3.5 UNO SGUARDO PIU' AVANZATO ALL'ESISTENZA DELL'INTEGRALE (PROPER) DI RIENMAN

Nella sezione 3.2 abbiamo trovato le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza del "*corretto*" integrale di Rienman, e nella sezione 3.3 le abbiamo usate per studiare le proprietà dell'integrale. Quindi, è strano applicare queste condizioni ad una funzione specifica e determinare se essa è integrabile, dal momento che queste proprietà richiedono il calcolo della somma sup e inf e anche dell'integrale sup e inf, il che potrebbe risultare complicato. Il risultato principale di questa sezione è un criterio di integrabilità, dovuto a Lebesgue, che non richiede queste tipo di calcoli, ma piuttosto ha a che vedere con quanto malamente discontinua una funzione può essere, rimanendo integrabile.

Sottolineiamo che stiamo di nuovo considerando integrali propri di funzioni limitate su intervalli finiti.

Definizione 3.5.1 Se f è una funzione limitata (bounded) su $[a,b]$, l'oscillazione di f su $[a,b]$ è definita come:

$$W_f[a,b]= \sup_{a\leq x,x'\leq b}|f(x)-f(x')|$$

che può essere scritto anche come:

$$W_f[a,b]= \sup_{a\leq x\leq b} f(x) - \inf_{a\leq x\leq b} f(x)$$

(Esercizio 3.5.1)

Se $a<x<b$, l' *oscillazione* di f in x è definita come:

$$\omega_f(x)= \lim_{h\to 0+} W_f(x-h,x+h)$$

Le corrispondenti definizioni per $x=a$ e $x=b$ sono:

$$\omega_f(a)= \lim_{h\to 0+} W_f(a,a+h) \quad \text{e} \quad \omega_f(b)= \lim_{h\to 0+} W_f(b-h,b) \quad \blacksquare$$

Per un x fissato in (a,b), $W_f(x-h,x+h)$ è una funzione non-negativa e non-decrescente di h per $0<h<min(x-a,b-x)$; quindi $\omega_f(x)$ esiste ed è non-negativo, dal Teorema 2.1.9 . Simili argomenti si applicano a $\omega_f(a)$ e $\omega_f(b)$.

Teorema 3.5.2. Sia f una funzione definita su $[a,b]$. Allora f è continua in x_0 in $[a,b]$ se e solo se $\omega_f(x_0)=0$. (Continuità in a o in b significa continuità da destra o da sinistra rispettivamente)

Dimostrazione Supponiamo che $a<x_0<b$. Per prima cosa, supponiamo che $\omega_f(x_0)=0$ e $\varepsilon<0$. Quindi

$$W_f[x_0-h,x_0+h]<\varepsilon$$

per qualche $h>0$, quindi

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon \quad \text{se} \quad x_0-h\leq x \quad , \quad x'\leq x_0+h \quad .$$

Sia $x'=x_0$, possiamo concludere che

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \quad \text{se} \quad |x-x_0|<h \quad .$$

Quindi, f è continua in x_0 .

D'altro canto, se f è continua in x_0 e $\varepsilon>0$, esiste un $\delta>0$ tale che

$$\left|f(x)-f(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \left|f(x')-f(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

se $x_0-\delta$, $x'\leq x_0+\delta$. Dalla disuguaglianza triangolare,

$$\left|f(x)-f(x')\right| \leq \left|f(x)-f(x_0)\right| + \left|f(x')-f(x_0)\right| < \varepsilon \quad ,$$

quindi

$$W_f[x_0-h, x_0+h]\leq\varepsilon \quad \text{se} \quad h<\delta \quad ;$$

dunque, $\omega_f(x_0)=0$. Argomenti simili si applicano se $x_0=a$ o se $x_0=b$. ■

Lemma 3.5.3 Se $\omega_f(x)<\varepsilon$ per $a\leq x\leq b$, allora esiste un δ>0 tale che $W_f[a_1, b_1]\leq\varepsilon$, che ci fornisce $[a_1, b_1]\subset[a, b]$ e $b_1-a_1<\delta$.

