Capitolo 11

Geometria Analitica nello Spazio

In questo capitolo viene trattata la rappresentazione di piani, rette, sfere e circonferenze nello spazio mediante equazioni cartesiane e parametriche. Sono queste le nozioni di base di Geometria Analitica nello Spazio che saranno completate nel capitolo successivo. In una breve appendice nell'ultimo paragrafo si presenta la nozione di baricentro geometrico di n punti dello spazio, nozione che, come casi particolari, vedrà la sua naturale applicazione al calcolo del baricentro di un triangolo e di un tetraedro. Per i significati fisici del concetto di baricentro si rimanda ai testi classici di meccanica.

11.1 Il riferimento cartesiano nello spazio

In modo analogo al caso della Geometria Analitica nel Piano (cfr. Par. 9.1) si definisce il *riferimento cartesiano nello spazio* $\mathcal{R} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ come l'insieme formato da un punto detto *origine del riferimento* e indicato con la lettera O e una base ortonormale positiva dello spazio vettoriale V_3 (cfr. Def. 3.13) $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Le rette orientate individuate dei vettori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ prendono, rispettivamente, il nome di *asse delle ascisse, asse delle ordinate, asse delle quote.* In questo modo si individua una corrispondenza biunivoca tra i punti P dello spazio e le componenti del vettore $\overrightarrow{OP} = P - O$. Ponendo:

$$\overrightarrow{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

al punto P si associa in modo univoco la terna di numeri reali (x, y, z):

$$P = (x, y, z),$$

precisamente x è *l'ascissa* del punto P, y è la sua *ordinata* e z è la sua *quota.* La situazione geometrica è illustrata nella Figura 11.1.

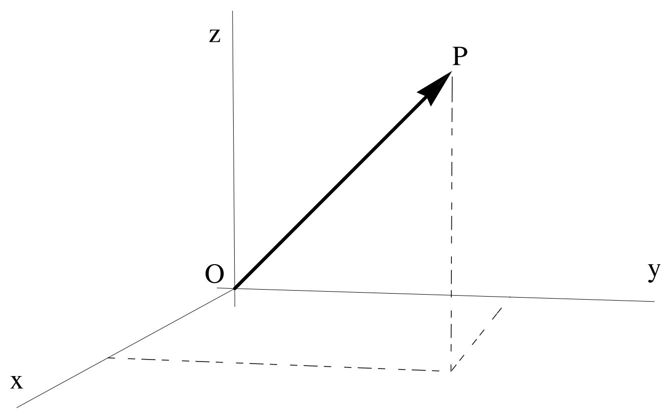

Figura 11.1: Il riferimento cartesiano nello spazio

Il riferimento cartesiano determina, in modo naturale, tre piani, detti *piani coordinati* e precisamente:

1. il piano individuato dal punto O e dai versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}$, anche denominato piano xy;
2. il piano individuato dal punto O e dai versori $\mathbf{i}, \mathbf{k}$, anche denominato piano xz;
3. il piano individuato dal punto O e dai versori $\mathbf{j}, \mathbf{k}$, anche denominato piano yz.

Il riferimento cartesiano sarà indicato con il simbolo $\mathcal{R} = (O, x, y, z)$ o equivalentemente con $\mathcal{R} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

11.1.1 Distanza tra due punti

Dati due punti $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$ dello spazio la loro distanza è data da:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Analogamente al caso del piano (cfr. Par. 12.24) anche nello spazio la distanza $d(A, B)$ può essere interpretata come la norma del vettore $\overrightarrow{AB}$ le cui componenti sono:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k}.$$

11.1.2 Punto medio di un segmento

Dati due punti $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$ dello spazio, le coordinate del punto medio M del segmento AB sono:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right).$$

Ad esempio il punto medio del segmento di estremi $A = (2, 2, 1)$ e $B = (0, -6, -3)$ è il punto $M = (1, -2, -1)$.

11.1.3 Baricentro di un triangolo e di un tetraedro

Dati tre punti $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$ e $C = (x_C, y_C, z_C)$ non allineati, il baricentro G del triangolo da essi individuato ha coordinate:

$$G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$

Per la dimostrazione si veda il Paragrafo 11.12.1.

Dati quattro punti $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$, $C = (x_C, y_C, z_C)$ e $D = (x_D, y_D, z_D)$ non allineati e non tutti complanari, allora il baricentro del tetraedro da loro individuato ha coordinate:

$$G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}, \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}, \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right).$$

Per la dimostrazione si veda il Paragrafo 11.12.1.

11.1.4 Area di un triangolo e volume di un tetraedro

Dati tre punti nello spazio $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$ e $C = (x_C, y_C, z_C)$ non allineati, l'area del del triangolo da essi individuato è data da:

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} || \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} ||.$$

Per la dimostrazione si veda il Teorema 3.15.

Dati quattro punti nello spazio $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$, $C = (x_C, y_C, z_C)$ e $D = (x_D, y_D, z_D)$ non allineati e non tutti complanari, il volume del tetraedro da loro individuato è dato da:

$$\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{6} | \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} |.$$

Per la dimostrazione si veda il Teorema **??**.

11.2 Rappresentazione di un piano nello spazio

In questo paragrafo sono descritti modi diversi per rappresentare un piano nello spazio rispetto ad un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = (O, x, y, z)$ prefissato. Infatti un piano π nello spazio si può individuare assegnando:

1. un punto P_0 del piano π ed un vettore $\mathbf{n}$ non nullo ortogonale a π;
2. un punto P_0 del piano π e due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ paralleli a π e linearmente indipendenti tra di loro;
3. tre punti A, B e C non allineati appartenenti al piano π.

Si dimostrerà che ogni equazione di primo grado in x, y e z del tipo:

$$ax + by + cz + d = 0,$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e a, b, c non contemporaneamente tutti uguali a zero, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ rappresenta un piano. Viceversa, ogni piano dello spazio è rappresentabile tramite un'equazione lineare in x, y, z del tipo suddetto.

