Secondo Compitino Sitemi Dinamici
21-05-2013

Primo esercizio

E' data una lamina quadrata omogenea di massa m, avente lato pari ad a. Sia O il centro della lamina (punto d'incrocio delle diagonali), ed $\{O, x, y, z\}$ un sistema di riferimento centrato in O, in cui l'asse z è ortogonale alla lamina e gli assi x e y coincidono con le diagonali del quadrato (Fig. 1 (A)).

(*i*). Si dimostri che $\{O, x, y, z\}$ è una terna principale d'inezia e si determini la relativa matrice d'inerzia, $\mathbb{I}(O)$.

Viene poi data una seconda lamina uguale alla prima. Le due lamine sono saldate insieme nel vertice A (v. Fig. 1 (B)). Sia, $\{A, X, Y, Z\}$ il nuovo sistema di riferimento i cui assi sono paralleli a quelli di $\{O, x, y, z\}$. Considerando adesso il sistema costituito dalle due lamine, si calcoli:

(*ii*). $I_{ZZ}(A)$, $I_{YY}(A)$ e $I_{XX}(A)$.

Secondo esercizio

E' data un'asta omogenea, OA, di massa m e lunghezza ℓ. L'asta è vincolata nel punto O e può ruotare liberamente (senza attrito) attorno ad esso (v. Fig. 2). L'estremo A dell'asta è collegato, tramite una molla di massa e lunghezza a riposo trascurabili, al punto $B \equiv (\ell, 0)$. L'asta è soggetta alla forza peso e la costante elastica della molla è k. Si indica con α il seguente parametro

$$\alpha = \frac{mg}{2k\,\ell} \ .$$

(*i*) . Si determini il valore di α in corrispondenza del quale la configurazione in cui l'estremo A è sotto O, e la sbarra forma un angolo di $+\ 45^o$ rispetto alla verticale è posizione di equilibrio stabile.

(*ii*) . Determinare, per il valore di α di cui al precedente punto (*i*), la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla suddetta posizione di equilibrio.

(*iii*) . Supponendo la molla assente, si determini la forza $\vec{F} = \vec{F}(t)$, che deve essere applicata, perpendicolarmente alla sbarra, nel suo estremo A, in modo che, partendo dalla posizione in cui la sbarra è verticale con A sotto O, la stessa ruoti con velocità angolare costante ω.

