Aumento e Decrescita in un punto

(pag. 62-66)

Intuitivamente, se diciamo che $f(x)$ sta aumentando con x a x_0, intendiamo che quando x è aumentato un po', anche $f(x)$ aumenta; e quando x è diminuito un po', $f(x)$ diminuisce. Osserviamo la Fig. 5.5 per vedere perché diciamo "un po '".

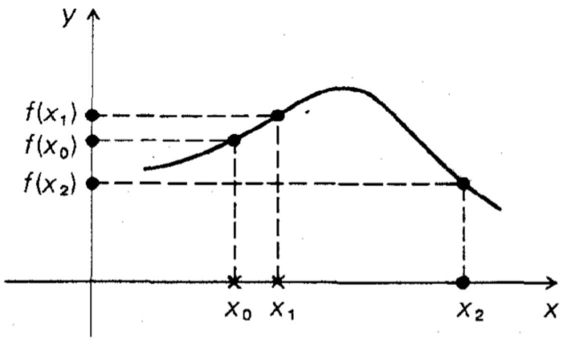

Fig. 5.5
x_1 è leggermente superiore a x_0 e $f(x_1) > f(x_0)$; x_2 è molto maggiore di x_0 e ora $f(x_2) < f(x_0)$.

Definizione Sia f una funzione il cui dominio contiene un intervallo aperto di x_0 .

1. si dice che f è *cresce* in x_0 se il grafico di f supera la linea orizzontale attraverso $(x_{0,} f(x_0))$ in x_0 .
2. si dice che f è *decrescente* in x_0 se il grafico di f viene superato dalla linea in x_0 . (Vedi Fig. 5.6.)

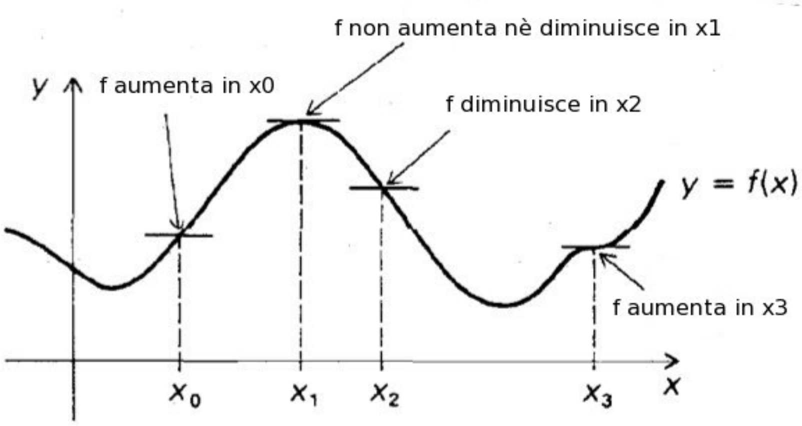

Fig. 5.6.
Dov'è che f aumenta e decresce?

Quindi, f sta aumentando in x_0 se e solo se $f(x) - f(x_0)$ cambia segno da negativo a positivo a x_0 . Allo stesso modo, f sta diminuendo se e solo se $f(x) - f(x_0)$ cambia segno da positivo a negativo a x_0 .

Se sostituiamo la definizione di "sorpasso" ("*overtaking*") nella definizione di aumento, otteniamo la seguente riformulazione equivalente.

Definizione Sia f una funzione il cui dominio contiene un intervallo aperto di x_0 .

1. si dice che f *aumenta* in x_0 se vi è un intervallo aperto I di x_0 tale che:
   - $f(x)<f(x_0)$ per $x<x_0$ in I .
   - $f(x)>f(x_0)$ per $x>x_0$ in I .

2. si dice che f *diminuisce* in x_0 se vi è un intervallo aperto I di x_0 tale che:
   - $f(x)>f(x_0)$ per $x<x_0$ in I .
   - $f(x)<f(x_0)$ per $x>x_0$ in I .

Parlando in modo pittorico, una funzione f sta aumentando in x_0 quando spostando x un po' a sinistra di x_0 diminuisce il valore di $f(x)$ mentre se si sposta x un po' a destra di x_0 il valore di $f(x)$ aumenta. (L'opposto accade se la funzione è decrescente a x_0 .)