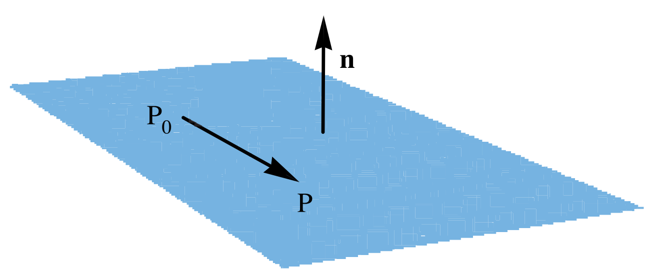

Figura 11.2: Piano passante per il punto P_0 e ortogonale al vettore $\mathbf{n}$

11.2.1 Piano per un punto ortogonale ad un vettore

Sia π il piano passante per un punto P_0 ortogonale ad un vettore $\mathbf{n} \neq \mathbf{o}$. Allora π è il luogo dei punti P dello spazio tali che il vettore $\overrightarrow{P_0P}$ è ortogonale al vettore $\mathbf{n}$, ovvero:

$$\pi = \{P \in S_3 \mid \overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{n} = 0\}. \tag{11.1}$$

La situazione geometrica è rappresentata nella Figura 11.2.

Siano $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $P = (x, y, z)$ le coordinate dei punti P_0 e di P, $\mathbf{n} = (a, b, c)$ le componenti del vettore $\mathbf{n}$ rispetto alla base ortonormale positiva $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. L'equazione vettoriale $\overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{n} = 0$, in componenti, equivale a:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

e quindi ad un'equazione del tipo:

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{11.2}$$

con $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$, detta *equazione cartesiana* del piano π in cui (a, b, c) sono le componenti (non contemporaneamente tutte uguali a zero), di un vettore ortogonale a π.

Esempio 11.1 Il piano passante per il punto $P_0 = (1, 0, -1)$ e ortogonale al vettore $\mathbf{n} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ha equazione cartesiana $y + 2z + 2 = 0$.

Il teorema che segue dimostra che tutte e solo le equazioni lineari in x, y, z determinano un piano nello spazio. Questo risultato è analogo a quello ottenuto nel Teorema **??** nel caso delle rette nel piano e si può agevolmente estendere a dimensioni superiori.

Teorema 11.1 *Ogni equazione lineare in x, y e z del tipo (11.2) rappresenta, a meno di un fattore moltiplicativo non nullo, l'equazione cartesiana di un piano nello spazio S_3.*

Dimostrazione Se $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ esiste almeno un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ del piano le cui coordinate soddisfano l'equazione (11.2). Quindi $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ e si può riscrivere l'equazione (11.2) nella forma $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, che rappresenta il piano passante per il punto P_0 ortogonale al vettore $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$. Inoltre, per ogni numero reale ρ, con $\rho \neq 0$, le due equazioni (11.2) e:

$$\rho(ax + by + cz + d) = 0$$

rappresentano lo stesso piano. ∎

Esempio 11.2 L'equazione $3y + 6z + 6 = 0$ rappresenta lo stesso piano considerato nell'Esempio 11.1.

Osservazione 11.1 1. L'origine $O = (0, 0, 0)$ appartiene al piano di equazione (11.2) se e solo se $d = 0$.

2. Il piano coordinato xy ha equazione cartesiana $z = 0$, in quanto è ortogonale al versore $\mathbf{k}$ e passa per l'origine O. Analogamente i piani cartesiani xz e yz hanno rispettivamente equazioni cartesiane $y = 0$ e $x = 0$.

3. Intuitivamente si capisce che l'equazione $z = k$ con $k \in \mathbb{R}$ rappresenta un piano parallelo al piano xy, analogamente l'equazione $x = k$ rappresenta un piano parallelo al piano yz e l'equazione $y = k$ rappresenta un piano parallelo al piano xz. Per la definizione precisa di parallelismo tra due piani si rimanda al Paragrafo 11.3.3.

4. L'equazione $ax + by + d = 0$, con tutti i coefficienti non nulli, rappresenta, nello spazio, un piano π ortogonale al vettore $\mathbf{n} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$, pertanto π è un piano parallelo all'asse z. Se $d = 0$, allora π contiene l'asse z. Si presti molta attenzione a non confondere l'equazione del piano π con l'equazione di una retta scritta nel piano S_2. Per la discussione precisa del parallelismo tra una retta e un piano si rimanda al Paragrafo 11.4. Si lascia al Lettore, per esercizio, la descrizione della posizione dei piani di equazione $ax + cz + d = 0$ e $by + cz + d = 0$ al variare di a, b, c, d in campo reale.

11.2.2 Piano per un punto parallelo a due vettori

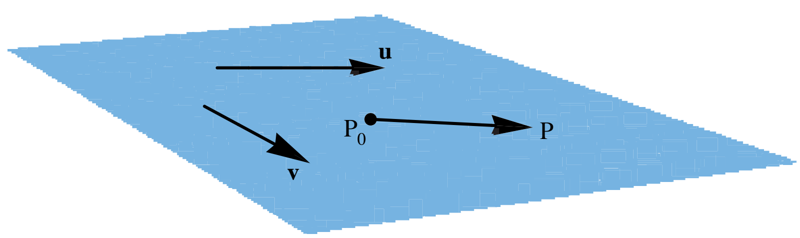

Figura 11.3: Piano passante per il punto P_0 e parallelo ai vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$

Sia π il piano passante per il punto P_0 e parallelo a due vettori linearmente indipendenti $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Allora π è il luogo dei punti P dello spazio tali che i vettori $\overrightarrow{P_0P}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono linearmente dipendenti, vale a dire:

$$\pi = \{P \in S_3 \mid \overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{u} + s\mathbf{v},\ t, s \in \mathbb{R}\},$$

ossia:

$$\pi : \ P = P_0 + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}, \quad t, s \in \mathbb{R}. \tag{11.3}$$

Quindi un punto $P = (x, y, z)$ appartiene al piano π se e solo se il vettore $\overrightarrow{P_0P}$ è complanare ad $\mathbf{u}$ e a $\mathbf{v}$. La (11.3) è detta *equazione vettoriale parametrica* di π mentre $t, s \in \mathbb{R}$ sono i *parametri* al variare dei quali il punto P descrive il piano π. La situazione geometrica è rappresentata nella Figura 11.3.