Dimostrazione Usiamo il Teorema di Heine-Borel (Teorema 1.3.7). Se $\omega_f(x)<\varepsilon$, esiste una $h_x>0$ tale che

$$\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon \tag{3.5.1}$$

se

$$x-2\text{h}_x<x' \quad , \quad x''<x+2\text{h}_x \quad \text{e} \quad x', x''\in[a, b] \quad . \tag{3.5.2}$$

Se $I_x=(x-h_x, x+h_x)$, allora la collezione

$$\aleph=\{I_x | a\leq x\leq b\}$$

è un "*ricoprimento aperto*" di $[a, b]$, quindi il Teorema di Heine-Borel implica che esistono un numero finito di punti x_1 , x_2 , ... , x_n in $[a, b]$ tali che I_{x_1} , I_{x_2} , ... , I_{x_n} coprono $[a, b]$.
Sia

$$h = \min_{1\leq i\leq n} h_{x_i}$$

e supponiamo che $[a_1, b_1]\subset[a, b]$ e $b_1-a_1<h$. Se x' e x'' sono in $[a_1, b_1]$, allora $x'\in I_{x_r}$ per qualche r ($1\leq r\leq n$), quindi

$$\left|x'-x_r\right|<h_{x_r} \quad .$$

Dunque,

$$\left|x''-x_r\right| \leq \left|x''-x'\right| + \left|x'+x_r\right| < b_1-a_1+h_{x_r} < h+h_{x_r} \leq 2\text{h}_{x_r} \quad .$$

Così, qualsiasi coppia di punti x' e x'' in $[a_1, b_1]$ soddisfa (3.5.2) con $x=x_r$, quindi essi soddisfano anche (3.5.1). Quindi, ε è un "*limite superiore*" per l'insieme

$$\left\{\left|f(x')-f(x'')\right| \mid x', x''\in[a_1, b_1]\right\} \quad ,$$

il quale ha il ("supremum") $W_f[a_1 , b_1]$. Così $W_f[a_1 , b_1]\leq\varepsilon$. ■

D'ora in poi, $L(I)$ indicherà la lunghezza dell'intervallo I .

Lemma 3.5.4 Sia f una funzione ("bounded") su $[a, b]$ e definiamo

$$E_\rho=\{x\in[a, b] \mid \omega_f(x)\geq\rho\} \quad .$$

Allora E_ρ è chiuso, e f è integrabile su $[a, b]$ se e solo se per ogni coppia di numeri positivi ρ e δ , E_ρ può essere coperto da un numero finito di intervalli aperti I_1 , I_2 , ... , I_p tali che

$$\sum_{j=1}^{p} L(I_i) \geq \delta$$

Dimostrazione: Per prima cose mostriamo che E_ρ è chiuso. Supponiamo che x_0 sia un punto limite di E_ρ. Se $h>0$, esiste una $\bar{x}$ da E_ρ in (x_0-h, x_0+h). Poiché $[\bar{x}_0-h_1, \bar{x}_0+h_1] \subset [x_0-h, x_0+h]$ per un h_1 sufficientemente piccolo e $W_f[\bar{x}-h_1, \bar{x}-h_1] \geq \rho$, segue che $W_f[x_0-h_1, x_0-h_1] \geq \rho$ per ogni $h>0$. Questo implica che $x_0 \in E_\rho$, quindi E_ρ è chiuso (Corollario 1.3.6).

Adesso mostreremo che la condizione indicata è necessaria per l'integrabilità. Supponiamo che la condizione non sia soddisfatta; ovver, esiste un $\rho>0$ e un $\delta>0$ tali che

$$\sum_{j=1}^{p} L(I_i) \geq \delta$$

per ogni insieme finito $\{I_1, I_2, \ldots, I_p\}$ di intervalli aperti che coprono E_ρ.

Se $P=\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ è una partizione di $[a,b]$, allora

$$S(P)-s(P)=\sum_{j\in A}(M_j-m_j)(x_j-x_{j-1})+\sum_{j\in B}(M_j-m_j)(x_j-x_{j-1}) \quad , \qquad (3.5.4)$$

dove

$$A=\{j \mid [x_{j-1}, x_j] \cap E, \} \quad \text{e} \quad B=\{j \mid [x_{j-1}, x_j] \cap E_\rho = \emptyset\} \quad .$$

Poiché $\mathrm{U}_{j\in A}(x_{x-1}, x_j)$ contiene tutti i punti di E_ρ eccetto quello di $x_0, x_1, \ldots, x_n$ che possono essere in E_ρ, e ognuna di queste finite eccezioni può essere coperta da un intervallo aperto di lunghezza piccola a nostro piacere, la nostra assunzione su E_ρ implica che

$$\sum_{j\in A}(x_j-x_{j-1}) \geq \delta \quad .$$

Inoltre, se $j\in A$, allora

$$M_j-m_j \geq \rho \quad ,$$

quindi (3.5.4) implica che

$$S(P)-s(P) \geq \rho \sum_{j\in A}(x_j-x_{j-1}) \geq \rho\delta \quad .$$

Dal momento che questo vale per ogni partizione di $[a,b]$, f non è integrabile su $[a,b]$, per il Teorema 3.2.7 .

Questo prova che le condizioni iniziali sono *necessarie* per l'integrabilità.

