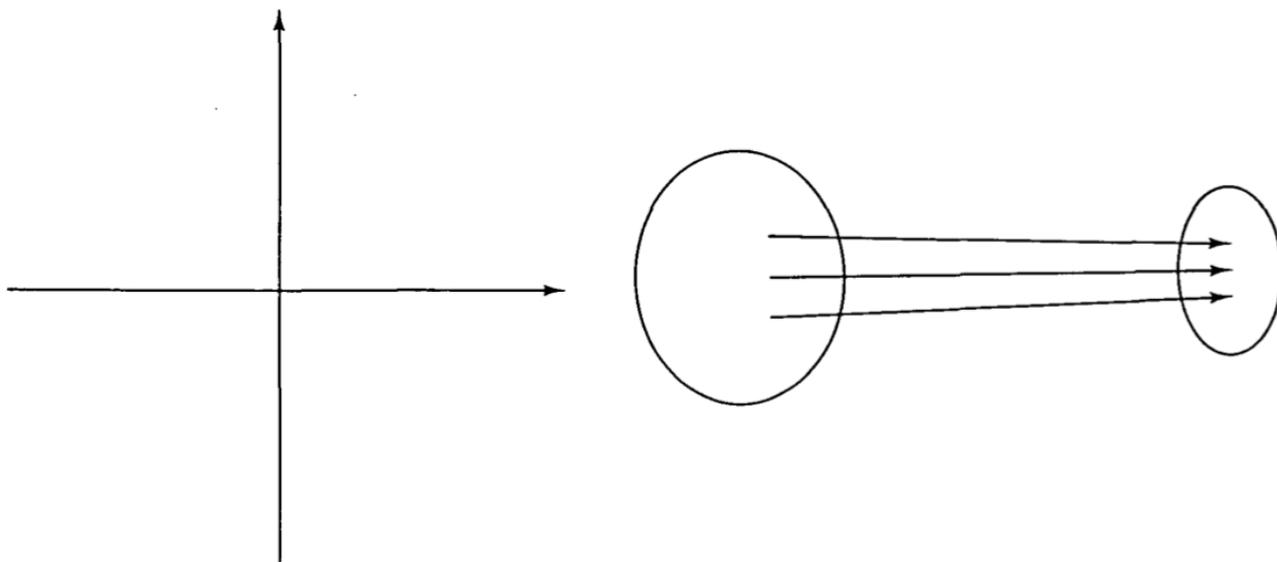
L'idea che questa categoria (come l'idea della categoria Categoria II) è stata espressa anche nelle risposte dalla 1 alla 4 nel questionario. Ad esempio, una risposta alla domanda 4: “Forse sì e forse no. Il grafico potrebbe avere una formula o potrebbe non averla. Se non ce l'ha allora non è una funzione” (classe 11).

Categoria IV: Alcuni elementi nella mental picture vengono presi come definizione per il concetto (di funzione).

La funzione è identificata con un grafo, con i simboli “ $y=f(x)$ ” e con il diagramma con “le due patate con le frecce”.

- (1) Una funzione è una linea curva in un sistema coordinato tale che ad ogni punto corrisponde esattamente un punto. Ci possono essere punti ai quali non corrisponde alcun punto e ci possono essere punti sull'asse y per i quali ci sono più di un punto su x . (classe 11)
- (2) I valori sul grafico y dipendono da un altro grafico x secondo la regola $y=f(x)$. (classe 11)
- (3) Una funzione è una espressione che fa corrispondere agli elementi di un insieme quelli di un altro sotto la condizione che non ci sia più di una freccia per ogni numero (classe 11).

Si noti che nelle risposte 1 e 3 l'influenza della definizione del libro di testo si sente. Quindi si potrebbe discutere se è giusto includere certe risposte in certe categorie. Questo è vero, ma noi vogliamo enfatizzare che le categorie precedenti non sono necessariamente disgiunte. Per poter decidere a quale categoria una certa risposta (che possiede diversi aspetti) debba appartenere, noi guardiamo (quello che ci sembra) il suo aspetto dominante. La possibilità di includere una risposta in più di una categoria è coerente con il nostro modello. Inoltre, ciò lo conferma. Ovviamente, come risultato, il trattamento statistico risulterà inaccurato. Si deve quindi osservare la tabella statistica 11 solo come una stima approssimata.



