# UNA PROPOSTA DIDATTICA

## come e perché insegnare gli integrali

*di Marco Bramanti**

*Gli integrali sono il tradizionale argomento conclusivo della matematica al liceo scientifico, tradizionale non solo come contenuto, ma anche come prassi definitoria. Tuttavia l'«apparentamento» dell'integrale con la funzione primitiva, presenta un certo rischio di confondere i due concetti. L'autore, sgombrato il campo da vari equivoci di questo tipo, propone, rivolgendosi ai docenti, una definizione alternativa a quella consueta che utilizza le somme superiori e inferiori, mediante le somme di Cauchy-Riemann. Oltre a presentare vantaggi didattici immediati, costituisce la base dei metodi di integrazione numerica, fondamentali quando si esce dal ristretto campo delle funzioni di cui può scrivere una primitiva.*

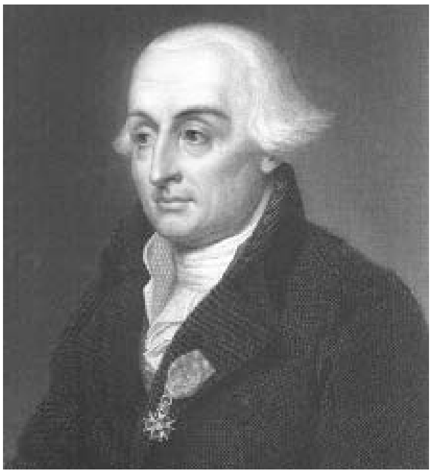
*Professore di Analisi Matematica, Politecnico di Milano.

Tra gli argomenti di analisi matematica che si insegnano nell'ultimo anno dei licei scientifici (e altre scuole), la derivata e l'integrale sono certamente i due elementi fondamentali in vista della formazione matematica e scientifica degli studenti: tutte le discipline scientifiche più matematizzate infatti sono scritte fin dall'inizio col linguaggio di derivate e integrali.

Dal punto di vista didattico tuttavia esistono differenze rilevanti tra i due argomenti. Il concetto di derivata ha uno «*status* didattico» assolutamente standardizzato e che non dà particolari problemi: la definizione è la stessa su tutti i libri di testo ed è molto sintetica (una volta assimilato il concetto di limite), tanto da poter essere correttamente verbalizzata come slogan: «la derivata è il limite del rapporto incrementale»; alla definizione si legano immediatamente due interpretazioni: quella geometrica, come coefficiente angolare della retta tangente, e quella cinematica, come velocità istantanea di variazione di una grandezza.

Queste due idee sono entrambe abbastanza intuitive, entrambe facilmente collegabili con la definizione analitica, entrambe utili nelle applicazioni. Certamente proseguendo

Joseph Louis Lagrange (1736-1813)



nello studio del calcolo differenziale si possono incontrare delle difficoltà, come sempre nella matematica, tuttavia sicuramente uno studente di liceo nel suo percorso ha incontrato argomenti ben più ostici del teorema di Rolle o di Lagrange.
Per l'integrale la situazione è un po' diversa. La definizione di questo concetto *non è unica*: esistono almeno due possibili presentazioni, quella «estremo superiore delle somme inferiori/estremo inferiore delle somme superiori» e quella «limite di una successione di somme di Cauchy-Riemann». La definizione è lunga, probabilmente la più lunga definizione matematica che si insegni a scuola. Intendo dire con questo che se vogliamo scrivere in formule cos'è l'integrale definito di una funzione, definendo con precisione le varie notazioni usate, questo non si può fare su una sola riga come per derivate, limiti o altri concetti, ma richiede «almeno una lavagna». L'idea intuitiva solitamente associata a questo concetto è una sola, quella geometrica: area (con segno) sotto una curva.
Tuttavia, quest'idea intuitiva non ha un legame immediato con le applicazioni fisiche di questo concetto: per esempio, non è ovvio che lo spazio percorso in un certo tempo da un punto di velocità variabile sia l'area sotto la curva della velocità. Infine, la teoria dell'integrazione è delicata, difficile e, diciamolo pure, pesante, se la si vuole sviluppare con rigore nel suo apparato dimostrativo. Si finisce spesso infatti per dimostrare poco o nulla dei risultati enunciati, e non solo per mancanza di tempo, ma perché l'approccio rigoroso in questo campo fa un po' paura.
Tutto ciò non significa necessariamente che questo argomento sia percepito come *difficile* da studenti e insegnanti; solitamente gli insegnanti adottano un percorso ben collaudato, e gli studenti lo seguono come ne seguono altri.
Tuttavia, a mio parere c'è almeno il rischio che accada quanto segue:

- lo studente impara a «calcolare» gli integrali definiti, dimenticandosi «che cosa sono»;
- riguardo al «che cos'è l'integrale definito» lo studente trattiene esclusivamente l'idea intuitiva «l'integrale è l'area sotto la curva»;
- quando nello studio della fisica o altre discipline lo studente incontra un'affermazione del tipo «questa grandezza fisica è l'integrale di quest'altra», fa fatica a capire perché è così;
- lo studente fa confusione tra i tre concetti di integrale definito, integrale indefinito, funzione integrale.

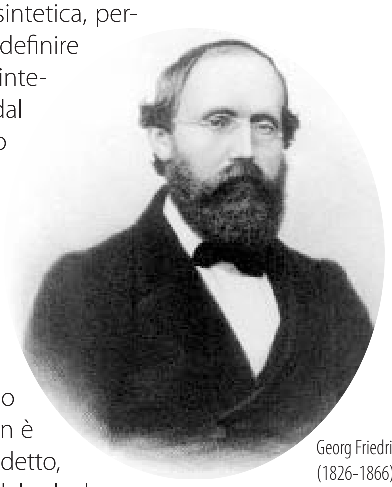
Credo perciò che una riflessione didattica sull'insegnamento del calcolo integrale a scuola non sia superflua.
Presenterò quindi qualche riflessione e qualche proposta didattica su questo argomento, stimolate sia dall'esperienza di insegnamento in università (a studenti che essendo all'inizio del percorso universitario non sono così diversi da quelli che stanno finendo la scuola), sia da contatti e chiacchierate con insegnanti e studenti di scuola superiore.

## La definizione di integrale definito: idee e motivazioni

Qual è l'idea sintetica che vorremmo che i nostri studenti trattenessero, riguardo al concetto di integrale definito?
Alcuni possibili slogan di questo tipo sono:

- l'integrale è l'inverso della derivata;
- l'integrale è un'area (o: «è l'area sotto la curva...»);
- l'integrale è un limite di somme (di Cauchy-Riemann);
- l'integrale è il *sup* delle somme inferiori e l'*inf* delle somme superiori, quando coincidono.

Discutiamone. Naturalmente la prima è scorretta. È l'integrale indefinito, oppure la funzione integrale (in un certo senso) a potersi vedere come l'inverso della derivata.
Anche la seconda è da evitare come definizione sintetica, perché capovolge la logica del discorso: è proprio per definire l'area sotto una curva che si inventa l'integrale, ma l'integrale stesso deve avere una definizione autonoma dal suo significato geometrico. Casomai, quindi, questo può essere accettabile come slogan-proprietà, ma non come slogan-definizione.
La terza e la quarta sono entrambe corrette.
Quale scegliere? Tradizionalmente si sceglie la quarta; la mia convinzione è che sia preferibile invece scegliere la terza; questa è dunque la mia prima proposta didattica. La motivazione di una scelta dipende naturalmente da cosa vogliamo. A scanso di equivoci, dirò subito che ciò che mi interessa non è presentare la teoria in modo più rigoroso: come già detto, il calcolo integrale è la parte più difficile e delicata del calcolo infinitesimale; dimostrare tutto è difficile, probabilmente a scuola non lo si farà. Se si decide di rinunciare a dimostrare tutto, tanto vale che il criterio di scelta su come presentare un concetto abbia almeno qualche altro vantaggio. Cominciamo dunque a richiamare brevemente[1] la definizione a cui mi riferisco, per poi commentarla.
Si considera la classe delle funzioni limitate definite su un intervallo limitato $I$.
Per una funzione $f$ di questo tipo, si costruisce una successione $s_n$ di somme di Cauchy-Riemann, al seguente modo.
Si suddivide l'intervallo $I$ in $n$ intervallini (di ampiezze uguali o differenti)[2]; si moltiplica la lunghezza di ogni intervallino per il valore assunto dalla funzione in un punto di quell'intervallino, scelto arbitrariamente; si sommano gli n prodotti così ottenuti. Ora si fa tendere $n$ a infinito; se la successione $s_n$ ammette limite finito, e se inoltre questo limite non dipende da come sono stati scelti, a ogni passo della costruzione, gli n punti arbitrari negli $n$ intervallini, diremo che la funzione $f$ è integrabile, e chiameremo il limite trovato «integrale definito di f sull'intervallo $I$».



Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

[1] In questo articolo la definizione viene ricordata in modo puramente discorsivo, naturalmente nell'insegnamento va formalizzata con simboli opportuni.
[2] Se sono uguali, le formule risultano più semplici; occorre però rinunciare a dimostrare che l'integrale è additivo rispetto all'intervallo di integrazione (cosa che per questa via sarebbe proibitiva, mentre è facile se fin dall'inizio si consente agli intervallini di avere lunghezze diverse). Questa mancata dimostrazione probabilmente non lascerà gravi rimpianti.

## Caratteristiche e pregi

Quali sono le caratteristiche e i pregi che vedo in questa definizione?
Anzitutto è ragionevolmente breve, rispetto a quella con somme inferiori e superiori. In secondo luogo, il limite di una successione è un concetto più operativo-algoritmico rispetto all'estremo superiore o inferiore. Se si vuole illustrare come si può calcolare il valore approssimato di un integrale mediante il computer (e sarebbe istruttivo farlo), questa definizione è immediatamente traducibile in algoritmo (metodo dei rettangoli), l'altra no. A sua volta, questo aspetto numerico mi sembra istruttivo anche per il seguente motivo. La definizione di integrale viene normalmente descritta come «poco adatta al calcolo effettivo degli integrali»; per questo scopo si cerca una primitiva della funzione e si applica la formula di Torricelli-Barrow, vera *star* di questa teoria. Nella pratica, però, di molte funzioni non sappiamo trovare una primitiva; in tal caso è possibile comunque un calcolo numerico approssimato dell'integrale, calcolo che si fa, guarda caso, proprio applicando quella scomoda definizione. Se l'integrale è un limite di somme di Cauchy-Riemann, quindi, la definizione non è posta all'inizio della teoria per poi essere dimenticata; è ben presente anche nel calcolo numerico approssimato.
Un altro punto che vorrei evidenziare è il seguente. Le somme di Cauchy-Riemann traducono bene il ragionamento fisico che si fa, per esempio, per calcolare lo spazio percorso in un certo intervallo di tempo da un punto che si muove con velocità variabile: «suddividiamo l'intervallo di tempo in tanti intervallini; se ciascun intervallino è abbastanza breve, durante ciascuno di essi il punto non cambierà di molto la propria velocità; se allora calcoliamo la velocità del punto in un istante arbitrario dell'intervallino, la moltiplichiamo per la durata dell'intervallino, e sommiamo i vari contributi, troviamo lo spazio che percorrerebbe un punto che si muovesse a *scatti* (o meglio *con velocità costante a tratti*), con una velocità che non è mai troppo diversa da quella che il nostro oggetto ha in realtà. Si capisce che all'infittirsi della suddivisione troveremo proprio lo spazio percorso».
Questo è solo un esempio: analogo ragionamento si può fare per mostrare che la massa totale di una sbarra non omogenea è l'integrale della sua densità lineare, o che la quantità di carica che attraversa una sezione di un filo conduttore in un dato intervallo di tempo è l'integrale dell'intensità di corrente elettrica. Ciò su cui mi preme insistere è il fatto che in tutti i ragionamenti fisici in cui si capisce che una certa grandezza è l'integrale definito di un'altra, il ragionamento chiarificatore è quello mediante le somme di Cauchy-Riemann e il limite di tali somme; non il ricorso all'estremo superiore delle somme inferiori, né quello all'area sotto la curva (casomai, è «dopo» aver capito che la massa è l'integrale della densità che si può affermare che è anche l'area sotto la curva della densità, ma questo non è certo evidente a priori).
Le somme di Cauchy-Riemann, a ogni modo, traducono anche il tanto ama-

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

to concetto di area sotto il grafico di una funzione. In altre parole, non sto proponendo di dimenticare l'integrale come area (tutt'al più di non spacciare l'area come definizione di integrale). A differenza dell'approccio mediante le somme inferiori e superiori, che arriva all'area mediante approssimazioni per difetto e per eccesso, l'idea qui è di dare a ogni passo della costruzione iterativa un'approssimazione dell'area che rappresenti un compromesso tra quella per difetto e quella per eccesso: infatti, ogni somma di Cauchy-Riemann è compresa tra la somma inferiore e superiore relative a quella particolare suddivisione. Questo è un punto di vista diverso, ma certamente anch'esso intuitivo. Occorre convincersi che seguendo questa strada non perdiamo nulla sul fronte del significato geometrico di integrale.[3]

