Prova Scritta di Sistemi Dinamici
05-06-2014

Primo esercizio

Un punto materiale P di massa $m = 1$, è vincolato a muoversi senza attrito sopra un paraboloide rotondo, la cui intersezione con il piano $y = 0$, è data dalla parabola di equazione $x^2 = 2pz$. Il punto è attratto verso l'origine da una molla la cui costante elastica è uguale a 1.

(*i*). Si scriva l'energia potenziale efficace, V_{eff}.

(*ii*) . Si dimostri che esiste un'unica orbita circolare e che questa è stabile.

(*iii*). Viene data adesso una forza $\boldsymbol{S}$ parallela alla superficie. Quali condizioni deve soddisfare $\boldsymbol{S}$, affinché esistano posizioni di equilibrio.

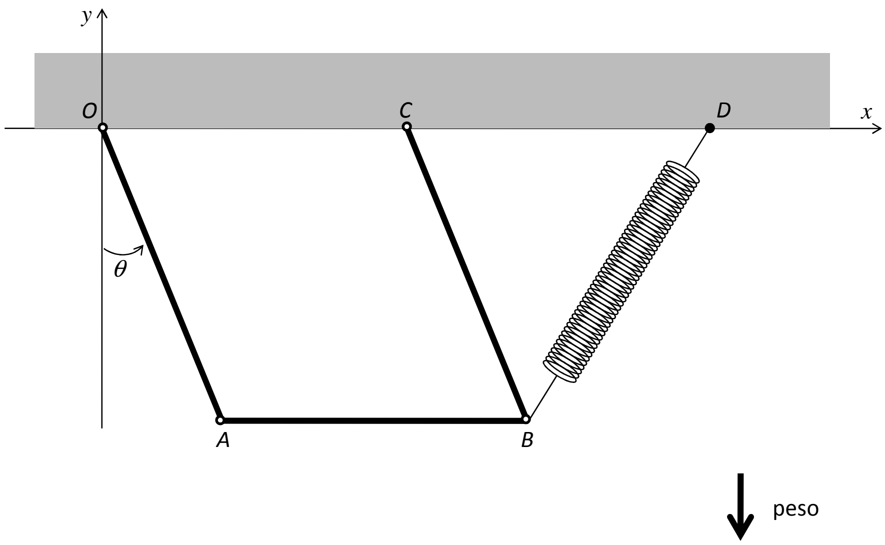
Secondo esercizio

Un sistema meccanico è composto da tre aste OA, AB, e CB, aventi stessa massa m e stessa lunghezza lunghezza l, disposte su un piano verticale. La prima e la terza asta sono vincolate a ruotare attorno agli estremi O e C, mentre gli altri due estremi sono collegati dall'asta AB, come mostrato in figura. L'estremo B è collegato tramite una molla, di massa e lunghezza a riposo trascurabili, al punto $D \equiv (2l, 0)$. Il sistema è soggetta alla forza peso come in figura e k è la rigidezza della molla. Si consideri come parametro lagrangiano l'angolo θ, $\theta \in (-\pi/2,\ \pi/2)$, che l'asta OA forma con la verticale.

(*i*) . Qual'è la velocità angolare dell'asta AB ? Si motivi la risposta.

(*ii*) . Si scriva l'energia cinetica totale del sistema meccanico.

(*iii*) . Supponendo che $\alpha = \dfrac{kl}{2mg} < 1$, si dimostri che esiste una sola posizione di equilibrio stabile.



y
O
C
D
x
θ
A
B
peso

SVOLGIMENTO

Primo esercizio

(i) . La superficie è descritta in termini dei parametri $\theta \in (0, 2\pi]$ e $r \in (0, +\infty)$, tramite le seguenti equazioni

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = \dfrac{r^2}{2p}, \end{cases} \qquad \theta \in (0, 2\pi]\,, \quad r \in (0, +\infty)\,.$$

I vettori che costituiscono la base locale del piano tangente sono

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_r &= \cos\theta \boldsymbol{e}_x + \sin\theta \boldsymbol{e}_y + \frac{r}{p}\boldsymbol{e}_z, \\ \boldsymbol{u}_\theta &= -r\sin\theta \boldsymbol{e}_x + r\cos\theta \boldsymbol{e}_y, \end{aligned}$$

per cui l'enrgia cinetica è data da[1]

$$T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dot r & \dot\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{r^2}{p^2} & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot r \\ \dot\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{r^2}{p^2}\right)\dot r^2 + r^2\dot\theta^2\right]$$

L'energia potenziale elastica è $V(x, y, z) = \dfrac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$, per cui

$$\hat V(r) = \frac{1}{2}\left(r^2 + \frac{r^4}{4p^2}\right).$$

La funzione di Lagrange è dunque

$$\mathcal{L} = T - \hat V(r) = \frac{1}{2}\left(\left(1 + \frac{r^2}{p^2}\right)\dot r^2 + r^2\dot\theta^2\right) - \frac{1}{2}\left(r^2 + \frac{r^4}{4p^2}\right),$$

che non dipende da θ (θ è una coordinata ciclica). Abbiamo

$$r^2\dot\theta = A_o, \quad \Rightarrow \quad \dot\theta = \frac{A_o}{r^2}, \tag{1}$$

dove A_o è una costante non nulla[2] (nota dalle condizioni iniziali). Scriviamo adesso l'equazione di Lagrange nella variabile r