9. La main concept image

Analizzando le risposte del questionario alle domande dalla 1 alla 4 abbiamo trovato alcune concept image che non sono coerenti con la definizione del libro di testo (sebbene a volte fossero coerenti con la definizioni degli studenti). Gli studenti hanno alcune aspettative di funzioni, aspettative che non hanno alcuna base logica e non si riferiscono logicamente con la definizione del libro di testo. Queste attese sono probabilmente il risultato dell'esperienza che gli studenti hanno avuto con le funzioni. Comunque, bisogna ammettere che le osservazioni degli studenti sulle loro esperienze sono state abbastanza selettive. La loro esperienze includevano tutte le “funzioni strane” per mezzo delle quali la “immagine corretta” del concetto di funzione si sarebbe dovuto formare. Nonostante ciò, il processo cognitivo che ha formato la concept image di certi studenti ignorava questa parte della loro esperienza, forse perché sembravano strane, artificiali, o innaturali.

(1) una funzione dovrebbe essere data una regola. Se due regole vengono fornite per due domini disgiunti ci occupiamo di due funzioni. Se la corrispondenza tra i numeri sembra arbitraria per uno studente, lui potrebbe parlare di un numero infinito di funzioni, poiché ogni numero ha la sua regola di corrispondenza.

L'approccio precedente è espresso nelle risposte seguenti:

- Alla domanda 1: No, perché una funzione del genere dovrebbe dare anche il quadrato di 0 (classe 10).
 No, perché se fai il quadrato di un numero allora il risultato è positivo (classe 11)
 No, perché contraddice il concetto di funzione (classe 10).
 No, $0^2=0$ e non -1 (classe 11).
- Alla domanda 2: No, ci sono 3 funzioni diverse. Una di queste da +1 per tutti i numeri

positivi, la seconda da -1 per tutti i numeri negativi e la terza da 0 (classe 10).

No, perché una funzione simile è costante ma la costante dovrebbe essere la stessa per tutto il tempo (classe 11).

Il commento di uno studente a tutte le domande: “Non esiste una funzione per nessuna delle domande, ma per mezzo di tutti i tipi di composizione è possibile ottenere qualsiasi cosa, perfino qualcosa come quello che si ha nella domanda 4” (classe 10).

(2) Una funzione può essere fornita da numerose regole riferite a domini disgiunti che sono intesi come intervalli o semirette. Ma una corrispondenza come quella della domanda 1 (una regola con una sola eccezione) non è considerata una funzione.

Questo approccio è stato espresso col fatto che molti studenti che hanno risposto alla domanda due in maniera positiva, hanno però risposto “no” alla prima domanda. È anche espresso in una maniera esplicita nelle due risposte successive dello stesso studente:

(a) No, perché non c'è un numero che abbia il quadrato negativo.

(b) Sì, perché contrariamente ad (a) esistono svariate funzioni tali che la prima sia uguale a uno per tutti i numeri positivi, e la seconda dia uguale a -1 per tutti i numeri negativi, e la terza sia 0.

(3) Le funzioni (che non sono algebriche) esistono solo se i matematici le riconoscono ufficialmente (dandogli un nome o denotandole con un simbolo specifico). Questo punto di vista è stato espresso da risposte come quelle che seguono:

Domanda 2: No, difatti forse esiste una funzione del genere ma io non la conosco.
(classe 10)

Anche gli studenti che hanno risposto sì alla domanda 2 si sono giustificati dicendo che questa è la funzione “segno” (che viene denotata con “sg”) come se l'esistenza della funzione dipenda da questo fatto (alcuni studenti sono venuti a conoscenza di questa funzione in classe). La stessa cosa è successa nella funzione 3. Invece di definire una funzione che soddisfi le condizioni richieste, gli studenti hanno nominato la funzione “parte intera” che viene solitamente indicata con $[x]$, e la funzione “parte frazionaria”, che si indica con $\{x\}$, e perfino non hanno esitato a mostrare come queste funzioni sono collegate alla domanda.

(4) Il grafico di una funzione deve essere “ragionevole”. Molti studenti hanno rifiutato che il grafico della domanda 4 fosse una funzione perché non è regolare. Essi hanno sostenuto che un grafo di una funzione deve essere simmetrico, persistente, sempre crescente o sempre decrescente, ragionevolmente crescente, etc ...

Ecco alcune risposte alla domanda 4:

No, non credo. Ho sempre creduto che una funzione sia qualcosa di persistente. (classe 10)

No, dal momento che una funzione è costruita per mezzo di un'equazione fissata, è impossibile per lei aumentare in un modo non proporzionale. (classe 10)

No. Una funzione è crescente oppure decrescente ma questa non è né l'uno né l'altro.

