Prova Scritta di Sistemi Dinamici
20 - 02 - 2017

Primo esercizio

E' data forza centrale

$$\boldsymbol{F} = \left(r^3 - \alpha\right) \boldsymbol{\kappa}_r \ ,$$

dove α è una costante positiva e $\boldsymbol{\kappa}_r$ è il versore radiale.

(*a*). Si scriva la relativa energia potenziale $V(r)$.

(*b*). Ponendosi direttamente sul piano ove si svolge il moto, scrivere la funzione di Lagrange per una particella di massa $m = 1$, ed individuare l'energia potenziale efficace.

(*c*). Stabilire per quali valori di α esistono orbite cicolari e quante ne esistono.

Secondo esercizio

Un disco di raggio r e massa m, è può ruotare senza attrito attorno al suo centro O, che è fisso nel piano. Ciascuno dei due estremi A e B di un diametro è collegato con una molla di lunghezza a riposo e massa trascurabile rispettivamente ai punti (v. figura)

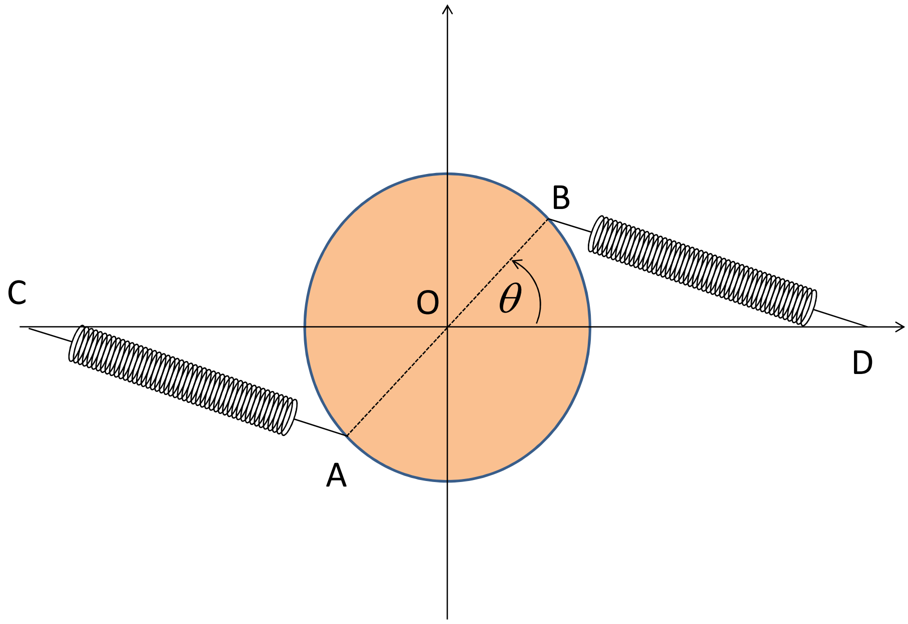
$$C \equiv (-l, 0) \,, \qquad D \equiv (l, 0) \,, \qquad l > 0.$$

La rigidezza di ciascuna molla è k. Si usi l'angolo di rotazione θ del disco come parametro lagrangiano.

(*a*). Scrivere la Lagrangiana.

(*b*). Determinare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità.

(*c*). Considerando l'ipotesi semplificatrice $r = l = 1$ e $m = k = 1$, si svolga lo studio qualitativo del moto nel piano delle fasi.


B
C
O
θ
D
A

SVOLGIMENTO

Primo esercizio

(a) . Facendo uso delle coordinate polari abbiamo

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{\kappa}_r,$$

per cui

$$V(r) = -\frac{r^4}{4} + \alpha r$$

(b) . Ponendosi nel piano dove si svolge il moto ed utilizzando le coordinate polari abbiamo

$$\boldsymbol{x} = r\cos\varphi \boldsymbol{e}_x + r\sin\varphi \boldsymbol{e}_y \ ,$$

per cui

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{r}\boldsymbol{u}_r + \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_\varphi \ ,$$

dove $\boldsymbol{u}_r = \cos\varphi \boldsymbol{e}_x + \sin\varphi \boldsymbol{e}_y$, e $\boldsymbol{u}_\varphi = -r\sin\varphi \boldsymbol{e}_x + r\cos\varphi \boldsymbol{e}_y$. L'energia cinetica è dunque

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right),$$

e la funzione di Lagrange

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{r^4}{4} - \alpha r \ .$$

La variabile φ è ciclica, per cui

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = r^2\dot{\varphi} = A_o, \quad \Longrightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{A_o}{r^2},$$

con A_o costante che dipende dai dati iniziali. Per determinare l'energia potenziale efficace si passa dalla funzione Hamiltonia