Siano $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $P = (x, y, z)$ le coordinate dei punti P_0 e P, nel riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ e $\mathbf{u} = (l, m, n)$ e $\mathbf{v} = (l', m', n')$ le componenti dei vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ rispetto alla base ortonormale positiva $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Si verifica che l'equazione (11.3) equivale a:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt + l's \\ y = y_0 + mt + m's, \\ z = z_0 + nt + n's, \qquad t, s \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{11.4}$$

che sono le *equazioni parametriche* del piano π. Si osservi che il piano π ammette infinite equazioni parametriche diverse, è sufficiente scegliere, per la loro determinazione, un altro punto e un'altra coppia di vettori appartenenti al piano.

Da Teorema 3.22 risulta che tre vettori dello spazio vettoriale V_3 sono complanari se e solo se il loro prodotto misto è uguale a zero, pertanto è condizione equivalente alla (11.3) l'equazione:

$$\overrightarrow{P_0P} \wedge \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{11.5}$$

che, a differenza di (11.3), non dipende da alcun parametro e, in componenti, equivale a:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0, \tag{11.6}$$

che rappresenta l'equazione cartesiana del piano passante per il punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e parallelo ai vettori $\mathbf{u} = (l, m, n)$ e $\mathbf{v} = (l', m', n')$. Sviluppando il determinante appena ottenuto secondo la prima riga si ha:

$$\begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix} (x - x_0) - \begin{vmatrix} l & n \\ l' & n' \end{vmatrix} (y - y_0) + \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix} (z - z_0) = 0. \tag{11.7}$$

Si noti che l'equazione (11.7) coincide con l'equazione (11.2) in cui le componenti del vettore $\mathbf{n}$ ortogonale al piano sono proporzionali alle componenti del vettore $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

Esempio 11.3 Il piano π passante per il punto $P_0 = (-1, 3, 1)$ e parallelo ai vettori:

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$$

ha equazioni parametriche:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 2t + s \\ y = 3 - t + s, \\ z = 1 + t, \qquad\qquad t, s \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \tag{11.8}$$

Si verifica facilmente che il punto $A = (0, 1, 2)$ appartiene a π, infatti le sue coordinate si ottengono ponendo $t = 1$ e $s = -1$ in (11.8). Invece l'origine $O = (0, 0, 0)$ non appartiene a π perché il sistema lineare:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -1 + 2t + s \\ 0 = 3 - t + s, \\ 0 = 1 + t \end{array} \right.$$

è incompatibile. Si verifichi che i vettori $\mathbf{u}' = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{v}' = (-1, 2 - 1)$ appartengono al piano π, di conseguenza anche:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \lambda - \mu \\ y = 1 + \lambda + 2\mu \\ z = 2 - \mu, \qquad\qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

sono equazioni parametriche di π.

Per ottenere l'equazione cartesiana di π si può procedere in modi diversi:

1. si possono eliminare i due parametri t e s nelle equazioni parametriche (11.8). Per esempio si può prima ricavare dalla terza equazione parametrica $t = z - 1$, dalla seconda si ha $s = y + z - 4$ e quindi sostituendo nella prima si perviene all'equazione cartesiana di π:

$$x - 2(z - 1) - (y + z - 4) + 1 = 0.$$

2. Usando il calcolo vettoriale si ha che il prodotto vettoriale $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è un vettore ortogonale al piano π. Poiché:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right| = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

si ottiene quindi come equazione cartesiana di π:

$$-(x + 1) + (y - 3) + 3(z - 1) = 0.$$

3. Sostituendo i dati dell'esercizio in (11.6) si ha:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z-1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si osservi che, qualunque sia il metodo seguito, si perviene ad una sola equazione cartesiana di π, a meno di un coefficiente di proporzionalità non nullo.

11.2.3 Piano per tre punti non allineati

Dati tre punti non allineati $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$ e $C = (x_C, y_C, z_C)$, il piano π passante per A, B e C è parallelo ai vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ e quindi ha, ad esempio, equazioni parametriche:

$$P = A + t\,\overrightarrow{AB} + s\,\overrightarrow{AC}, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

in accordo con (11.3). Un vettore ortogonale al piano π passante per A, B e C è il vettore $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, di conseguenza π può essere descritto come il luogo geometrico dei punti P tali che:

$$\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

Eplicitando questo prodotto misto in componenti si trova l'equazione cartesiana di π:

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0.$$

Esercizio 11.1 Tre punti non allineati individuano un solo piano. Perché nell'equazione $ax + by + cz + d = 0$ ci sono quattro incognite a, b, c, d?

Esempio 11.4 Il piano passante per i tre punti:

$$A = (-1, 2, 1), \quad B = (2, -3, 0), \quad C = (1, 0, 0)$$

ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = -1 + t + 2s \\ y = 2 - t - 2s \\ y = 1 - t - s, \qquad t, s \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ed equazione cartesiana:

$$x + y - 1 = 0.$$

Esercizio 11.2 Determinare l'equazione del piano parallelo all'asse x e passante per i punti $P_0 = (1, 0, 2)$ e $P_1 = (-2, 1, 1)$.

Soluzione Il piano richiesto è formato dai punti P dello spazio per cui:

$$\overrightarrow{P_0P} \wedge \mathbf{i} \cdot \overrightarrow{P_0P_1} = 0$$

e quindi ha equazione cartesiana:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = y + z - 2 = 0.$$

Esercizio 11.3 A partire dalla generica equazione cartesiana di un piano:

$$\pi : \ ax + by + cz + d = 0,$$

supponendo che a, b, c siano tutti diversi da zero, si perviene all'equazione:

$$\pi : \ \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1. \tag{11.9}$$

Si interpretino geometricamente i numeri p, q, r così determinati.

