Fisica 1 Elettronica e Telecomunicazioni. Compito del 20/2/2019

LEGGERE LE NOTE SUL RETRO

Problema 1 (4 punti) Vogliamo programmare un robot perché faccia canestro con una palla di massa $m = 0.6$ kg e raggio $r = 12$ cm. Il canestro è posto ad una altezza $H = 3$ m. Il robot è alto $h = 1.4$ m, avanza ad una velocità $v = 0.5$ m/s, e può lanciare la palla dalla sua parte superiore solo in direzione verticale (rispetto a se stesso) con una velocità $V = 8$ m/s.

(a) Quale è la condizione necessaria per fare canestro?

(b) A quale distanza d dal canestro il robot deve lanciare la palla?

Soluzione: La palla, verticalmente, deve passare per il canestro in fase discendente. La legge oraria per la direzione verticale della palla (mettendo lo zero sul pavimento) è

$$z(t) = h + Vt - \frac{1}{2}gt^2.$$

Il tempo T per fare canestro è dato

$$h + VT - \frac{1}{2}gT^2 = H$$

con $\dot{z}(T) < 0$. Abbiamo

$$T = \frac{V \pm \sqrt{V^2 - 2g(H-h)}}{g}$$

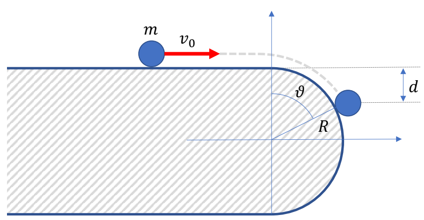
di cui dobbiamo prendere la soluzione con il + per avere $\dot{z}(T) = -\left(\pm\sqrt{V^2 - 2g(H-h)}\right) < 0$. Quindi $T \simeq 1.40$ s. Mettendo ora lo zero della coordinata x sotto il canestro, la legge oraria del robot è

$$x(t) = vt - d$$

facendo partire il tempo al momento del lancio ($x(0) = -d$. Dobbiamo avere $x(T) = 0$ e quindi

$$d = vT =\simeq 69.97 \text{ cm}.$$

Problema 2 (8 punti) Un punto materiale viene lanciato con una velocità $v_0 = 1$ m/s su un tavolo senza attrito, in direzione perpendicolare al bordo. Il bordo del tavolo è cilindrico, con un raggio di curvatura $R = 2$ cm. In figura è rappresentata una sezione del tavolo.



Il punto materiale comincia a scendere lungo la circonferenza del bordo e ad un certo punto si stacca.

(a) Finché resta aderente, qual è la sua velocità in funzione dell'angolo θ (misurato rispetto alla verticale nel centro della circonferenza del bordo)?

(b) Quale è la condizione di distacco?

(c) A che distanza d dalla superficie del tavolo si distacca?

Soluzione: Si può ottenere la velocità v del punto materiale dalla conservazione dell'energia (mettendo lo zero sull'asse orizzontale indicato in figura)

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgR\cos(\theta)$$

da cui

$$v^2 = v_0^2 + 2gR(1 - \cos(\theta)).$$

La condizione di distacco è reazione vincolare del tavolo nulla, ovvero forza centrifuga uguale alla componente della forza di gravità verso il tavolo, ovvero

$$\frac{mv^2}{R} = mg\cos(\theta).$$

ovvero

$$\cos(\theta) = \frac{v^2}{Rg} = \frac{v_0^2}{Rg} + 2 - 2\cos(\theta)$$

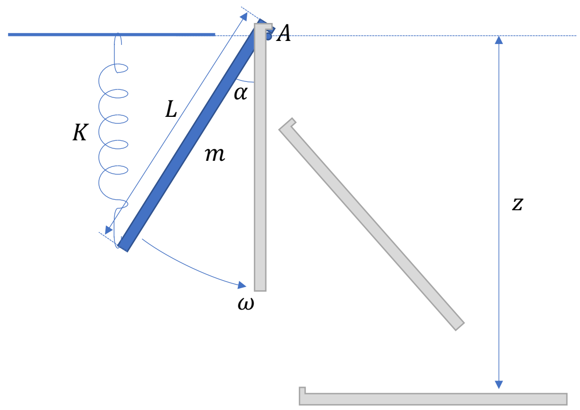
e quindi

$$\cos(\theta) = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR} \simeq 2.37.$$

la distanza d è

$$d = R(1 - \cos(\theta)) = \frac{R}{3} - \frac{v_0^2}{3g} \simeq 4.07 \text{ cm}.$$

Problema 3 (8 punti) Una sbarra sottile di lunghezza $L = 30$ cm e massa $m = 4$ kg è vincolata a ruotare senza attrito intorno al suo estremo A, ma si sgancia automaticamente appena raggiunge la posizione verticale. La sbarra è inizialmente trattenuta in equilibrio con un angolo $\alpha = \pi/6$ tra la sbarra e la verticale da una molla di costante elastica K e lunghezza a riposo nulla, agganciata all'estremo opposto ad A e ad un vincolo liscio (guida) orizzontale passante per A.