Infine, anche se questo come ho dichiarato sopra non è il mio obiettivo principale, questa definizione permette di dimostrare almeno alcune delle proprietà dell'integrale in modo molto semplice: la linearità e la monotonia dell'integrale, per esempio, seguono immediatamente dalle analoghe proprietà dei limiti di successioni, che lo studente conosce già. Da questi fatti segue anche il teorema della media, mentre al teorema fondamentale del calcolo integrale dedicherò poi una riflessione più specifica. Se il tempo consente di fare qualche ulteriore applicazione geometrica dell'integrale, la formula di calcolo per la «lunghezza del grafico» di una funzione regolare si ottiene in modo pulito a partire dalla definizione di integrale come limite di somme: si calcola la lunghezza di una poligonale inscritta nella curva, si applica il teorema di Lagrange su ogni intervallino e si trova esattamente una somma di Cauchy-Riemann di $\sqrt{1+f'(x)^2}$ . Perciò l'integrale di questa funzione risulta uguale al limite delle lunghezze delle poligonali inscritte nel grafico, limite che è molto intuitivo prendere come definizione stessa di lunghezza della curva.

[3] Un argomento a favore della definizione mediante somme superiori e inferiori è invece il fatto che lo studente potrebbe aver già incontrato l'idea di approssimazione per eccesso e per difetto dell'area di una figura curvilinea nello studio del cerchio (approssimazione mediante poligoni regolari inscritti e circoscritti). Se è così, può essere utile, una volta introdotto l'integrale al modo descritto, accennare velocemente al fatto che una *definizione equivalente* di integrale si ottiene definendo le somme inferiori e superiori e richiedendo che queste coincidano. A questo modo si mostra l'unità concettuale tra l'argomentazione seguita nello studio dell'area del cerchio e il calcolo di aree mediante integrali.

## Teorema fondamentale del calcolo e funzioni integrali

Uno snodo fondamentale del discorso sugli integrali definiti è il teorema fondamentale del calcolo integrale. Con questo nome si intendono in realtà due cose diverse: la formula di Torricelli-Barrow (l'integrale definito di una funzione si calcola come differenza di una primitiva dell'integranda agli estremi dell'intervallo), e il teorema che afferma che la derivata della funzione integrale (se l'integranda è continua) coincide con l'integranda, valutata nel punto in cui si calcola la derivata. Chiamerò questi due enunciati, rispettivamente, primo e secondo teorema fondamentale del calcolo integrale.

Nella presentazione standard della teoria, dopo la definizione e le prime proprietà dell'integrale definito, si introduce il concetto di funzione integrale, quindi si dimostra il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale, infine se ne deduce il primo.

La mia proposta è di modificare questo percorso come segue.

Isaac Barrow (1630-1677)

Dopo la definizione e le prime proprietà dell'integrale, si dimostra il primo teorema fondamentale del calcolo integrale, nel modo che illustrerò, che non utilizza né il concetto di funzione integrale né il secondo teorema fondamentale. A questo punto si apre il capitolo dei metodi di integrazione. Più avanti, se lo si ritiene opportuno, si introdurrà il concetto di funzione integrale (come un concetto un po' più avanzato della teoria), e si dimostrerà il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale.
La dimostrazione «diretta» del primo teorema fondamentale, a cui ho accennato, è riportata qui di seguito.

**Teorema**
Sia $f : [a,b] \to R$ una funzione continua, e sia $G$ una sua primitiva in $[a,b]$. Allora

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

**Dimostrazione**
Suddividiamo $[a,b]$ in $n$ intervallini, come nella definizione di integrale, mediante i punti

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

e scriviamo:

$$G(b)-G(a) = G(x_n)-G(x_0) = [G(x_n)-G(x_{n-1})]+[G(x_{n-1})-G(x_{n-2})]+\ldots+[G(x_1)-G(x_0)]$$

Applichiamo ora il Teorema di Lagrange a $G$ su ogni intervallo $[x_{k-1}, x_k]$.