Soluzione I punti $A = (p, 0, 0),\ B = (0, q, 0),\ C = (0, 0, r)$ appartengono al piano π individuato dall'equazione (11.9), pertanto p è la distanza, con segno, del punto A dall'origine del riferimento, q è la distanza, con segno, del punto B dall'origine, r è la distanza, con segno, del punto C dall'origine. In altri termini, $p.q, r$ sono le lunghezze, con segno, dei segmenti che il piano π intercetta, rispettivamente, sugli assi delle ascisse, delle ordinate e delle quote. Per questo motivo (11.9) prende il nome di *equazione segmentaria* del piano.

11.3 Rappresentazione della retta nello spazio

Una retta r, nello spazio rispetto ad un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, si può individuare assegnando:

1. un punto P_0 della retta r ed un vettore $\mathbf{r}$ non nullo parallelo a r;
2. due punti A e B distinti della retta r;
3. due piani π_1 e π_2 incidenti lungo r.

Si vedrà che la rappresentazione parametrica di una retta nello spazio è analoga a quella di una retta nel piano (cfr. Par. **??**), mentre la rappresentazione cartesiana di una retta nello spazio cambia notevolmente. Infatti, come è già stato osservato nel paragrafo precedente, l'equazione cartesiana della retta r nel piano: $ax + by + c = 0$ corrisponde, nello spazio, all'equazione cartesiana del piano π parallelo all'asse z. La retta r risulta essere, nello spazio, l'intersezione del piano π con il piano coordinato xy. Maggiori dettagli e spiegazioni di questa situazione geometrica, descritta solo intuitivamente, si avranno nel corso di tutto il paragrafo.

11.3.1 Retta per un punto parallela ad un vettore

Sia r la retta passante per il punto P_0 parallela ad un vettore $\mathbf{r} \neq \mathbf{o}$. Allora la retta r è il luogo geometrico dei punti P dello spazio tali da rendere paralleli i vettori $\overrightarrow{P_0P}$ e $\mathbf{r}$, ossia:

$$r = \{P \in S_3 \mid \overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{r},\, t \in \mathbb{R}\},$$

o anche:

$$r: \ P = P_0 + t\mathbf{r}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{11.10}$$

La (11.10) è detta *equazione vettoriale parametrica* di r, $t \in \mathbb{R}$ è il *parametro* al variare del quale in $\mathbb{R}$ il punto P descrive la retta r. Segmenti della retta r si possono ottenere per valori di t limitati ad intervalli di $\mathbb{R}$. Se t assume solo valori positivi, compreso il numero zero, si ha una semiretta di origine P_0, l'altra semiretta si ottiene per valori di t negati, zero compreso, se si vuole includere anche l'origine P_0.

Siano $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $P = (x, y, z)$ le coordinate cartesiane di P_0 e P rispetto al riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O.\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ e $\mathbf{r} = (l, m, n)$ le componenti di $\mathbf{r}$ rispetto alla base ortonormale positiva $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. Si verifica che l'equazione (11.10) equivale a:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{11.11}$$

che sono le *equazioni parametriche* di r ed (l, m, n) prendono il nome di *parametri direttori* della retta r.

Osservazione 11.2 Siano (l, m, n) i parametri direttori di una retta r, allora:

1. (l, m, n) non sono contemporaneamente nulli e sono individuati a meno di un fattore moltiplicativo, cioè $(\rho l, \rho m, \rho n)$ con $\rho \neq 0$ sono anche parametri direttori della retta r;

2. se $l = 0$ e $m = 0$ la retta r è parallela all'asse z, se $m = 0$ e $n = 0$ la retta r è parallela all'asse x, se $l = 0$ e $n = 0$ la retta r è parallela all'asse y;

3. i *coseni direttori della retta* r, ossia i coseni degli angoli che la retta r forma con gli assi coordinati coincidono (a meno del segno) con i coseni che un generico vettore $\mathbf{r}$ parallelo alla retta r forma con i versori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ della base ortonormale che individua il sistema di riferimento usato, ossia:

$$\cos(\widehat{\mathbf{ri}}) = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$
$$\cos(\widehat{\mathbf{rj}}) = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$
$$\cos(\widehat{\mathbf{rk}}) = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Esercizio 11.4 Determinare le equazioni parametriche della retta r parallela al vettore $\mathbf{r} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ e passante per il punto $P_0 = (1, 2, 3)$; determinare, inoltre, i coseni direttori di r.

Soluzione Le equazioni parametriche di r sono:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}; \end{cases}$$

per i coseni direttori si ha:

$$\cos(\widehat{\mathbf{ri}}) = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \cos(\widehat{\mathbf{rj}}) = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \cos(\widehat{\mathbf{rk}}) = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Osservazione 11.3 1. Ponendo $t = 1$ nelle equazioni parametriche della retta r ottenuta nell'esercizio precedente si trova il punto $P_1 = (2, 1, 5)$ e quindi la retta r ha anche equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 5 + 2\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2. Per $t \in [0, 1]$ si ha il segmento sulla retta r di estremi i punti P_0 e P_1.

3. Per $t \geq 0$ si ottiene una semiretta su r di origine il punto P_0.

Se tutti i parametri direttori (l, m, n) di una retta r non sono uguali a zero, dalle equazioni parametriche (11.11), eliminando il parametro t allo scopo di trovare le equazioni cartesiane di r, si ottiene:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Quindi una rappresentazione cartesiana di una retta r passante per il punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e parallela al vettore $\mathbf{r} = (l, m, n)$, con $l \neq 0$, $m \neq 0$, $n \neq 0$, è:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} \\ \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{z - z_0}{n}. \end{cases}$$

Si noti che il sistema lineare così ottenuto rappresenta geometricamente l'intersezione di due piani nello spazio, trattandosi delle soluzioni comuni a due equazioni lineari.