(a) Quanto vale K?

(b) La sbarra si sgancia dalla molla e comincia a ruotare. Quanto vale la sua velocità angolare ω quando raggiunge la verticale?

(c) A questo punto la sbarra si sgancia dal perno A e cade. Che tipo di moto segue adesso la sbarra?

(d) A che distanza verticale z dalla quota di A la sbarra si trova in posizione orizzontale?

Soluzione: In equilibrio il momento della forza peso deve essere uguale a quello della molla. Ovvero

$$\frac{mgL}{2}\sin(\alpha) = KL^2\cos(\alpha)\sin(\alpha)$$

da cui

$$K = \frac{mg}{2L\cos(\alpha)} \simeq 75.44\ \mathrm{N/m}.$$

Per trovare ω si può usare la conservazione dell'energia. Mettendo lo zero dell'energia potenziale in A, l'energia potenziale iniziale è

$$U_0 = -\frac{mgL}{2}\cos(\alpha)$$

e quella finale è

$$U_f = -\frac{mgL}{2}$$

mentre l'energia cinetica è

$$U_c = \frac{1}{2}I\omega^2$$

con $I = (1/3)mL^2 \simeq 0.12\ \mathrm{kg\cdot m^2}$ (calcolata rispetto all'asse A, pura rotazione), quindi

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{mgL}{2}(1-\cos(\alpha))$$

e quindi

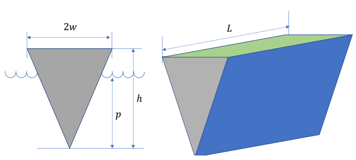
$$\omega = \sqrt{\frac{mgL(1-\cos(\alpha))}{I}} = \sqrt{\frac{3g(1-\cos(\alpha))}{L}} \simeq 3.62\ \mathrm{rad/s}.$$

La sbarra arriva in posizione orizzontale (rotazione di $\theta = \pi/2$) dopo un tempo $T = \theta/\omega \ \simeq 0.43$ s. In questo tempo il baricentro è caduto di

$$h = \frac{1}{2}gT^2 \simeq 92.08\ \mathrm{cm}.$$

e quindi $z = h + L/2 \simeq 107.08$ cm.

Problema 4 (8 punti) Una nave è assimilabile a un prisma a base triangolare, con altezza $h = 10$ m, larghezza $2w$, $w = 2$ m e lunghezza $L = 20$ m. La massa a vuoto della nave è $M = 80$ t, e ha imbarcato un carico di massa $m = 40$ t.



(a) Qual è il suo pescaggio (altezza parte immersa) p?

Soluzione: Chiamando 2θ l'angolo formato dalle fiancate della nave, abbiamo $\tan(\theta) = w/h$. Il volume dell'acqua spostata è quello di un prisma lungo L, di angolo 2θ e altezza p, ovvero $V = Lp^2\tan(\theta) = Lp^2 w/h$.

Uguagliando il peso alla spinta di Archimede abbiamo

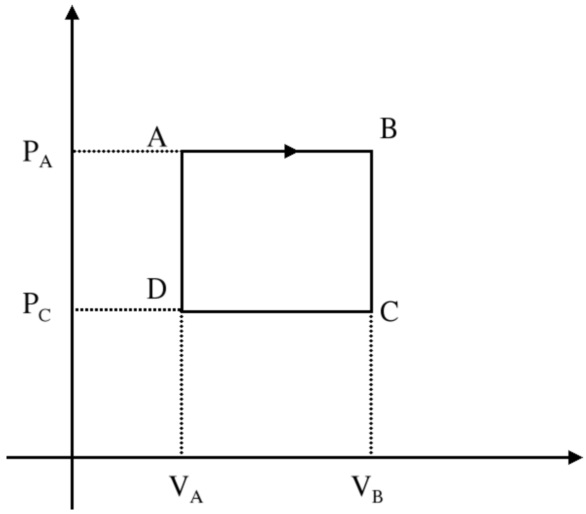
$$(M+m)g = \rho_a gV = \rho_a gLp^2\frac{w}{h}$$

e quindi

$$p = \sqrt{\frac{h(M+m)}{\rho_a Lw}} \simeq 5.48\ \mathrm{m}.$$

Problema 5 (8 punti) Una macchina termica lavora con $n = 2.3$ moli di un gas perfetto biatomico. Il ciclo è irreversibile in quanto le trasformazioni avvengono a contatto con due sorgenti aventi temperatura costante in ognuna delle trasformazioni. Tuttavia, le trasformazioni avvengono per un continuo di stati di equilibrio termodinamico (in modo quasi statico), in modo tale che il ciclo sia rappresentabile nel piano di Clapeyron (P,V) con un rettangolo di vertici ABCD avente i lati paralleli agli assi coordinati. La trasformazione da A a B, si svolge a pressione costante, e la temperatura varia da $T_A = 400$ K a $T_B = 500$ K. Nella trasformazione da B a C, che si svolge a volume costante, il gas ritorna alla stessa temperatura iniziale $T_C = T_A$, ma ad una diversa pressione $P_C = 1.2\cdot 10^5$ Pa.