No. Non c'è regolarità nel grafico quindi non c'è una funzione che può descrivere questo grafico. Questa potrebbe essere una corrispondenza arbitraria tra x e y senza nessuna regolarità (classe 10).

No. Non c'è una relazione costante tra la x e la y (classe 11).

(5) Per ogni y nella codominio c'è una sola x nel dominio che corrisponde a essa.

Questo punto di vista è il risultato di un fallimento nel richiamare correttamente la definizione nel libro di testo.

(6) Una funzione è una corrispondenza uno-a-uno.

Questo punto di vista è il risultato di una distorsione della definizione del libro di testo. Questa distorsione può essere il risultato di quella che chiamiamo una richiesta implicita di simmetria. Se per ogni x nel dominio esiste solo una y nel codominio allora dovrà essere vero anche il contrario. Così, contrariamente a (5) che è dovuto solamente a un errore mnemonico, una certa dose di creatività (che ci piaccia o no) è stata coinvolta nella formazione di (6).

A causa di considerazioni di spazio, non riporteremo risposte che riflettano (5) o (6). Essenzialmente, queste risposte negano le corrispondenze che non soddisfano le richieste in (5) e (6) di essere funzioni.

10. L'immagine della regola e la temporary image dei numeri

È impossibile in un articolo come questo menzionare tutti i punti di vista interessanti che sono stati scoperti in queste risposte. Menzioneremo solo due di questi. Il primo riguarda il concetto di regola. Si è scoperto che molti studenti concepiscono una regola come una istruzione che riguarda la manipolazione o una formula algebrica. C'è bisogno di "fare qualcosa" a un numero per poter ottenere il numero che gli corrisponde. Un'operazione aritmetica deve essere coinvolta. Questo fatto è stato principalmente espresso nelle domande relative alla questione 2. Gli studenti hanno trovato insoddisfacente dire: "corrisponde a 1 per ogni numero positivo, -1 per ogni numero negativo e 0 in 0." Invece hanno suggerito: " $\frac{x}{x}$ per i numeri positivi e $\frac{x}{-x}$ per i numeri negativi", oppure " $\frac{x}{x}$ per ogni numero", etc ... Lo stesso fenomeno è avvenuto nella domanda 3.

Gli studenti hanno provato molto intensamente ad evitare una regola che facesse corrispondere arbitrariamente un intero con un non intero e vice versa. Una regola e una corrispondenza arbitraria sembravano loro contraddittorie. Quindi hanno provato a costruire una formula che rispettasse i requisiti della domanda 3. Qui arriviamo al secondo punto che abbiamo menzionato. Numerosi studenti (indipendentemente) hanno provato: $f(x) = \frac{1}{x}$ sostituendo alla x gli interi. Facendo le sostituzioni, hanno scoperto di avere ragione. Adesso si trovano a dover testare la stessa formula con i non interi. Ma dopo aver aver ottenuto con i calcoli precedenti dei numeri non interi della forma $\frac{1}{x}$ (x intero), avevano temporaneamente l'immagine di $\frac{1}{x}$ per i non interi. Così, hanno scritto $\frac{1}{x}$ invece di x nella $f(x)$ precedente e hanno ottenuto $f(x) = 1 / \left(\frac{1}{x}\right) = x$ che ha confermato

la loro ipotesi che $f(x) = \frac{1}{x}$ fosse un buon candidato. La loro temporary concept image

(paragrafo 5) dei numeri coinvolti in questo caso comprendeva interi e frazioni della forma $\frac{1}{x}$ (solamente con x intero). Questo è un esempio di come la temporary concept image (essendo casuale e instabile come deve essere) può determinare una intera nuova linea di pensiero che sfortunatamente porta a errori gravi.

11. Alcune tavole

Le tabelle 1-3 sono intese per rispondere rispettivamente alle seguenti domande:

- (1) Qual'è la distribuzione degli studenti tra le categorie dalla (1) alla (4) del paragrafo (8)?
- (2) Tra gli studenti che hanno fornito la definizione del libro di testo, quanti si sono comportati in accordo con questa? (Uno studente che scrive, ad esempio nella domanda 4, che il grafico

fornito non è il grafico di una funzione perché non è simmetrico, non è considerato come qualcuno le cui abitudini siano dirette dalla definizione del libro di testo.)

(3) Qual'era la distribuzione delle risposte corrette tra le domande dalla 1 alla 4?