Se un parametro direttore è uguale a zero, ad esempio $l = 0$, la retta r ha rappresentazione cartesiana:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n} \end{cases}$$

e anche in questo caso la retta è data dall'intersezione di due piani.

Se due parametri direttori sono uguali a zero, ad esempio $l = m = 0$, la retta r è parallela all'asse z (al versore $\mathbf{k}$) ed ha rappresentazione cartesiana:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0. \end{cases}$$

In particolare l'asse z ha, quindi, equazioni cartesiane $x = y = 0$. Analogamente le equazioni cartesiane dell'asse x e y sono rispettivamente $y = z = 0$ e $x = z = 0$.

Osservazione 11.4 I punti $P = (x, y, z)$ di una retta r nello spazio corrispondono alle soluzioni di un sistema lineare compatibile di due equazioni nelle tre incognite x, y e z. Infatti, è ben noto dal primo capitolo che un sistema lineare di due equazioni in tre incognite, compatibile, ammette infinite soluzioni che dipendono da una variabile che concidono con le equazioni parametriche della retta r. Pertanto una retta nello spazio si può rappresentare geometricamente come intersezione di due piani o meglio come l'intersezione di *infinite* coppie di piani. La situazione geometrica è rappresentata nella Figura 11.4, ma si completerà lo studio della posizione reciproca di due piani nello spazio nel Paragrafo 11.3.3.

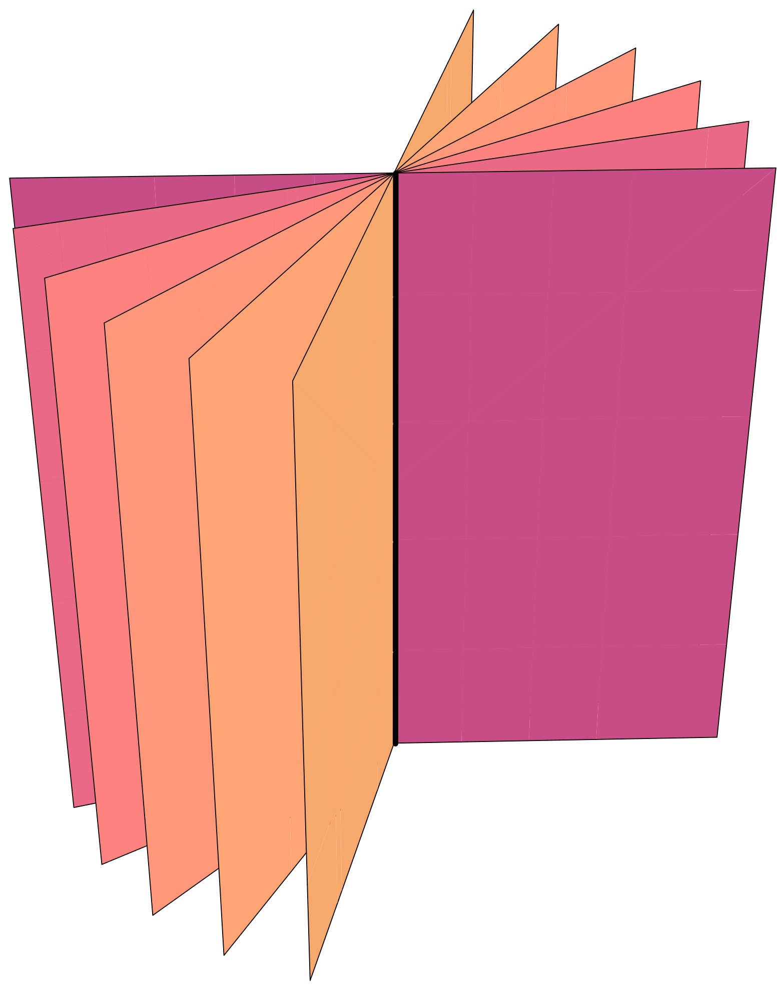

Figura 11.4: La retta come intersezione di coppie di piani

Esempio 11.5 La retta r dell'Esercizio 11.4 può essere vista non solo come l'intersezione dei due piani:

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0, \end{cases}$$

ma anche come intersezione dei due piani:

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2y + z - 7 = 0. \end{cases}$$

11.3.2 Retta per due punti distinti

Dati due punti distinti $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$, la retta r passante per A e B è parallela al vettore $\overrightarrow{AB}$ di componenti:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A),$$

rispetto alla base ortonormale positiva $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ che individua il riferimento cartesiano scelto. Dunque r ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t \\ y = y_A + (y_B - y_A)t \\ z = y_A + (z_B - z_A)t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

I parametri direttori sono quindi $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$ e se sono tutti e tre diversi da zero la retta r passante per i due punti distinti A e B ha come rappresentazione cartesiana:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A} \\ \dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{z - z_A}{z_B - z_A}. \end{cases}$$

Esempio 11.6 La retta r passante per i punti $A = (1, -1, 0)$ e $B = (2, 3, 1)$ è parallela al vettore $\overrightarrow{AB} = (1, 4, 1)$ e quindi ha equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 4t \\ z = t, \qquad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ed equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} 4x - y - 5 = 0 \\ x - z - 1 = 0. \end{cases}$$

11.3.3 Posizione reciproca di due piani
Retta come intersezione di due piani

Dal punto di vista geometrico, due piani nello spazio possono essere:

1. paralleli e non coincidenti,
2. coincidenti,
3. incidenti, in questo caso la loro intersezione è una retta.