Per quanto riguarda la *sufficienza* ,siano ρ e δ numeri positivi e siano $I_1, I_2, \ldots, I_p$ intervalli aperti che coprono E_ρ e soddisfano (3.5.3). Sia

$$\tilde{I}_j=[a,b] \cap \bar{I}_j \quad .$$

(dove con $\bar{I}_j$ si intende la chiusura di I .) Dopo aver combinato ognuno dei $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \ldots, \tilde{I}_p$ ("that ovrlap"), otteniamo un insieme di sub-intervalli chiusi disgiunti a coppie

$$C_j=[\alpha_j, \beta_j] \quad , \quad 1 \leq j \leq q \; (\leq p) \quad ,$$

di [a,b] tale che

$$a \leq \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 \ldots < \alpha_{q-1} < \beta_{q-1} < \alpha_q < \beta_q \leq b \qquad (3.5.5)$$

$$\sum_{i=1}^{q} \left(\beta_i - \alpha_i \right) < \delta \tag{3.5.6}$$

e

$$\omega_f(x) < \rho \quad , \quad \beta_j \le x \le \alpha_{j+1} \quad , \quad 1 \le j \le q-1 \quad .$$

Anche, $\omega_f(x) < \rho$ per $a \le x \le \alpha_1$ se $a < \alpha_1$ e per $\beta_q \le x \le b$ se $\beta_q < b$.

Sia P_0 la partizione di $[a,b]$ con i punti della partizione indicati in (3.5.5), e raffiniamo P_0 partizionando ogni sotto-intervallo $[\beta_j, \alpha_{j+1}]$ (così come $[a, \alpha_1]$ se $a < \alpha_1$ e $[\beta_q, b]$ se $\beta_q < b$) in sotto-intervalli sui quali le oscillazioni di f non sono più grandi di ρ . Questo è possibile per il lemma 3.5.3. In questo modo, dopo aver rinominato l'intera collezione dei punti della partizione, otteniamo una partizione $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ di $[a, b]$ per il quale $S(P) - s(P)$ può essere scritta come in (3.5.4), con

$$\sum_{j \in A} \left(x_j - x_{j-1} \right) = \sum_{i=1}^{q} \left(\beta_i - \alpha_i \right) < \delta$$

(vedi (3.5.6)) e

$$M_j - m_j \le \rho \, , \; j \in B \quad .$$

Per questa partizione

$$\sum_{j \in A} \left(M_j - m_j \right) \left(x_j - x_{j-1} \right) \le 2\mathrm{K} \sum_{j \in A} \left(x_j - x_{j-1} \right) < 2\mathrm{K}\delta \quad ,$$

dove K è un (“upper bound”) per $|f|$ su $[a, b]$ e

$$\sum_{j \in B} \left(M_j - m_j \right) \left(x_j - x_{j-1} \right) \le \rho \left(b - a \right) \quad .$$

Adesso appena mostrato che se ρ e δ sono numeri positivi arbitrari, esiste una partizione P di $[a, b]$ tale che

$$S(P) - s(P) < 2\mathrm{K}\,\delta + \rho(b-a) \quad . \tag{3.5.7}$$

Se $\varepsilon > 0$, sia

$$\delta = \frac{\varepsilon}{4\mathrm{K}} \quad \text{e} \quad \rho = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad .$$

Allora (3.5.7) fornisce

$$S(P) - s(P) < \varepsilon \quad ,$$

e il Teorema 3.2.7 implica che f è integrabile su $[a, b]$. ■

Definizione 3.5.5 Un sottoinsieme S della linea reale è “*di misura di Lebesgue zero*” se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una successione finita o infinita di intervalli aperti $I_1, I_2, \dots$ tale che

$$S \subset \cup_j \; I_j \tag{3.5.8}$$

e

$$\sum_{j=1}^{n} L\left(I_j \right) < \varepsilon \quad , \quad n \ge 1 \quad . \tag{3.5.9}$$

■

Si noti che qualsiasi sottoinsieme di un insieme di misura di Lebesgue zero è anch'esso di misura di Lebesgue zero. (Perché?)

Esempio 3.5.1 Il set vuoto è di Lebesgue misura zero, poiché è contenuto in qualsiasi intervallo aperto.

Esempio 3.5.2 Qualsiasi insieme finito $S=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ è di misura di Lebesgue zero, dal momento che possiamo scegliere intervalli aperti $I_1, I_2, \dots, I_n$ tali che $x_j \in I_j$ e
$L(I_j)<\frac{\varepsilon}{n}$, $1 \le j \le n$.