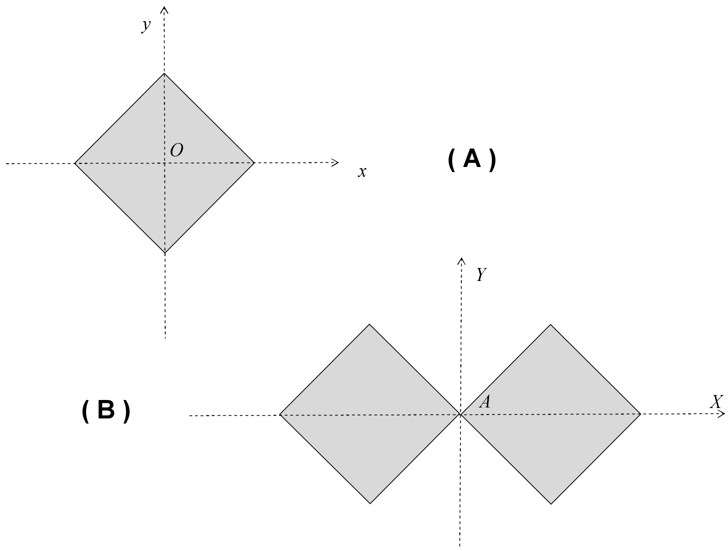

FIGURA 1

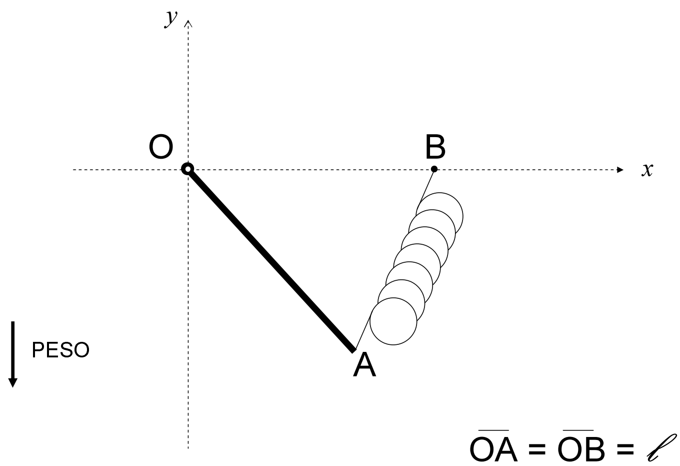

FIGURA 2

SVOLGIMENTO

Primo esercizio

(*i*). La terna $\{O, x, y, z\}$ è principale d'inerzia per ovvie ragioni di simmetria (sia x che y sono ortogonali ai piani di simmetria materiale e z è a sua volta ortogonale al piano della lamina). Sempre per simmetria avremo

$$I_{xx}(O) = I_{yy}(O),$$

e di conseguenza, siccome $I_{zz}(O) = I_{xx}(O) + I_{yy}(O)$, avremo $I_{xx}(O) = \frac{1}{2} I_{zz}(O)$.

Per quanto riguarda $I_{zz}(O)$, ricordando la definizione[1]

$$I_{zz}(O) = \sum_i m_i(\text{distanza punto P}_i \text{ dall'asse } z \text{ passante per } O)^2, \tag{1}$$

risulta evidente che $I_{zz}(O)$ non dipende dall'orientamento degli assi x, y. Quindi, se consideriamo un s.d.r. in cui gli assi sono ortogonali ai lati, otteniamo

$$I_{zz}(O) = \frac{1}{12} m\left(a^2 + a^2\right) = \frac{1}{6} m a^2.$$

In definitiva, la matrice d'inerzia è

$$\mathbb{I}(O) = \frac{ma^2}{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(*ii*). Si comincia considerando solo una lamina e spostando il centro rispetto a cui calcolare la matrice d'inerzia nel vertice A. Applicando il Teorema di Huygens abbiamo

$$\begin{aligned} I_{ZZ}^{singola \quad lamina}(A) &= I_{zz}(O) + m\frac{a^2}{2} = \frac{2}{3} m a^2, \\ I_{YY}^{singola \quad lamina}(A) &= I_{yy}(O) + m\frac{a^2}{2} = \frac{7}{12} m a^2, \end{aligned}$$

mentre $I_{XX}^{singola \quad lamina}(A) = I_{xx}(O)$. Passando a considerare le due lamine, avremo

$$\begin{aligned} I_{ZZ}(A) &= 2 I_{ZZ}^{singola \quad lamina}(A) = \frac{4}{3} m a^2, \\ I_{YY}(A) &= 2 I_{YY}^{singola \quad lamina}(A) = \frac{7}{6} m a^2, \\ I_{XX}(A) &= 2 I_{xx}(O) = \frac{1}{6} m a^2. \end{aligned}$$

Si può infine verificare che $I_{XX}(A) + I_{YY}(A) = I_{ZZ}(A)$.

Secondo esercizio

(*i*). Si prende come grado di libertà l'angolo θ che l'asta forma con la verticale ($\theta > 0$, per rotazioni antiorarie). Il dominio in cui varia θ è $(-\pi, \pi)$, con $\theta = 0$ che corrisponde all'asta verticale con l'estremo A sotto O. Se denotiamo con P_o il CM dell'asta abbiamo

$$\begin{aligned} P_o - O &= \frac{\ell}{2}\sin\theta\, \vec{e}_x - \frac{\ell}{2}\cos\theta\, \vec{e}_y, \\ A - O &= \ell\sin\theta\, \vec{e}_x - \ell\cos\theta\, \vec{e}_y. \end{aligned}$$

[1] La (1) si riferisce as un sistema di punti discreto.

