ISTITUZIONI DI MATEMATICHE

ESERCIZI DI PREPARAZIONE ALLA SECONDA PROVA PARZIALE

Problema 1. Studiare la funzione $f(x) = \frac{5x^2+11x+5}{x^2+1}$. In particolare:

- determinare il dominio di f e dire se f è continua;
- calcolare la derivata $f'(x)$ e determinarne il dominio;
- trovare gli eventuali punti critici di f;
- determinare su quali intervalli f è crescente o decrescente;
- calcolare la derivata seconda $f''(x)$ e determinarne il dominio;
- determinare su quali intervalli f è concava o convessa;
- determinare quali degli eventuali punti critici sono punti di massimo o minimo relativo;
- trovare gli eventuali punti di flesso;
- calcolare $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$;
- dire se f è limitata e se il grafico di f ha asintoti orizzontali o obliqui;
- tracciare un grafico approssimativo di f.

Problema 2. Studiare la funzione $f(x) = \frac{x^2+3x-7}{x-2}$. In particolare:

- determinare il dominio di f e dire se f è continua;
- calcolare la derivata $f'(x)$ e determinarne il dominio;
- trovare gli eventuali punti critici di f;
- determinare su quali intervalli f è crescente o decrescente;
- calcolare la derivata seconda $f''(x)$ e determinarne il dominio;
- determinare su quali intervalli f è concava o convessa;
- determinare quali degli eventuali punti critici sono punti di massimo o minimo relativo;
- trovare gli eventuali punti di flesso;
- calcolare $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to2^-} f(x)$ e $\lim_{x\to2^+} f(x)$;
- dire se f è limitata e se il grafico di f ha asintoti verticali, orizzontali o obliqui;
- tracciare un grafico approssimativo di f.

Problema 3. Studiare la funzione $f(x) = e^{\frac{-2x+1}{x-3}}$. In particolare:

- determinare il dominio di f e dire se f è continua;
- calcolare la derivata $f'(x)$ e determinarne il dominio;
- trovare gli eventuali punti critici di f;
- determinare su quali intervalli f è crescente o decrescente;
- calcolare la derivata seconda $f''(x)$ e determinarne il dominio;
- determinare su quali intervalli f è concava o convessa;
- determinare quali degli eventuali punti critici sono punti di massimo o minimo relativo;

- trovare gli eventuali punti di flesso;
- calcolare $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 3^+} f(x)$;
- dire se f è limitata e se il grafico di f ha asintoti verticali, orizzontali o obliqui;
- tracciare un grafico approssimativo di f.

Nei prossimi problemi, sono evidenziate con (*) alcune domande più impegnative del consueto.

Problema 4. Studiare la funzione $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)$. In particolare:

- determinare il dominio di f e dire se f è continua;
- calcolare la derivata $f'(x)$ e determinarne il dominio;
- trovare gli eventuali punti critici di f;
- determinare su quali intervalli f è crescente o decrescente;
- determinare quali degli eventuali punti critici sono punti di massimo o minimo relativo;
- calcolare la derivata seconda $f''(x)$ e determinarne il dominio;
- (*) osservare che esiste $A > 0$ tale che f è convessa per $x > A$;
- (*) trovare un punto di flesso con un'approssimazione alla prima cifra decimale (anche usando la calcolatrice);
- calcolare $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x)$;
- dire se f è limitata e se il grafico di f ha asintoti verticali, orizzontali o obliqui;
- tracciare un grafico approssimativo di f.

Problema 5. Studiare la funzione $f(x) = x^3 + 5x + \sin(x) + \cos(x)$. In particolare:

- determinare il dominio di f e dire se f è continua;
- calcolare la derivata $f'(x)$ e determinarne il dominio;
- trovare gli eventuali punti critici di f;
- determinare su quali intervalli f è crescente o decrescente;
- determinare quali degli eventuali punti critici sono punti di massimo o minimo relativo;
- calcolare la derivata seconda $f''(x)$ e determinarne il dominio;
- trovare $A > 0$ tale che $f(x)$ è convessa per $x > A$;
- trovare $B < 0$ tale che $f(x)$ è concava per $x < B$;
- (*) provare che nell'intervallo $(0, 1)$ c'è un punto di flesso;
- calcolare $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$;
- dire se f è limitata e se il grafico di f ha asintoti orizzontali o obliqui;
- tracciare un grafico approssimativo di f.

Problema 6. Studiare la funzione $f(x) = e^{\frac{x-2}{x^2-1}}$. In particolare:

- determinare il dominio di f e dire se f è continua;
- calcolare la derivata $f'(x)$ e determinarne il dominio;
- trovare gli eventuali punti critici di f;
- determinare su quali intervalli f è crescente o decrescente;
- determinare quali degli eventuali punti critici sono punti di massimo o minimo relativo;

- calcolare $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to1^-} f(x)$, $\lim_{x\to1^+} f(x)$, $\lim_{x\to-1^-} f(x)$ e $\lim_{x\to-1^+} f(x)$;
- dire se f è limitata e se il grafico di f ha asintoti verticali, orizzontali o obliqui;
- tracciare un grafico approssimativo di f.

Problema 7. Considerare la funzione

$$f(x) = e^{2x} + e^x - 1.$$

- Determinare il dominio di f e dire se f è continua.
- Mostrare che il grafico della funzione non interseca la retta $y = -1$ e dire se si trova al di sopra o al di sotto di tale retta.
- (*) Calcolare $f(0)$ e $f(\ln \frac{1}{2})$. Dedurre che il grafico della funzione interseca l'asse delle ascisse tra $\ln \frac{1}{2}$ e 0.
- Calcolare $f'(x)$ e determinarne il dominio, mostrando che f' è continua.
- Calcolare $f''(x)$ e determinarne il dominio, mostrando che f'' è continua.
- Verificare che la funzione

$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) + 2$$

è identicamente nulla.
- (*) Supponendo che x_0 sia un punto di minimo (e ricordando che ciò implica $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \geq 0$), osservare che $f(x_0) \leq -1$ come conseguenza del punto precedente. Dedurre che f non ha punti di minimo.

Problema 8. Considerare la funzione

$$f(x) = e^{x^2-2x}.$$

- Determinare il dominio di f.
- Calcolare $f'(x)$ e determinarne il dominio, mostrando che f' è continua.
- Calcolare $f''(x)$ e determinarne il dominio, mostrando che f'' è continua.
- Calcolare $f(0)$, $f'(0)$, e $f''(0)$.
- (*) Calcolare $\lim_{x\to0} \frac{f(x)-p(x)}{x^3}$, dove

$$p(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2}.$$