Esempio di lavoro 3 Mostra che $f(x)=x^2$ sta aumentando in $x_2=2$.

Soluzione Lascia che I sia (1,3). Se $x<x_0\in I$, abbiamo $1<x<2$, quindi $f(x)=x^2<4=x_0^2$. Se $x>x_0\in I$, quindi $2<x<3$, e così $f(x)=x^2>4=x_0^2$. Abbiamo verificato entrambi i punti della parte 1 della Definizione precedente, quindi f sta aumentando a 2.

La definizione di transizione della derivata di f in x_0 ci dice quali linee sorpassano e vengono sorpassate dal grafico di f in x_0 . Questo porta al prossimo teorema.

Teorema 3 Sia f differenziabile in x_0 .

1. Se $f'(x_0)>0$, allora f sta aumentando in x_0 .
2. Se $f'(x_0)<0$, allora f sta diminuendo in x_0 .
3. Se $f'(x_0)=0$, allora f potrebbe aumentare in x_0 , diminuire in x_0 , o nessuno dei due.

Dimostrazione

Dimostreremo le parti 1 e 3; la dimostrazione della parte 2 è simile a quella della 1.
La definizione della derivata, come formulata nel Teorema 4, del Capitolo 2, include l'affermazione che qualsiasi linea attraverso $(x_{0,}f(x_0))$ la cui pendenza sia minore di $f'(x_0)$ viene superata dal grafico di f in x_0 . Se $f'(x_0)>0$, la linea orizzontale che attraversa $(x_{0,}f(x_0))$, la cui pendenza è 0, deve essere superata dal grafico di f in x_0 ; quindi f sta aumentando in x_0 , per definizione.
Le funzioni x^3 , $-x^3$ e x^2 , tutte con derivata 0 in $x_0=0$, stabiliscono la parte 3; si veda l'Esercizio risolto 15.

Quanto segue è un'altra prova del Teorema 3 che utilizza direttamente la definizione originale della derivata nel Capitolo 1.

Dimostrazione alternativa Dalla condizione 1 della definizione della derivata (p.6), sappiamo che se $m<f'(x_0)$ allora la funzione $f(x)-[f(x_0)+m(x-x_0)]$ cambia segno da negativo a positivo in x_0 . Quindi se $0<f'(x_0)$, allora potremmo scegliere $m=0$ e concludere che $f(x)-f(x_0)$ cambia segno da negativo a positivo in x_0 ; cioè, f sta aumentando in x_0 . Questo stabilisce la parte 1 del Teorema. La parte 2 è simile e le funzioni x^3 , $-x^3$ e x^2 stabiliscono la parte 3 come nella prima prova.

Esempio di lavoro 4 $x^5-x^3-2x^2$ aumenta o diminuisce in -2?

Soluzione Lasciando $f(x)=x^5-x^3-2x^2$, abbiamo $f'(x)=5x^4-3x^2-4x$ e $f'(-2)=5(-2)^4-3(-2)^2-4(-2)=80-12+8=76$, che è positivo. Per il Teorema 3 parte 3, $x^5-x^3-2x^2$ aumenta in -2.

Il teorema 3 può essere interpretato geometricamente: se l'approssimazione lineare a f in x_0 (cioè la linea tangente) è una funzione crescente o decrescente, allora f stesso aumenta o diminuisce in x_0 .Se la linea tangente è orizzontale, il comportamento di f in x_0 non è determinato dalla linea tangente. (Vedi Fig. 5.7.)