Dal punto di vista algebrico, l'intersezione dei due piani:

$$\pi : \; ax + by + cz + d = 0, \quad \pi' : \; a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

è data da tutti i punti $P = (x, y, z)$ che sono soluzioni del sistema lineare:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0. \end{cases} \tag{11.12}$$

Siano A e $(A \,|\, B)$, rispettivamente, la matrice dei coefficienti e la matrice completa associate al sistema lineare (11.12) vale a dire:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}, \quad (A \,|\, B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d \end{array}\right).$$

Dal Teorema di Rouché–Capelli (cfr. Teor. 1.2) e confrontando i ranghi di A e di $(A \,|\, B)$ si hanno i seguenti casi:

1. $\operatorname{rank}(A) = 1$: indicati con $\mathbf{n} = (a, b, c)$ e con $\mathbf{n}' = (a', b', c')$ i vettori ortogonali, rispettivamente a π e a π', la condizione $\operatorname{rank}(A) = 1$ significa che $\mathbf{n}$ e $\mathbf{n}'$ sono paralleli, quindi i due piani π e π' sono paralleli essendo ortogonali a vettori tra di loro paralleli. È necessario distinguere ancora tra le situazioni seguenti:

   1.a $\operatorname{rank}(A) = 1$ e $\operatorname{rank}(A \,|\, B) = 2$: il sistema lineare (11.12) è incompatibile, i due piani sono paralleli ma non coincidenti.

   1.b $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \,|\, B) = 1$: il sistema lineare (11.12) è compatibile, i due piani sono coincidenti.

2. $\operatorname{rank}(A) = 2$: di conseguenza anche $\operatorname{rank}(A \,|\, B) = 2$, quindi il sistema lineare (11.12) è compatibile e ammette infinite soluzioni che dipendono da un'incognita libera. I vettori $\mathbf{n}$ e $\mathbf{n}'$ non sono paralleli, di conseguenza le soluzioni del sistema lineare (11.12) sono tutti e soli i punti della retta r intersezione dei due piani π

e π'. Pertanto un vettore $\mathbf{r}$ parallelo alla retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$ è il dato dal prodotto vettoriale:

$$\mathbf{r} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{n}' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}.$$

Quindi la retta r ha come parametri direttori la terna di numeri (l, m, n) data da:

$$l = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \quad m = \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix},$$

o qualsiasi terna di numeri proporzionali a (l, m, n) mediante un coefficiente di proporzionalità diverso da zero.

Esercizio 11.5 Studiare al variare di $h, k \in \mathbb{R}$ la posizione reciproca dei due piani

$$\pi : 2x + hy - 2z + 3 = 0, \quad \pi' : x + 2y + kz + 1 = 0.$$

Soluzione Per studiare la posizione reciproca dei due piani è sufficiente calcolare il rango della matrice completa:

$$(A \,|\, B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & h & -2 & -3 \\ 1 & 2 & k & -1 \end{array} \right)$$

e confrontarlo con il rango della matrice A dei coefficienti. Riducendo per righe con l'operazione sulle righe: $R_2 \to R_1 - 2R_2$ si ottiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & h & -2 & -3 \\ 0 & h-4 & -2-2k & -1 \end{array} \right)$$

e quindi $\operatorname{rank}(A \,|\, B) = 2$, per ogni h e k. Si hanno allora le due possibilità seguenti:

1. se $h \neq 4$ oppure $k \neq -1$, i due piani si intersecano lungo una retta;
2. se $h = 4$ e $k = 1$, i due piani sono paralleli.

11.4 Posizioni reciproche tra rette e piani

Nel paragrafo precedente è stata esaminata la posizione reciproca di due piani, di seguito si studieranno le posizioni reciproche di tre piani, di una retta e di un piano e di due rette, privilegiando l'approccio di tipo algebrico (applicando quindi la teoria nota dello studio dell'esistenza delle soluzioni dei sistemi lineari) e poi deducendo le situazioni geometriche dai risultati ottenuti.

11.4.1 Posizione reciproca di tre piani

Per esaminare la posizione reciproca di tre piani $\pi_1 : ax + by + cz + d = 0$, $\pi_2 : a'x+b'y+c'z+d' = 0$, $\pi_3 : a''x+b''y+c''z+d'' = 0$ si risolve il sistema lineare formato dalle tre equazioni. Usando il Teorema di Rouchè - Capelli e confrontando i ranghi $\operatorname{rank} A$ e $\operatorname{rank}(A|B)$ rispettivamente della matrice dei coefficienti A e della matrice completa $(A|B)$ si hanno allora le seguenti possibilità :

1. sistema incompatibile ($\operatorname{rank} A \neq \operatorname{rank}(A|B)$), cioè nessun punto di intersezione. Se in particolare $\operatorname{rank} A = 1$ i tre piani sono paralleli;
2. una sola soluzione ($\operatorname{rank} A \neq \operatorname{rank}(A|B) = 3$), cioè i piani si intersecano in un punto;
3. infinite soluzioni dipendenti da un parametro ($\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|B) = 2$), cioè i piani si intersecano lungo una retta;
4. infinite soluzioni dipendenti da due parametri ($\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|B) = 1$), cioè $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$.

11.4.2 Posizione reciproca di retta e piano

Per esaminare la posizione reciproca tra retta e piano nello spazio si può procedere o algebricamente (usando una rappresentazione cartesiana della retta e del piano) oppure geometricamente (usando una rappresentazione parametrica della retta). Più precisamente:

1) *metodo algebrico*: dati

$$r : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} , \quad \pi : a''x + b''y + c''z + d'' = 0,$$

il problema in questo caso è ricondotto a studiare il sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}$$

cioè l'intersezione di 3 piani, con però la condizione aggiuntiva che la matrice dei coefficienti abbia rango ≥ 2. Usando allora il Teorema di Rouchè - Capelli si hanno le seguenti possibilità :

1. sistema incompatibile, cioè la retta r è parallela al piano π;

2. una sola soluzione, cioè la retta ed il piano si intersecano in un punto;

3. infinite soluzioni dipendenti da un parametro, cioè $r \subset \pi$.

