Anteprima per l'istruttore

(ix - xii)

Questa anteprima è destinata a coloro che già conoscono il calcolo. Altri dovrebbero procedere direttamente al Capitolo 1.

Il metodo di *esaustione* di Eudosso e Archimede può essere riassunto come segue: Avendo definito e calcolato aree di poligoni, si determina l'area di una figura curvilinea F usando il principio che ogni volta che P_1 e P_2 sono poligoni tali che P_1 è dentro F e F è all'interno di P_2, quindi $\text{Area}(P_1) \leq \text{Area}(F) \leq \text{Area}(P_2)$. Questo approccio appare nella matematica moderna nella forma "dei tagli di Dedekind" (*Dedekind cuts*), misura interna ed esterna, somme inferiori e superiori per integrali.

Per applicare il metodo di *esaustione* alla differenziazione, sostituiamo la relazione di inclusione tra le figure con la relazione di "sorpasso" (*overtaking*) definita come segue.

> **Definizione** Siano f e g funzioni a valori reali con domini contenuti in $\mathbb{R}$, e x_0 un numero reale. Diciamo che f sorpassa (*overtakes*) g in x_0 se c'è un intervallo aperto I che contiene x_0 tale che:
> 1. $x \in I$ e $x \neq x_0$ implica che x appartiene al dominio di f e g.
> 2. $x \in I$ e $x < x_0$ implica $f(x) < g(x)$.
> 3. $x \in I$ e $x > x_0$ implica $f(x) > g(x)$.

Data una funzione f e un numero x_0 nel suo dominio, possiamo confrontare f con la funzione linare $l_m(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$.

> **Definizione** Sia f una funzione definita su un intervallo aperto contenente x_0. Supponiamo che esista un numero m_0 tale che:
> 1. $m < m_0$ implica che f *overtakes* l_m in x_0.
> 2. $m > m_0$ implica che l_m *overtakes* f in x_0.
>
> Allora diciamo che f è differenziabile in x_0, e che m_0 è il "*derivative*" di f in x_0.

La seguente nozione di *transition* si verifica implicitamente in entrambe le precedenti definizioni.

> **Definizione** Siano A e B due insiemi di numeri reali, e x_0 un numero reale. Diciamo che x_0 è un "punto di transizione" da A a B se esiste un intervallo aperto I contenente x_0 tale che:
> 1. $x \in I$ e $x < x_0$ implica $x \in A$ e $x \notin B$.
> 2. $x \in I$ e $x > x_0$ implica $x \in B$ e $x \notin A$.

La definizione precedente della derivata ("*derivative*") equivale al solito approccio con l'utilizzo del limite, come dimostreremo nel capitolo 13. Tuttavia, è decisamente differente, e per gli studenti che desiderano una definizione logicamente completa della derivata, crediamo che sia più semplice e geometricamente accattivante.

Sia Euclide che Archimede probabilmente impiegarono la seguente definizione di tangente: "*la linea tangente tocca la curva, e nello spazio tra la linea e la curva, nessuna altra retta può essere interposta*".[1] Questo è in effetti un modo un po' sciolto per esprimere la definizione di derivata che abbiamo appena dato. Perché, allora, Fermat, Newton e Leibniz hanno cambiato l'enfasi dal metodo di *esaustione* al metodo coi limiti? La ragione deve risiedere

1 C. Boyer, The history of the Calculus and Its Conceptual Developement, Dover (1959), pag. 57.

nel potere computazionale dei limiti, che ha permesso a Newton e Leibniz di stabilire le regole del calcolo, nonostante il fatto che i limiti non fossero chiaramente compresi almeno per un altro secolo. Tuttavia, non c'è nulla che impedisca di eseguire lo stesso programma usando il metodo dell'*esaustione*. Lo faremo in questo libro.

Nell'insegnare con questo approccio, si può iniziare con la definizione dei punti di transizione (con esempi come nascita, congelamento e tramonto) e poi continuare a definire il sorpasso ("*overtaking*") e la derivata. (Bisogna sottolineare il fatto che, nella definizione di un punto di transizione, non si dice nulla sul numero x_0 stesso.) La nozione di punto di transizione si ripresenta nel grafico, quando consideriamo i punti di svolta (" *turning points* ") e i punti di flesso, quindi le tecniche di calcolo necessarie per determinare i sorpassi sono messe in pratica più tardi.

Poiché la definizione di derivata è così vicina a quella di integrale (un punto di transizione tra somme inferiori e superiori ("*lower and upper sums*")), il trattamento del teorema fondamentale del calcolo diventa molto semplice.