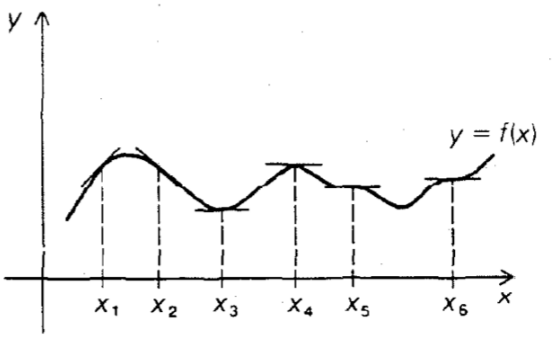

Fig 5.7.
$f'(x_1)>0$; f è crescente in x_1
$f'(x_2)<0$; f è decrescente in x_2
$f'(x_3)=f'(x_4)=0$; f non è né crescente né decrescente in x_3 e in x_4
$f'(x_5)=0$; f è decrescente in x_5
$f'(x_6)=0$; f è crescente in x_6

Possiamo anche interpretare il Teorema 3 in termini di velocità. Se $f(t)$ è la posizione di una particella sulla linea dei numeri reali al tempo t , e $f'(t_0)>0$, allora la particella si sposta verso destra all'istante t_0 ; se $f'(t_0)<0$, la particella si sposta a sinistra.

Combinato con le tecniche di differenziazione del Capitolo 3, il Teorema 3 fornisce un mezzo efficace per decidere dove una funzione sta aumentando o diminuendo.

ESERCIZI RISOLTI (salto pag. 66)

Aumento e Decrescita in un intervallo

(pag. 66-69)

Supponiamo che f sia in aumento in ogni punto di un intervallo $[a,b]$. Ci si aspetterebbe che $f(b)$ sia più grande di $f(a)$. In effetti, abbiamo il seguente risultato utile.

Teorema 4 Sia f una funzione continua su $[a,b]$, dove $a<b$, e supponiamo che f stia aumentando [diminuendo] in tutti i punti di (a,b) .
Quindi $f(b)>f(a)$ [$f(b)<f(a)$].

L'enunciato del Teorema 4 può sembrare tautologica - cioè "banalmente vera" - ma in realtà richiede una dimostrazione (che verrà data a breve). Come il teorema del valor medio, il Teorema 4 collega una proprietà locale di funzioni (crescenti in ciascun punto di un intervallo) con una proprietà globale (relazione tra i valori della funzione nei punti finali). Non insistiamo sul fatto che f aumenti o diminuisca in a o b perché desideriamo che il teorema si applichi nei casi del tipo illustrato in Fig. 5.8. Notiamo poi che se f non è continuo, il risultato non è valido (vedi Fig. 5-9).

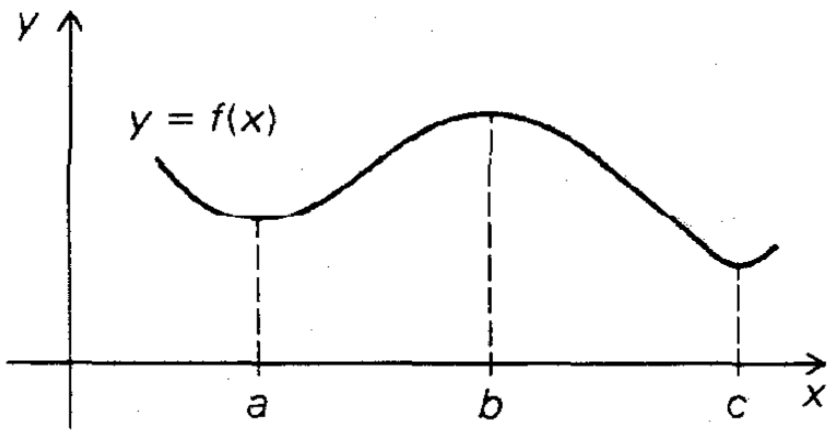

Fig. 5.8. f è crescente in ogni punto di (a,b) ; $f(b)>f(a)$
f è decrescente in ogni punto di (b,c) ; $f(c)<f(b)$
f non è né crescente né decrescente in a,b,c