1) *metodo geometrico*: data la retta r passante per P_0 e parallela a $\mathbf{r}$

$$r : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt,\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ed il piano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ (ortogonale al vettore $\mathbf{n} = (a, b, c)$), un punto $P \in r \cap \pi$ se e solo se

$$a(x_0 + lt) + b(y_0 + mt) + c(z_0 + nt) + d = 0.$$

Il problema è quindi ricondotto a studiare le soluzioni dell'equazione lineare

$$(al + bm + cn)t = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d,$$

nell'incognita t e con coefficiente $al + bm + cn = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}$. Osservando che $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ se e solo $P_0 \in \pi$ si hanno allora le seguenti possibilità :

1. $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, cioè la retta ed il piano si intersecano in un punto;

2. $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = 0$ e $P_0 \in \pi$, cioè $r \subset \pi$;

3. $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = 0$ e $P_0 \notin \pi$, cioè r è parallelo a π.

Esercizio 11.6 Studiare la posizione reciproca di:

$$r : \begin{cases} x - hz - 2 = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \pi : kx - y + hz - 1 = 0,$$

al variare di $h, k \in \mathbb{R}$.

Soluzione Si studiano le soluzioni del sistema lineare:

$$\begin{cases} x - hz - 2 = 0 \\ 3x + y = 0 \\ kx - y + hz - 1 = 0 \end{cases}$$

al variare di h e k. Si hanno allora le seguenti possibilità :

1. $h \neq 0$ e $k \neq -4$, r e π si intersecano in un punto;

2. $h = 0$ e $k = -\frac{5}{2}$, $r \subset \pi$;

3. $h = 0$ e $k \neq -\frac{5}{2}$, r è parallela a π;

4. $k = -4$, r è parallela a π.

In alternativa, con il secondo metodo osservando che il piano π è ortogonale al vettore $\mathbf{n} = (k, -1, h)$ e la retta r è parallela al vettore

$$\mathbf{r} = (1, 0, -h) \wedge (3, 1, 0) = (h, -3h, 1),$$

si ha che $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = 0$ se e solo se $h(4 + k) = 0$. Inoltre il punto $P_0 = (2, -6, 0) \in r$ appartiene al piano π se e solo se $2k + 5 = 0$. Si perviene in questo modo alle stesse possibilità di prima.

11.4.3 Posizione reciproca di due rette nello spazio

Due rette r e r' nello spazio possono essere:

1. coincidenti

2. parallele

3. incidenti

4. sghembe (o non complanari).

Da notare che nel caso di rette parallele o incidenti vedremo che si trova sempre un piano che le contiene, cioè che rette parallele e incidenti sono complanari.
Date due rette in rappresentazione cartesiana

$$r : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \end{cases} \quad r' : \begin{cases} a_1'x + b_1'y + c_1'z + d_1' = 0 \\ a_2'x + b_2'y + c_2'z + d_2' = 0, \end{cases}$$

dal punto di vista algebrico si risolve il problema studiando le soluzioni del sistema lineare delle quattro equazioni nelle tre incognite. Questo metodo algebrico non è però così facile da applicare in generale.
Se si scrivono invece le due rette r e r' in forma parametrica

$$r : \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt, \ t \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x = x_1 + l'\lambda \\ y = y_1 + m'\lambda \\ z = z_0 + n'\lambda, \ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

osservando che le rette r e r' passano rispettivamente per i punti $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e sono parallele ai vettori $\mathbf{r} = (l, m, n)$, $\mathbf{r}' = (l', m', n')$, si ha un metodo molto più agevole per studiarne la posizione reciproca. Infatti, osservando che r e r' sono complanari se e solo se i vettori $\vec{P_0P_1}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}$ sono complanari, ossia:

$$\vec{P_0P_1} \wedge \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0,$$

si ha:

1. $r = r'$ se e solo se $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$ sono paralleli e ad esempio $P_1 \in r$;
2. r e r' sono parallele se e solo se $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$ sono paralleli e $P_1 \notin r$;
3. r e r' sono incidenti se e solo se $\vec{P_0P_1} \wedge \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = 0$, ma con $\mathbf{r} \wedge \mathbf{r}' \neq \mathbf{0}$;
4. r e r' sono sghembe se e solo se $\vec{P_0P_1} \wedge \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' \neq 0$.

Nel caso in cui le rette r e r' siano una in rappresentazione cartesiana e l'altra in rappresentazione parametrica, cioè ad esempio se $r' = \pi_1 \cap \pi_2$, si può osservare che se indichiamo con $P_1 = r \cap \pi_1$ e $P_2 = r \cap \pi_2$, si ha che se $P_1 \neq P_2$ allora le due rette sono sghembe. Se invece $P_1 = P_2$, $r \cap r' = P_1$.

Esempio 11.7 *Per studiare la posizione reciproca delle due rette:*

$$r : \begin{cases} x - y + z = 0, \\ y + 3z = 0 \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ y + 3z - 2 = 0, \end{cases}$$

si ottiene una loro rappresentazione parametrica, ad esempio:

$$r : \begin{cases} x = -4t \\ y = -3t \\ z = t,\ t \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

r e r' sono quindi parallele ai vettori $\mathbf{r} = (-4, -3, 1)$ e $\mathbf{r}' = (3, -3, 1)$ e passano rispettivamente per i punti $O = (0, 0, 0)$ e $P_1 = (-1, 2, 0)$. Poiché $\vec{OP_1} \wedge \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' \neq 0$, si ha allora che le due rette sono sghembe.

11.5 Fasci di piani

I fasci di piani sono analoghi ai fasci di rette, circonferenze e coniche già trattati nei Capitoli [1].

Si definiscono due tipi di fasci di piani:

[1] inserire il riferimento

1. il *fascio improprio* formato da tutti i piani paralleli ad un piano assegnato;
2. il *fascio proprio* formato da tutti i piani passanti per una retta.