Diverse tavole sono state preparate per la classe 10 e per la classe 11, ma nessuna differenza significativa è stata trovata. Quindi, abbiamo combinato queste tavole, $N=146$, e qui ecco i risultati:

Category I	Category II	Category III	Category IV	No Answer
57	14	14	7	8

Tavola 1. *Classificazione percentuale.*

Percentuale degli studenti che agiscono in accordo con la

definizione del libro di testo durante tutto il test $\rightarrow 20\%$

Percentuale degli studenti del gruppo sopracitato su tutti gli studenti

che hanno usato la definizione del libro di testo $\rightarrow 34\%$

Nessuno si è comportato in accordo con la definizione del libro di testo senza averla in qualche forma espressa nella domanda 5.

	Question 1	Question 2	Question 3	Question 4
Correct answer (percent)	39	66	49	57

Table 3.

12. Un commento educativo

Abbiamo già menzionato l'importanza di conoscere la concept image degli studenti per poter insegnare (paragrafo 4). A questo punto è piuttosto chiaro che una definizione e alcuni esempi non sono sufficienti a formare la concept image desiderata. Ci sono numerosi fattori che determinano la concept image, alcuni di essi vanno al di là del nostro controllo. È importante per gli insegnanti e per gli autori dei libri di testo esserne a conoscenza. Prima, si deve sapere cosa si suppone ci si debba aspettare dagli studenti. Dopo, si aumenta la comprensione che abbiamo per i nostri studenti di matematica (una comprensione che loro necessitano disperatamente). L'approccio "naive" del "scriviamo una bellissima serie di lezioni (unit) e tutti i problemi saranno risolti" si è dimostrato nuovamente sbagliato. Anche in una analisi globale a priori del concetto come suggerito in [5] non è sufficiente.

In [3] è chiaramente mostrato che quando si considera la notazione di funzione dal punto di vista storico ci si propone una prospettiva completamente diversa del nostro problema. È stato notato che grandi matematici come Eulero, d'Alambert e Lagrange avevano una concept image diversa dalle definizioni suggerite dai moderni libri di testo. Questa definizione può essere vista come la definizione di Dirichlet-Bourbaki. Difatti, l'approccio moderno alla funzione è stato rifiutato da alcuni grandi matematici. In [3] si discute che per questo motivo e a causa delle ben note difficoltà che gli studenti hanno con le definizioni di Dirichlet-Bourbaki sarebbe meglio evitarla del tutto nei corsi che precedono Analisi, Topologia e Algebra all'università.

D'altro canto, è chiaro che se uno vuole insistere sulla definizione generale più che su ogni altra cosa, si devono fornire agli studenti esempi che formino la concept image desiderata non solo all'inizio del capitolo ma durante tutto il processo di apprendimento. Elementi (della concept image) che non vengono costantemente rinforzati verranno molto probabilmente dimenticati e così la concept image sarà distorta. Fornire agli studenti tali esempi durante tutto il periodo di apprendimento potrebbe non essere un compito semplice (il problema è quello di trovare esempi interessanti nel giusto contesto senza dare agli studenti la sensazione di essere indottrinati). Di nuovo, si deve decidere se si preferisce affrontare tutto questo. Sfortunatamente, le alternative sono di farlo in questo modo oppure di non farlo affatto.

Ma tutto questo, però, potrebbe portare ad un'altra conclusione. Dobbiamo ammettere che nelle applicazioni o nei test standard la concept image non gioca un ruolo cruciale. Gli studenti possono aver successo negli esami anche avendo una concept image sbagliata. Quindi se non siamo interessati alla concept image non dobbiamo perderci tempo. D'altro lato, se essa ci interessa quello che stiamo facendo non è abbastanza. Maggior tempo e impegno pedagogico sono richiesti. Di certo, la questione delle priorità nell'insegnamento della matematica deve essere sollevata arrivati a questo punto, ma questa non è una questione che può essere risolta in questo articolo.

References

- [1] AUSTIN, J. L., and HOWSON, A. G., 1979, *Educ. Stud. Maths.*, **10**, 161.
- [2] KRUTETSKI, V. A., 1976, *The Psychology of Mathematical Abilities in School Children* (The University of Chicago Press).
- [3] MALIK, M. A., 1980, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, **11**, 489.
- [4] SKEMP, R., 1971, *The Psychology of Learning Mathematics* (Penguin Books).
- [5] TOUYART, M. A., 1971, *Educ. Stud. Maths.*, **3**, 270.
- [6] VINNER, S., 1975, *Educ. Stud. Maths.*, **6**, 339.