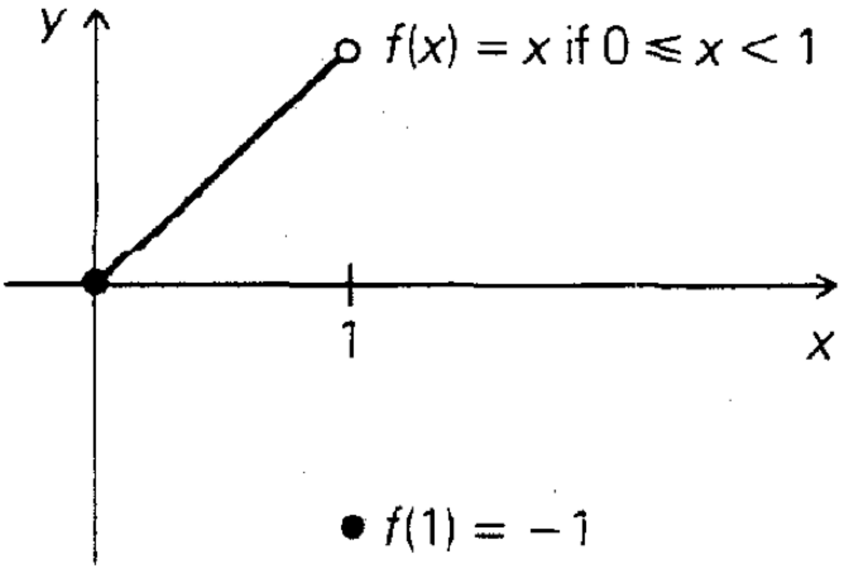

Fig. 5.9. f è crescente in ogni punto di $(0,1)$, ma $f(1)$ non è più grande di $f(0)$.

Dimostrazione del Teorema 4 Procediamo in diversi passaggi.

Passaggio 1 Se $a<x<y<b$, allora $f(x)<f(y)$.

Per dimostrarlo, scegliamo un qualsiasi $x\in(a,b)$ e definiamo S come l'insieme di tutti quelli $y\in(a,b)$ per cui $f(x)<f(z)$, per tutti gli $z\in]x,y]$. Se possiamo mostrare che $S=(x,b)$, allora per ogni y tale che $x<y<b$ avremo $y\in S$, quindi $f(x)<f(z)$ per tutte le $z\in]x,y]$; in particolare avremo $f(x)<f(y)$.

Procediamo per mostrare che $S=(x,b)$. Con lo stesso tipo di argomento usato nella dimostrazione del teorema del valor medio (nella versione alternativa) è facile dimostrare che S è convesso. Per l'assioma di completezza, S è un intervallo. Dato che f sta crescendo in x , S contiene tutti i punti sufficientemente vicini a x e alla destra di x , quindi x è il punto finale di sinistra di S . Così $S=(x,c)$ o $]x,c]$ per qualche c , $c\le b$.

Supponiamo che $c<b$. Allora f sta aumentando in c , quindi possiamo

trovare i punti p e q in modo tale che:

$$x<p<c<q<b \quad (1)$$

$$f(y)<f(c) \text{ per ogni } y\in(p,c) \quad (2)$$

$$f(c)<f(y) \text{ per ogni } y\in(c,q) \quad (3)$$

Poiché $S=(x,c)$, abbiamo $f(x)<f(y)$ per tutti gli $y\in(p,c)$. Per (2), abbiamo $f(x)<f(c)$; da (3), abbiamo quindi $f(x)<f(y)$ per tutti gli $y\in(c,q)$. Quindi, abbiamo $f(x)<f(y)$ per tutti $y\in(x,c)$ e $[c,q)$, quindi $f(x)<f$ on (x,q) , cioè $f(x)<f(y)$ per tutti gli $y\in(x,q)$. Quindi S contiene punti a destra di c , contraddicendo il fatto che c è l'estremità destra di S . Quindi c deve essere uguale a b , e quindi $S=(x,b)$.

Si noti che non abbiamo ancora utilizzato la continuità di f in a e b . (Vedi il corollario sotto).

Passaggio 2 Se $y\in(a,b)$, quindi $f(a)\leq f(y)$ e $f(y)\leq f(b)$.

Per dimostrare che $f(a)\leq f(y)$, assumiamo il contrario, vale a dire $f(a)>f(y)$, e deriviamo una contraddizione. Infatti, se $f(a)>f(y)$ per qualche $y\in(a,b)$, la continuità di f in a implica che $f>f(y)$ su un certo intervallo $[a,r)$. Scegliendo $x\in(a,r)$ tale che $x<y$, abbiamo $f(x)>f(y)$, contraddicendo il passo 1. Usando la continuità di f in b , possiamo dimostrare in modo simile che $f(y)\leq f(b)$.