Una isobara porta il sistema alla temperatura più bassa T_D. La macchina lavora tra due sorgenti di calore a temperatura T_B (D→A, A→B) e T_D (B→C e C→D).



Calcolare

(a) La temperatura T_D;

(b) Il lavoro L eseguito in un ciclo;

(c) Il rendimento η del ciclo;

(d) il rendimento massimo η_{MAX} di una macchina reversibile che lavori con le stesse sorgenti di calore.

Soluzione: Dalla legge dei gas perfetti $PV - nRT$ si può ricavare il volume V_C

$$V_C = \frac{nRT_C}{P_C} = \frac{nRT_A}{P_C} \simeq 0.064\ \mathrm{m^3}.$$

Da

$$P_AV_A = nRT_A$$
$$P_AV_B = nRT_B$$
$$P_CV_A = nRT_A$$
$$P_CV_B = nRT_D$$

si ottiene

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{T_D}{T_A}$$

e quindi

$$T_D = \frac{T_A^2}{T_B} \simeq 320.00\ \mathrm{K}.$$

e V_D

$$V_D = \frac{nRT_D}{P_D} = \frac{nRT_D}{P_C} \simeq 0.051\ \mathrm{m^3}$$

da cui (dato che $V_D = V_A$) si ricava anche la pressione P_A

$$P_A = \frac{nRT_A}{V_A} = \simeq 1.5\cdot 10^5\ \mathrm{Pa}.$$

Il calore assorbito nella trasformazione D→A è

$$Q_{DA} = nc_v(T_A - T_D) \simeq 3822.60\ \mathrm{J},$$

quello nella trasformazione A→B

$$Q_{AB} = nc_p(T_B - T_A) \simeq 6689.55 \text{ J},$$

quello nella trasformazione D→A

$$Q_{BC} = nc_p(T_C - T_B) \simeq -4778.25 \text{ J},$$

e quello nella trasformazione C→D

$$Q_{CD} = nc_p(T_D - T_C) \simeq -5351.64 \text{ J}$$

Il lavoro (area racchiusa nella trasformazione è

$$L = (V_C - V_D)(T_A - T_D) \simeq 382.26 \text{ J}$$

o alternativamente

$$L = Q_{AB} + Q_{CB} + Q_{DC} + Q_{DA} \simeq 382.26 \text{ J}$$

quindi il rendimento η è

$$\eta = \frac{L}{Q_{DA} + Q_{AB}} \simeq 0.036$$

rispetto ad un rendimento massimo

$$\eta_{\text{MAX}} = 1 - \frac{T_D}{T_B} \simeq 0.36$$

NOTE

Istruzioni. Scrivere nome, cognome e matricola nell'ultima pagina (e lasciarla possibilmente bianca). Indicare chiaramente quale domanda viene trattata. Per ogni domanda scrivere succintamente le leggi fisiche usate, i passaggi effettuati, la soluzione analitica (con i simboli) e quella numerica (con le unità di misura). Consegnare solo la bella copia, marcando chiaramente le parti che non devono essere considerate. Trattenere la brutta copia o comunque appuntarsi i risultati per confrontarli con la soluzione (Moodle).

Valutazione. Viene valutato l'aver indicato correttamente le leggi usate, la derivazione analitica, il risultato analitico e numerico corretto. Se è presente il solo risultato analitico o numerico l'esercizio non viene considerato valido. ATTENZIONE: gli errori numerici non sono considerati errori gravi a meno che non siano facilmente riconoscibili dall'analisi dimensionale o da valori particolari dei parametri (per esempio se per una scelta dei parametri un risultato viene assurdo o zero senza che sia fisicamente giustificato). Anche per questo, aspettate a sostituire i valori numerici alla fine.

Alcune grandezze utili. Accelerazione di gravità: $g = 9.8$ m/s^2. Momento di inerzia baricentrale di un cilindro di raggio R e massa M: $I_G = (1/2)MR^2$. Momento di inerzia baricentrale di un'asta omogenea di lunghezza L e massa M: $I_G = (1/12)ML^2$. Costante dei gas $R = 8.3$ J/mol K. Conversione calorie-joule: 1 kcal = 4184 J. Pressione atmosferica $P_a = 10^5$ Pa. Calore specifico molare di un gas monoatomico $c_V = (3/2)R$, di un gas biatomico $c_V = (5/2)R$. Densità dell'acqua $\rho_a \simeq 1000$ kg/m^3.

Suggerimenti. LEGGERE ACCURATAMENTE E RILEGGERE IL TESTO DEL PROBLEMA. Attenzione alla conversione tra unità (equivalenze). I problemi possono contenere dati che non servono per trovare la soluzione. Di solito esistono più modi per arrivare alla soluzione. FARE IL DISEGNO del problema, in maniera più accurata possibile e magari da più punti di vista, e disegnare i diagrammi temporali delle componenti della traiettoria ($x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$...).