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot r}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0,$$

Tenendo conto della (1)

$$\frac{d}{dt}\left[\left(1 + \frac{r^2}{p^2}\right)\dot r\right] - \frac{\dot r^2 r}{p} - \frac{A_o^2}{r^3} + r + \frac{r^3}{2p^2} = 0.$$

Gli ultimi tre termini si possono leggere come $\dfrac{dV_{eff}(r)}{dr}$, dove $V_{eff}(r)$ è l'energia potenziale efficace

$$\frac{dV_{eff}(r)}{dr} = -\frac{A_o^2}{r^3} + r + \frac{r^3}{2p^2}, \quad \Rightarrow \quad V_{eff}(r) = \frac{A_o^2}{2r^2} + \frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{8p^2}.$$

[1] Si ricordi che la massa di P è 1, e che anche la costante elastica della molla è 1.

[2] In caso $A_o = 0$, è banale.

Lo stesso risultato lo avremmo potuto ottenere considerando l'energia meccanica totale (ovvero l'Hamiltoniana H)

$$\begin{aligned} H &= T + \hat{V}(r) = \frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{r^2}{p^2}\right)\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}\left(r^2 + \frac{r^4}{4p^2}\right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\left(1+\frac{r^2}{p^2}\right)\dot{r}^2}_{\text{en. cinetica}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{A_o^2}{r^2} + r^2 + \frac{r^4}{4p^2}\right)}_{V_{eff}(r)}. \end{aligned}$$

Quindi l'energia potenziale efficace è data da

$$V_{eff}(r) = \frac{1}{2}\left[\frac{A_o^2}{r^2} + r^2 + \frac{r^4}{4p^2}\right].$$

(*ii*). Le orbite circolari sono le soluzioni di $\dfrac{dV_{eff}(r)}{dr} = 0$. Dobbiamo stabilire se l'equazione

$$\frac{dV_{eff}(r)}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{A_o^2}{r^3} + r + \frac{r^3}{2p^2} = 0, \tag{2}$$

ammette soluzioni per $r \in (0, +\infty)$. Riscrivendo la (2) abbiamo

$$A_o^2 = f(r), \quad \text{con} \quad f(r) = r^4 + \frac{r^6}{2p^2}. \tag{3}$$

Ora, $f(r)$ è sempre crescente per $r > 0$, covessa e $f(0) = 0$. Si deduce che l'equazione (3) ammette una sola soluzione. In altri termini, per qualunque $A_o^2 > 0$, esiste una sola orbita circolare, il cui raggio è $r_o > 0$, soluzione della (3). L'orbita è stabile perchè

$$\frac{d^2V_{eff}(r)}{dr^2} = \frac{3A_o^2}{r^4} + 1 + \frac{3r^2}{2p^2} > 0, \qquad \forall\, r > 0.$$

(*iii*). La forza $\boldsymbol{S}$ è parallela alla superficie, $\Rightarrow \boldsymbol{S} = S_r\dfrac{\boldsymbol{u}_r}{|\boldsymbol{u}_r|} + S_\theta\dfrac{\boldsymbol{u}_\theta}{|\boldsymbol{u}_\theta|}$. Le equazioni che determinano le configurazioni di equilibrio sono

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \hat{V}(r)}{\partial \theta} + S_\theta\,|\boldsymbol{u}_\theta| = 0, \\ \\ -\dfrac{\partial \hat{V}(r)}{\partial r} + S_r\,|\boldsymbol{u}_r| = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} rS_\theta = 0, \\ \\ -r - \dfrac{r^3}{2p^2} + S_r\sqrt{1+\dfrac{r^2}{p^2}} = 0. \end{cases}$$

Per aver equilibrio deve essere $S_\theta = 0$, mentre S_r deve soddisfare la seguente equazione

$$S_r = \frac{r\left(1+\dfrac{r^2}{2p^2}\right)}{\sqrt{1+\dfrac{r^2}{p^2}}}.$$

Secondo esercizio

(*i*). Comiciamo con l'esprimere le componenti dei vettori posizione degli estremi delle aste, rispetto al S.d.R. (O, x, y), mostrato in figura. Abbiamo

$$\begin{aligned} A - O &= l\sin\theta\;\boldsymbol{e}_x - l\cos\theta\;\boldsymbol{e}_y, \\ B - O &= (l + l\sin\theta)\,\boldsymbol{e}_x - l\cos\theta\;\boldsymbol{e}_y, \end{aligned}$$

da cui otteniamo

$$B - A = (B - O) - (A - O) = l\boldsymbol{e}_x \ . \tag{4}$$

La velocità dei punti A e B, sono rispettivamente date da

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_A &= \frac{d\,(A - O)}{dt} = l\dot{\theta}\,(\cos\theta\ \boldsymbol{e}_x + \sin\theta\ \boldsymbol{e}_y)\,, \\
\boldsymbol{v}_B &= \frac{d\,(B - O)}{dt} = l\dot{\theta}\,(\cos\theta\ \boldsymbol{e}_x + \sin\theta\ \boldsymbol{e}_y) = \boldsymbol{v}_A \ .
\end{aligned}$$