Possiamo poi calcolare l'allungamento della molla

$$\overline{AB}^{\,2} = (\ell\cos\theta)^2 + (\ell - \ell\sin\theta)^2 = 2\ell^2 (1-\sin\theta).$$

Si denota con U, l'energia potenziale totale che sarà $U = U_{peso} + U_{molla}$, per cui

$$\begin{aligned} U &= mg\,(\text{quota CM}) + \frac{1}{2}k\overline{AB}^{\,2} \\ &= -ml\frac{\ell}{2}\cos\theta + k\ell^2 (1-\sin\theta) \\ &= k\ell^2 (-\alpha\cos\theta + 1 - \sin\theta). \end{aligned}$$

La configurazione $\theta = +45^o$ sarà configurazione di equilibrio stabile se

$$\left.\frac{dU}{d\theta}\right|_{\theta=45^o} = 0, \quad \text{e} \quad \left.\frac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta=45^o} > 0.$$

Imponendo la prima si ha

$$\left.\frac{dU}{d\theta}\right|_{\theta=45^o} = k\ell^2 [\alpha\sin\theta - \cos\theta]_{\theta=45^o} = k\ell^2\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha - 1), \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1,$$

mentre dalla seconda

$$\left.\frac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta=45^o} = k\ell^2 [\alpha\cos\theta + \sin\theta]_{\theta=45^o} = k\ell^2\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha + 1) = \sqrt{2}k\ell^2.$$

(*ii*). Considerando $\alpha = 1$, determiniamo T, l'energia cinetica del sistema

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{d(P_o - O)}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}I_{zz}(P_o)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\theta}^2.$$

Quindi considerando la posizione di equilibrio stabile $\theta = +45^o$, possiamo sostituire alla Lagrangiana la seguente forma approssimata

$$\mathcal{L}_{approssimata} = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{m\ell^2}{3}\right)}_{\mathcal{A}}\dot{\theta}^2 - U|_{\theta=45^o} - \frac{1}{2}\underbrace{\left(\left.\frac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta=45^o}\right)}_{\sqrt{2}k\ell^2}\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)^2,$$

da cui otteniamo immediatamente la frequenza (o meglio la pulsazione) delle piccole oscillazioni

$$\omega^2 = \frac{\left(\left.\frac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta=45^o}\right)}{\mathcal{A}} = 3\sqrt{2}\frac{k}{m}.$$

(*iii*). Se l'asta ruota con velocità angolare costante ω, scrivendo la seconda equazione cardinale rispetto al centro di riduzione O, otteniamo

$$I_{zz}(O)\underbrace{\dot{\omega}}_{=\,0} = (P_o - O)\wedge(-mg\,\vec{e}_y) + (A - O)\wedge\vec{F}.$$

Ora, siccome $\vec{F}$ è sempre ortogonale alla sbarra, $(A-O)\wedge\vec{F} = \ell F\,\vec{e}_z$, con F scalare positivo o negativo a seconda dell'orientazione del vettore $\vec{F}$. Per quanto riguarda il primo addendo

$$(P_o - O)\wedge(-mg\,\vec{e}_y) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\ell}{2}\sin\theta & -\frac{\ell}{2}\cos\theta & 0 \\ 0 & -mg & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\ell}{2}mg\sin\theta\,\vec{e}_z.$$

Abbiamo quindi

$$0 = \left(F\ell - \frac{\ell}{2}mg\sin\theta\right)\ \vec{e}_z,$$

per cui, siccome $\theta = \omega t$ (l'angolo iniziale corrisponde a $\theta = 0$),

$$F(t) = \frac{1}{2}mg\sin(\omega t)\,.$$

Si può osservare che nel caso in cui $\omega > 0$, rotazione antioraria, allora $F > 0$, mentre se $\omega < 0$, allora $F < 0$.