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{r^2}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{r^4}{4} + \alpha r \\ &= \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{A_o^2}{2}\frac{1}{r^2} - \frac{r^4}{4} + \alpha r \ . \end{aligned}$$

L'energia potenziale efficace è dunque

$$V_{eff}(r) = \frac{A_o^2}{2}\frac{1}{r^2} - \frac{r^4}{4} + \alpha r.$$

(c) . Le eventuali orbite circolari sono le soluzioni di $V'_{eff}(r) = 0$, cioè

$$-A_o^2\frac{1}{r^3} - r^3 + \alpha = 0, \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{r^3}\left(r^6 - \alpha r^3 + A_o^2\right) = 0.$$

Ponendo $s = r^3$, $\Leftrightarrow r = \sqrt[3]{s}$, abbiamo

$$s^2 - \alpha s + A_o^2 = 0$$

per cui

$$s = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4A_o^2}}{2}$$

Le orbite circolari esisteranno soltanto se

$$\alpha^2 \geq 4A_o^2.$$

In particolare, le soluzioni sono

$$s = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{2}\left(1-\sqrt{1-\dfrac{4A_o^2}{\alpha^2}}\right), \\ \\ \dfrac{\alpha}{2}\left(1+\sqrt{1-\dfrac{4A_o^2}{\alpha^2}}\right), \end{cases}$$

e sono positive. Abbiamo quindi due orbite circolari se $\alpha^2 > 4A_o^2$, e sono

$$r = \sqrt[3]{\frac{\alpha}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{4A_o^2}{\alpha^2}}\right)}, \qquad r = \sqrt[3]{\frac{\alpha}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{4A_o^2}{\alpha^2}}\right)}.$$

Mentre abbiamo una sola orbita circolare se $\alpha^2 = 4A_o^2$, e il raggio è dato da

$$r = \sqrt[3]{\frac{\alpha}{2}}$$

Secondo esercizio

(a) . Dobbiamo esprimere in funzione di θ le coordinate di A e B

$$B - O = r\cos\theta \boldsymbol{e}_x + r\sin\theta \boldsymbol{e}_y, \qquad A - O = -r\cos\theta \boldsymbol{e}_x - r\sin\theta \boldsymbol{e}_y,$$

per cui

$$B - D = (r\cos\theta - l)\,\boldsymbol{e}_x + r\sin\theta \boldsymbol{e}_y, \quad A - C = -(r\cos\theta - l)\,\boldsymbol{e}_x - r\sin\theta \boldsymbol{e}_y.$$

L'energia potenziale delle molle è

$$\begin{aligned} V &= \frac{k}{2}(B-D)^2 + \frac{k}{2}(A-C)^2 \\ &= k(r\cos\theta - l)^2 + kr^2\sin^2\theta = k\left(r^2 + l^2 - 2rl\cos\theta\right). \end{aligned}$$

Per il calcolo dell'energia cinetica si osserva che il disco ha il centro O fissato, per cui

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{mr^2}{4}\dot{\theta}^2.$$

La funzione di Lagrange è

$$\mathcal{L} = \frac{mr^2}{4}\dot{\theta}^2 - k\left(r^2 + l^2 - 2rl\cos\theta\right).$$

(b) . Le posizioni di equilibrio sono gli zeri di $V'(\theta)$, cioè

$$V'(\theta) = 2rl\sin\theta = 0.$$

Le conficgurazioni di equilibrio corrispondono dunque a $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. In particolare, siccome

$$V''(\theta) = 2rl\cos\theta,$$

abbiamo

$$V''(0) = 2rl, \quad \Rightarrow \quad \theta = 0 \quad \text{equilibrio stabile,}$$
$$V''(\pi) = -2rl, \quad \Rightarrow \quad \theta = \pi \quad \text{equilibrio instabile.}$$

(c) . Introduciamo la funzione Hamiltoniana che, in questo caso, coincide con la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4}\dot{\theta}^2 + 2\left(1 - \cos\theta\right),$$

da cui

$$\dot{\theta}^2 = 4\left(E - 2\left(1 - \cos\theta\right)\right),$$

essendo E l'energia meccanica (costante nel tempo). Quindi se $0 < E < 4$, si hanno orbite limitate che corrsipondono a moti periodici. Per $E = 4$, abbiamo la separatrice che corrisponde ad un moto limitato ma aperiodico. Mentre $E > 4$ si ha moto illimitato, ovvero il disco non smette mai di ruotare. Tutto ciò è schematicamente rappresentato nella figura sottostante.