Applichiamo adesso la formula fondamentale dei moti rigidi ai punti dell'asta AB, selezionando il punto A come punto di "riferimento", di cui è nota la velocità. Se indichiamo con $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare dell'asta AB, quando considerimo il punto B scriveremo

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge (B - A) \qquad \Longrightarrow \qquad \omega \boldsymbol{e}_z \wedge (B - A) = 0,$$

poiché $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A$, e poiché $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_z$ (il moto è piano). Dunque, ricordando la (4), abbiamo $\omega l = 0, \Longrightarrow \omega = 0$. Pertanto l'asta AB si muove di moto puramente traslatorio.

(*ii*) . L'energia cinetica dell'intero sistema meccanico è

$$T = T_{asta\ OA} + T_{asta\ AB} + T_{asta\ BC} \ .$$

Le aste OA e BC, hanno i punt O e C fissi, per cui

$$T_{asta\ OA} = T_{asta\ BC} = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 ,$$

dove I è il momento d'inerzia dell'asta rispetto ad un asse parallello all'asse z, che passa per l'estremo fisso,

$$I = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ml^2.$$

Avremo pertanto $T_{asta\ OA} = T_{asta\ BC} = \dfrac{ml^2}{6}\dot{\theta}^2$.

Il moto dell'asta AB è puramente traslatorio, per cui

$$T_{asta\ AB} = \frac{1}{2} m \left[\frac{d}{dt}(P_{AB} - O)\right]^2 ,$$

dove $(P_{AB} - O)$, denota il vettore posizione del CM dell'asta AB, ovvero

$$P_{AB} - O = \left(\frac{l}{2} + l\sin\theta\right)\boldsymbol{e}_x - l\cos\theta\ \boldsymbol{e}_y \ , \quad \Longrightarrow \quad (P_{AB} \dot{-} O) \ = l\dot{\theta}\,(\cos\theta\ \boldsymbol{e}_x + \sin\theta\ \boldsymbol{e}_y)\,.$$

In conclusione

$$T = 2T_{asta\ BC} + T_{asta\ AB} = \frac{ml^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{5}{6} ml^2 \dot{\theta}^2 .$$

(*iii*) . L'energia potenziale totale è data da

$$V = V^{peso}_{asta\ OA} + V^{peso}_{asta\ BC} + V^{peso}_{asta\ AB} + V_{molla} \ . \tag{5}$$

L'energia potenziale della molla è

$$V_{molla} = \frac{k}{2} |D - B|^2 ,$$

dove

$$D - B = (D - C) - (B - C) = (l - l \sin\theta)\, \boldsymbol{e}_x + l \cos\theta \boldsymbol{e}_y \ ,$$

per cui $|D - B|^2 = 2l^2 (1 - \sin\theta)$. Quindi matenendo l'ordine della (5), scriveremo

$$\begin{aligned} V &= -mg\frac{l}{2}\cos\theta - mg\frac{l}{2}\cos\theta - mgl\cos\theta + \frac{k}{2}2l^2(1 - \sin\theta) \\ &= -2mgl\cos\theta + kl^2(1 - \sin\theta)\,. \end{aligned}$$

Le posizioni di equilibrio si ottengono risolvendo $\dfrac{dV(\theta)}{d\theta} = 0$, cioè

$$\frac{dV(\theta)}{d\theta} = 2mgl\sin\theta - kl^2\cos\theta = 2mgl(\sin\theta - \alpha\cos\theta) = 0, \tag{6}$$

dove, lo ricordiamo, $\alpha = \dfrac{kl}{2mg}$. Siccome $\theta = \pm\pi/2$, non è soluzione della (6), dividendo per $\cos\theta$, otteniamo

$$\tan\theta = \alpha, \qquad \text{con} \quad \alpha < 1.$$

Tale equazione ammette una sola soluzione $\theta_\alpha = \arctan\alpha$, con $0 < \theta_\alpha < \pi/4$. Per dimostrare che θ_α è stabile è sufficiente calcolare la derivata seconda di V, in $\theta = \theta_\alpha$, e mostrare che è positiva. Abbiamo infatti

$$\left.\frac{d^2V(\theta)}{d\theta^2}\right|_{\theta_\alpha} = 2mgl(\cos\theta_\alpha + \alpha\sin\theta_\alpha) > 0,$$

dal momento che $\theta_\alpha \in (0, \pi/4)$.