Il fascio improprio di piani paralleli ad un piano assegnato $\pi : ax + by + cz + d = 0$ ha equazione cartesiana:

$$ax + by + cz + k = 0,\ k \in \mathbb{R}.$$

Nel caso invece di un fascio proprio, si può provare che dati due piani non paralleli $\pi : ax + by + cz + d = 0$, $\pi' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$, il *fascio di piani generato* da π e π', cioè formato da tutti i piani passanti per la retta $r = \pi \cap \pi'$, è l'insieme di tutti i piani aventi per equazione cartesiana la combinazione lineare:

$$\lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \tag{11.13}$$

che prende il nome di *equazione del fascio.*
Infatti:

1. per ogni $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ si ha un piano del fascio;
2. I parametri λ e μ sono omogenei, cioè , per ogni $\rho \neq 0$, (λ, μ) e $(\rho\lambda, \rho\mu)$ individuano lo stesso piano del fascio.
3. Se $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \pi \cap \pi'$, allora (x_0, y_0, z_0) è una soluzione dell'equazione (11.13), per ogni (λ, μ). Quindi ogni piano del fascio contiene la retta $r = \pi \cap \pi'$. Viceversa data la retta $r = \pi \cap \pi'$, ogni piano passante per r ha equazione cartesiana (11.13).

Osservazione 11.5 *Dato un punto $P_1 = (x_1, y_1, z_1) \notin r = \pi \cap \pi'$, esiste un'unico piano del fascio passante per P_1. Infatti imponendo il passaggio per il punto P_1 si perviene all'equazione nelle incognite omogenee λ e μ:*

$$\lambda(ax_1 + by_1 + cz_1 + d) + \mu(a'x_1 + b'y_1 + c'z_1 + d') = 0,$$

con $ax_1 + by_1 + cz_1 + d \neq 0$ e $a'x_1 + b'y_1 + c'z_1 + d' \neq 0$.

Esercizio 11.7 Dato il punto $P_0 = (2, 1, -1)$ determinare il piano π passante per P_0 in ciascuno dei seguenti casi:

1. parallelo al piano $\pi' : 2x - y + 3z - 1 = 0$;
2. contenente la retta

$$r : \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ 2x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

3. perpendicolare alla retta
$$r' : \begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = x + 3 \end{cases}$$

4. perpendicolare al piano $\pi'' : 2x + y - 3z + 1 = 0$ e passante per $A = (3, -1, 0)$.

Soluzione

1. Il piano cercato appartiene al fascio improprio dei piani paralleli a π' e pertanto ha equazione cartesiana $2x - y + 3z + k = 0$. Imponendo il passaggio per il punto P_0 si ha $k = 0$ e quindi il piano ha equazione $2x - y + 3z = 0$.

2. Il piano cercato appartiene al fascio proprio di piani passanti per r ed ha quindi equazione cartesiana
$$\lambda(x - y + 2) + \mu(2x - y - 3z) = 0. \qquad (11.14)$$
Imponendo il passaggio per P_0 si ha $3\lambda + 6\mu = 0$ e quindi l'equazione del piano cercato si ottiene ad esempio sostituendo $\lambda = -2$ e $\mu = 1$ nella precedente equazione (11.14).

3. La retta r' è parallela al vettore $\mathbf{r}' = (1, 2, 1)$, quindi il piano cercato è ortogonale a $\mathbf{r}'$ e passa per P_0, cioè ha equazione: $x + 2y + z - 5 = 0$.

4. Il piano π'' è ortogonale al vettore $\mathbf{n}'' = (2, 1, -3)$, pertanto il piano cercato è formato da tutti i punti P per cui i vettori $\vec{AP}, \vec{P_0A}$ e $\mathbf{n}''$ sono complanari, cioè ha equazione
$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Esercizio 11.8 Dati
$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 + 3t. \end{cases} \quad \text{e} \quad A = (2, 1, 0),$$
determinare le equazioni della retta s passante per A, perpendicolare ed incidente la retta r.

Soluzione La retta s può essere determinata come l'intersezione di due piani π_1 e π_2, dove π_1 e π_2 sono rispettivamente il piano passante per r e per il punto A ed il piano passante per r, ortogonale a r.

Scritta la retta r nella rappresentazione cartesiana:

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ 3x - 2z + 1 = 0, \end{cases}$$

si ha che il generico piano del fascio di piani passanti per r ha equazione:

$$\lambda(x - y + 2) + \mu(3x - 2z - 1) = 0.$$

Pertanto il piano π_1 si ottiene imponendo il passaggio per A, cioè : $3\lambda + 2\mu = 0$. Quindi π_1 ha equazione cartesiana: $2(x - y + 2) + (-3)(3x - 2z - 1) = 0$. Per determinare invece π_2 si impone la condizione $(\lambda + 3\mu, -\lambda, -2\mu) \cdot (2, 2, 3) = 0$.

11.6 Distanze e angoli

Esaminiamo ora alcune questioni riguardanti distanze e angoli nello spazio.

11.6.1 Distanza di un punto da un piano

La distanza (con segno) [2] $d(P_0, \pi)$ di un punto P_0 da un piano π è per definizione la distanza (con segno) $d(P_0, H)$ di P_0 dalla proiezione ortogonale H di P_0 su π. [3]
Quindi se $\mathbf{n}$ è un vettore ortogonale a π si ha che

$$d(P_0, H) = ||\vec{P_0H}|| = \frac{\vec{P_0H} \cdot \mathbf{n}}{||\mathbf{n}||}.$$

Si osservi che il prodotto scalare $\vec{P_0H} \cdot \mathbf{n}$ è positivo se P_0 appartiene al semispazio orientato come $\mathbf{n}$, negativo se P_0 appartiene al semispazio orientato come $-\mathbf{n}$ e nullo se $P_0 \in \pi$.
Passando alle componenti dei vettori rispetto alla base $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, se $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\pi : ax + b + cz + d = 0$ si ottiene allora:

$$d(P_0, \pi) = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

L'usuale distanza quindi di P_0 dal piano π è data dalla formula

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

[2]decidere se inserire la distanza con segno oppure quella sempre positiva
[3]si potrebbe forse inserire un disegno