Per quei corsi in cui viene sottolineata la completezza dei numeri reali, la seguente versione dell'assioma di completezza è particolarmente adatta all'approccio con le transizioni.

Definizione Un insieme A di numeri reali è convesso se, per qualsiasi x e y in A e z tale che $x<z<y$, allora z appartiene ad A.

Assioma di Completezza Ogni insieme convesso di numeri reali è un intervallo.

Con questo assioma, le prove delle proprietà "dure" delle funzioni continue, come la loro limitatezza su intervalli chiusi e la loro integrabilità, sono alla portata della maggior parte degli studenti del primo anno.

Sebbene l'approccio con il "*punto di transizione*" abbia alcuni svantaggi computazionali, consente di presentare una definizione logicamente completa, con una motivazione geometrica e fisica alla fine di un'ora di lezione. (Il capitolo 1 è una lezione del genere.) Questo approccio, accoppiato con un pronto approccio intuitivo ai limiti per la loro potenza di calcolo, consente di ritardare l'introduzione rigorosa dei limiti fino a più tardi nel corso quando gli studenti sono pronti per loro e quando i limiti risultano essere davvero necessari per gli argomenti come la regola di L'Hopital, gli integrali impropri e i seni infiniti.

I limiti sono così importanti in matematica che non possono essere ignorati in nessun corso di calcolo. Si è tentati di introdurli in anticipo perché sono semplici da usare nei calcoli, ma la sottigliezza del concetto di limite spesso induce gli studenti principianti a sentirsi a disagio sulle basi del calcolo. Le transizioni, al contrario, forniscono definizioni concettualmente semplici della derivata e dell'integrale, ma sono piuttosto complicate da usare nei calcoli. Fortunatamente, non è necessario eseguire molti calcoli direttamente dalla definizione. La grande "macchina" di Newton e Leibniz ci consente di calcolare le derivate con una procedura indipendente dalla particolare forma della definizione che viene utilizzata.

Sebbene le nostre ragioni per usare il metodo delle transizioni derivino principalmente dal cercare di rendere il calcolo più facile da imparare, abbiamo anche un'altra ragione. Molti matematici si sono lamentati del fatto che il calcolo fornisce un'immagine distorta della matematica moderna, con enfasi totale sull' "*analisi*". Speriamo che l'uso delle transizioni risponda in parte a questa lamentela. Offre un migliore equilibrio tra le varie discipline della matematica e offre allo studente un'immagine più accurata di cosa sia la matematica moderna.

Abbiamo detto che il concetto di transizione è importante di per sé, e abbiamo fornito alcuni esempi non matematici che implicano cambiamenti improvvisi. Sebbene la nozione di transizione sia costruita nel calcolo differenziale e integrale, le tecniche classiche di calcolo (limiti, le regole del calcolo e così via) si sono rivelate insufficienti come strumento per studiare molti fenomeni discontinui. Tali fenomeni sono eventi comuni nella biologia e nelle scienze sociali e comprendono, per esempio, le rivoluzioni, la nascita e la morte. Questi eventi possono essere tutti descritti come transizioni.

I matematici contemporanei hanno prestato sempre più attenzione ai fenomeni discontinui e ad una descrizione geometrica o qualitativa della natura. In biologia e sociologia questo aspetto è un complemento importante di un'analisi quantitativa. L'enfasi sulle transizioni è in parte ispirata alla convinzione che questo concetto avrà un ruolo sempre più importante nelle applicazioni della matematica.[2]

---

2 Di particolare interesse in questa direzione è la teoria delle catastrofi introdotta dal matematico francese Rene Thorn nel suo libro "*Structural Stability and Morphogenesis*" (Benjamin, 1975). Il libro di Thorn è in qualche modo di natura filosofica, ma nei libri si possono trovare applicazioni più concrete della teoria delle catastrofi: E. C. Zeeman, Catastrophe Theory: Selected Papers 1972-1977 (Addison-Wesley, 1977); T. Poston e I. Stewart, Catastrophe Theory e le sue applicazioni (Fearon-Pitman, 1978). Le applicazioni alle scienze biologiche e sociali hanno ricevuto critiche piuttosto aspre; la principale carta critica, di H. J. Sussmann e R. S. Zahler, è "Teoria della catastrofe applicata alle scienze sociali e biologiche: una critica", Synthese 37 (1978), 117-216. Un resoconto generale della controversia è riportato in A. Woodcock e M. Davis, Catastrophe Theory (Dutton, 1978).