Esisterà $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ per cui si ha

$$G(x_k)-G(x_{k-1}) = G'(t_k)(x_k - x_{k-1}) = f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

dunque

$$G(b) - G(a) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) = s_n$$

dove $s_n$ è una somma di Cauchy-Riemann di $f$. Per $n \to \infty$, si ottiene

$$G(b)-G(a) = \int_a^b f(x)dx,$$

che è la tesi.

Farò ora alcuni commenti a motivazione della mia proposta. A mio parere l'utilizzo della funzione integrale per dimostrare questo teorema è, un po' come l'uso di somme superiori e inferiori, più un ossequio alla tradizione che una reale necessità didattica. La funzione integrale a questo modo viene precocemente introdotta nella teoria, aggiungendosi come terzo concetto a quelli di integrale definito e indefinito, con tutti i rischi di confusioni che ne nascono, e viene introdotta come pura e semplice funzione ausiliaria, strumentale alla dimostrazione del primo teorema fondamentale del calcolo.
Mi sembra concettualmente più semplice presentare, dopo la definizione e le prime proprietà dell'integrale definito, questo teorema dimostrato direttamente, evitando in un primo tempo di introdurre la funzione integrale.
Quando si saranno sviluppati i metodi di calcolo delle primitive e si saran-

no consolidati gli aspetti fondamentali di questo argomento, se il tempo consente di fare ulteriori approfondimenti, si potrà procedere in varie altre direzioni, per esempio una o più d'una delle seguenti:

- applicazioni geometriche del calcolo integrale (volume o superficie di un solido di rotazione, lunghezza del grafico di una funzione);
- integrali generalizzati;
- funzioni integrali;
- metodi numerici per il calcolo approssimato degli integrali.

Intendo dire che le funzioni integrali, per importanti che siano, lo sono al pari di vari altri argomenti, e non fanno parte dell'irrinunciabile. Se si decide di insegnare le funzioni integrali (e quindi in particolare si dimostra il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale), occorre inoltre dare delle motivazioni ulteriori per lo studio di questo concetto, affinché non sembri un puro capriccio matematico («vediamo cosa succede se uno degli estremi dell'integrale viene fatto variare»). Tra le motivazioni elementari, c'è quella di tipo cinematico (spazio percorso in funzione del tempo, per un oggetto che si muove con velocità variabile) o fisico, in generale. Altra motivazione è il concetto di funzione di ripartizione di una variabile aleatoria continua, ammesso che si insegni la probabilità e si arrivi ad accennare alle variabili continue, o quel caso particolare del concetto precedente che è la funzione degli errori. Questo presuppone aver parlato di integrali generalizzati e di funzioni integrali in cui l'estremo fisso di integrazione è $-\infty$.


Evangelista Torricelli (1608-1647)

Ancora, per fare apprezzare il concetto di funzione integrale bisogna mostrare esempi significativi in cui, come avviene per la Gaussiana $\exp(-t^2/2)$ che compare nella funzione degli errori, non si sa calcolare una primitiva dell'integranda. Solo così infatti si può evidenziare che il concetto di funzione integrale ci dà un modo per costruire nuove funzioni, allargando l'universo delle funzioni elementari che solitamente consideriamo. La tabulazione e rappresentazione grafica di funzioni di questo tipo mediante il computer dovrebbero poi convincere che si tratti di «vere funzioni», esattamente come quelle a cui siamo abituati.

Vorrei fare un'ultima osservazione sul teorema fondamentale del calcolo integrale. Comunque lo si dimostri, esso presuppone il risultato (che a scuola solitamente non si dimostra) che afferma l'integrabilità delle funzioni continue. Infatti, se lo si dimostra «al solito modo» passando attraverso il concetto di funzione integrale, occorre sapere che la funzione integrale di un'integranda continua esiste. Se lo si dimostra come ho proposto sopra, si trova che una particolare successione di Cauchy-Riemann converge a $G(b)-G(a)$; poiché però si sa già che l'integranda continua è integrabile, sappiamo che tale limite non cambia al variare della successione di Cauchy-Riemann.

Dico questo solo per sottolineare che l'integrabilità delle funzioni continue è un risultato che (pur non essendo solitamente dimostrato) andrebbe messo nel dovuto rilievo, in quanto non ha solo il significato di esemplificare una particolare classe di funzioni integrabili, ma gioca un ruolo chiave nella teoria: su di esso si basa il teorema mediante il quale calcoliamo effettivamente gli integrali. ❖