Esempio 3.5.3 Un insieme infinito è numerabile se i suoi membri possono essere elencati in una successione (cioè in una corrispondenza uno-a-uno con gli interi positivi); in tal modo,

$$S=\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \quad . \tag{3.5.10}$$

Un insieme infinito che non ha questa proprietà non è numerabile. Qualsiasi insieme numerabile (3.5.10) è di Lebesgue con misura zero, poiché se $\varepsilon>0$, è possibile scegliere intervalli aperti $I_1, I_2, \dots$ tali che $x_j \in I_j$ e $L(I_j)<2^{-j}\varepsilon$, $j \ge 1$. Allora vale la (3.5.9) perché

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}<1 \quad . \tag{3.5.11}$$

■

Esistono anche insiemi non numerabili di misura zero di Lebesgue, ma è oltre lo scopo di questo libro discutere di esempi.

Il prossimo teorema è il risultato principale di questa sezione.

Teorema 3.5.6 Una funzione *limitata* f è integrabile su un intervallo finito $[a,b]$ se e solo se l'insieme S di discontinuità di f in $[a,b]$ è di Lebesgue di misura zero.

Dimostrazione dal Teorema 3.5.2 ,

$$S=\{x \in [a,b] \mid \omega_f(x)>0\} \quad .$$

Dal momento che $\omega_f(x)>0$ se e sono le $\omega_f(x) \ge 1/i$ per qualche intero positivo i , possiamo scrivere

$$S=\cup_{i=1}^{\infty} S_i, \tag{3.5.12}$$

dove

$$S_i=\{x \in [a,b] \mid \omega_f(x) \ge 1/i\} \quad .$$

Adesso supponiamo che f sia integrabile su $[a,b]$ e $\varepsilon>0$.
Per il Lemma 3.5.4, ogni S_i può essere coperto con un numero finito di intervalli aperti $I_{i1}, I_{i2}, \dots, I_{in}$ di lunghezza totale minore di $\frac{\varepsilon}{2^i}$.
Semplicemente rinumeriamo questi intervalli consecutivamente; così,

$$I_1, I_2, \dots = I_{11}, \dots, I_{1n_1}, I_{21}, \dots, I_{2n_2}, \dots, I_{i1}, \dots, I_{in_i}, \dots \quad .$$

Ora (3.5.8) e (3.5.9) valgono per (3.5.11) e (3.5.12), e abbiamo dimostrato che la condizione indicata è necessaria per l'integrabilità.

Per la sufficienza, supponiamo che valga la condizione dichiarata e $\varepsilon>0$. Allora S può essere coperto da intervalli aperti $I_1, I_2, \dots$ chen soddisfino (3.5.9). Se $\rho>0$, allora l'insieme

$$E_\rho = \{ x \in [a,b] \mid \omega_f(x) \geq \rho \}$$

del Lemma 3.5.4 è contenuto in S (Teorema 3.5.2), e quindi E_ρ è coperto da $I_1, I_2, \ldots$. Dato che E_ρ è chiuso (Lemma 3.5.4) e limitato, il Teorema di Heine-Borel implica che E_ρ è coperto da un numero finito di intervalli da $I_1, I_2, \ldots$. La somma delle lunghezza di questi ultimi è minore di ε , quindi il Lemma 3.5.4 implica che f sia integrabile su $[a,b]$.

■

3.5 ESERCIZI

---

1. In connection with Definition 3.5.1, show that

$$\sup_{x,x' \in [a,b]} |f(x) - f(x')| = \sup_{a \leq x \leq b} f(x) - \inf_{a \leq x \leq b} f(x).$$

2. Use Theorem 3.5.6 to show that if f is integrable on $[a,b]$, then so is $|f|$ and, if $f(x) \geq \rho > 0$ $(a \leq x \leq b)$, so is $1/f$.

3. Prove: The union of two sets of Lebesgue measure zero is of Lebesgue measure zero.

4. Use Theorem 3.5.6 and Exercise 3.5.3 to show that if f and g are integrable on $[a,b]$, then so are $f + g$ and fg.

5. Suppose f is integrable on $[a,b]$, $\alpha = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$, and $\beta = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$. Let g be continuous on $[\alpha, \beta]$. Show that the composition $h = g \circ f$ is integrable on $[a,b]$.

6. Let f be integrable on $[a,b]$, let $\alpha = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$ and $\beta = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$, and suppose that G is continuous on $[\alpha, \beta]$. For each $n \geq 1$, let

$$a + \frac{(j-1)(b-a)}{n} \leq u_{jn},\ v_{jn} \leq a + \frac{j(b-a)}{n}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Show that

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |G(f(u_{jn})) - G(f(v_{jn}))| = 0.$$

7. Let $h(x) = 0$ for all x in $[a,b]$ except for x in a set of Lebesgue measure zero. Show that if $\int_a^b h(x)\,dx$ exists, it equals zero. HINT: *Any subset of a set of measure zero is also of measure zero.*

8. Suppose that f and g are integrable on $[a,b]$ and $f(x) = g(x)$ except for x in a set of Lebesgue measure zero. Show that

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$