Passaggio 3 Se $y\in(a,b)$, quindi $f(a)<f(y)$ e $f(y)<f(b)$.

Per dimostrare che $f(a)<f(y)$, scegliamo qualsiasi x tra a e y (ad esempio, $x=1/2(a+y)$). Con il passo 1, $f(x)<f(y)$; dal punto 2, $f(a)\leq f(x)$. Quindi $f(a)\leq f(x)<f(y)$ e $f(a)<f(y)$. Allo stesso modo, dimostriamo $f(y)<f(b)$.

Passaggio 4 $f(a)<f(b)$.

Scegli qualsiasi $y\in(a,b)$. Con il passaggio 3, $f(a)<f(y)$ e $f(y)<f(b)$, quindi $f(a)<f(b)$.

Ora riformuleremo il Teorema 4. La seguente terminologia sarà conveniente.

Definizione Sia f una funzione definita su un intervallo I . Se $f(x_1)<f(x_2)$ per tutti $x_1<x_2\in I$, diciamo che f sta aumentando su I . Se $f(x_1)>f(x_2)$ per tutti $x_1<x_2\in I$, diciamo che f sta diminuendo su I . Se f è sia crescente che decrescente su I , diremo che f è monotona su I .

Teorema 4 ' Sia f continua su $[a,b]$ e crescente [decrescente] in tutti i punti di (a,b) . Allora f è crescente [decrescente] su $[a,b]$.

Ad esempio, la funzione in Fig. 5.8. è monotona su $[a,b]$ e monotona su $[b,c]$, ma non è monotona su $[a,c]$. La funzione $f(x)=x^2$ è monotona su $(-\infty,0)$ e $(0,\infty)$, ma non su $(-\infty,\infty)$. (Disegna uno schizzo per convincere te stesso).

La combinazione dei Teoremi 3 e 4' con il Teorema del valor medio fornisce un risultato utile per la rappresentazione grafica.

Teorema 5 Supponiamo che:

1. f sia continua su $[a,b]$.
2. f sia differenziabile su (a,b) e f' sia continua su (a,b) .
3. f' non sia mai zero su (a,b) .

Allora f è monotona su $[a,b]$. Per verificare se f sta aumentando o diminuendo su $[a,b]$ è sufficiente calcolare il valore di f' in qualsiasi punto di (a,b) e vedere se è positivo o negativo.

Dimostrazione[1] Per il teorema del valor medio, f' deve essere positiva ovunque su (a,b) o negativo ovunque su (a,b) . (Se f' ha valori con entrambi i segni, dovrebbe essere zero da qualche parte nel mezzo). Se f' è positivo ovunque, f sta aumentando in ogni punto di (a,b) per il Teorema 3. Per il Teorema 4', f sta aumentando su $[a,b]$. Se f' è negativo ovunque, f sta diminuendo su $[a,b]$.

Possiamo anche applicare il Teorema 5 a intervalli che non sono chiusi.

Corollario Supponiamo che:

1. f sia continuo su un intervallo aperto (a,b) .
2. f sia differenziabile e f' sia continua in ogni punto di (a,b) .
3. f' non sia zero in nessun punto di (a,b) .

Allora f è monotona su (a,b) (crescente se $f'>0$, diminuendo if $f'<0$).

Dimostrazione Per il teorema del valor medio, f' è ovunque positivo o dappertutto negativo su (a,b) . Supponiamo che sia ovunque positivo. Siano $x_1<x_2$ in (a,b) . Potremmo applicare i Teoremi 3 e 4 a f su $[x_1, x_2]$ e concludere che $f(x_1)<f(x_2)$. Quindi f sta crescendo su (a,b) . Allo stesso modo, se f' è ovunque negativo su (a,b) , f sta diminuendo su (a,b) .

Dichiarazioni simili valgono per intervalli semiaperti $[a,b)$ o $(a,b]$.

Le applicazioni di questi risultati alla forma dei grafici saranno fornite nel prossimo capitolo.

1 Il Teorema 5 è ancora vero se f' non è continuo; vedere il problema 10 del capitolo 7.