Secondo Compitino Sistemi Dinamici
07 - 05 - 2018

Primo esercizio

Due sbarrette AB e CD di ugual massa m ed ugual lunghezza l sono saldate fra loro nel punto di mezzo O, in modo da formare una " X " il cui angolo (acuto) di apertura è θ (v. figura 1). Si consideri un SdR cartesiano ortogobale $\{O, x, y, z\}$ centrato in O il cui asse x è allineato lungo la sbarretta AB, l'asse y giace sul piano delle sbarrette e l'asse z è ortogonale al piano delle sbarrette.

(a). Dimostrare che il SdR $\{O, x, y, z\}$ di figura 1 non terna principale d'inerzia.

(b). Determinare una terna $\{O, X, Y, z\}$ che sia principale d'inerzia e calcolare $I_X(0)$, $I_Y(0)$ e $I_z(0)$.

(c). Determinare la matrice d'inerzia $\mathbb{I}_{\{x,y,z\}}(O)$ del sistema rispetto al SdR $\{O, x, y, z\}$ di figura 1.

Secondo esercizio

Un disco omogeneo di massa m e raggio R, è vincolato a muoversi su un piano verticale. Il disco è incernierato nel punto O, che di trova a $R/2$ dal centro C. Si chiami con $\{O, x, y\}$ il SdR cartesiano ortogonale centrato in O, in cui l'asse x è orizzontale e l'asse y verticale. Il punto B che sta sul bordo del disco in corrispodenza del prolungamento del segmento OC, è collegato tramite una molla di rigidezza k e massa e lunghezza a riposo tracurabili, al punto $A \equiv (2R, 0)$ (v. figura 2). Si consideri come variabile lagrangiana l'angolo θ che il segmento OC forma con l'asse y, con $\theta \in [-\pi, \pi]$, e $\theta > 0$ per rotazioni antiorarie. Tutti i vincoli sono lisci ed il peso è come in figura 2.

(a). Determinare le configurazioni di equilibrio nell'ipotesi che $\dfrac{mg}{6kR} = 1$ e discuterne la stabilità.

(b). Determinare l'energia cinetica del disco e, ancora nell'ipotesi $\dfrac{mg}{6kR} = 1$, la frequenza delle piccole oscillazioni in corrispondenza della posizione di equilibrio stabile.

(c). Studiare qualitativamente il moto e darne una rappresentazione nel piano delle fasi $\dot{\theta}, \theta$, nelle ipotesi $\dfrac{mg}{6kR} = 1$, $kR^2 = \sqrt{2}/6$ e $mR^2 = 4/3$.

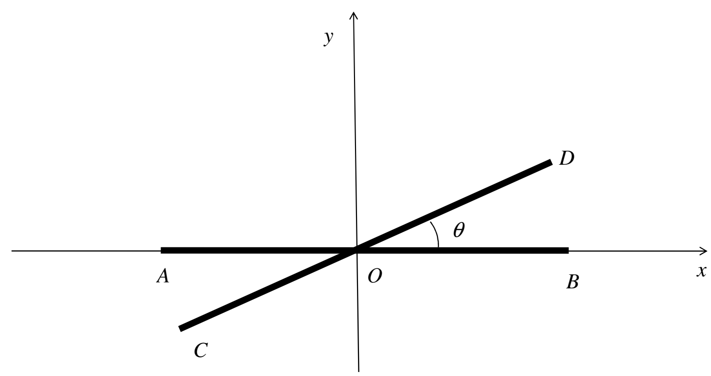


FIGURA 1

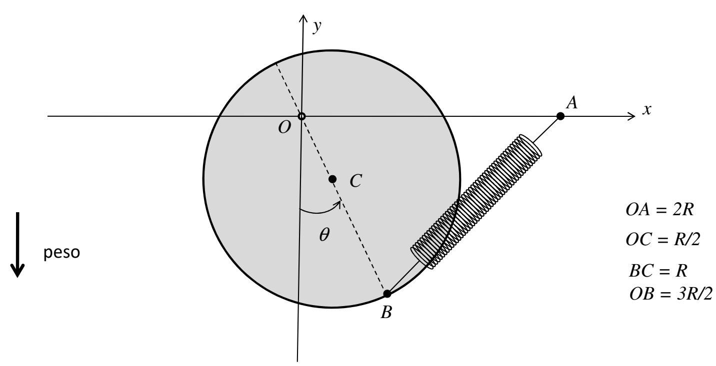


FIGURA 2

SVOLGIMENTO

Primo esercizio

(a). L'asse z è principale d'inerzia (poiché il sistema è piano) ma gli assi x e y non lo sono. Infatti se consideriamo il momento $I_{xy}(O)$ abbiamo

$$I_{xy}(O) = \underbrace{I_{xy}^{AB}(O)}_{=0} + I_{xy}^{CD}(O) = -\sum_{i\in CD} m_i x_i y_i.$$

Ora metà particelle che costituiscono l'asta CD appartiene al primo quadrante, per cui $x_i y_i > 0$, mentre l'altra metà appartiene al terzo quadrante ed ancora $x_i y_i > 0$. Di conseguenza $\sum_{i\in CD} m_i x_i y_i$ è sicuramente positiva e $I_{xy}(O) < 0$. Ne consegue che il SdR $\{O, x, y, z\}$ non è pricipale d'inerzia.

(b). Se consideriamo l'asse X allineato secondo la bisettrice dell'angolo θ, ovvero ruotiamo gli assi x, y di un angolo $\theta/2$, allora otteniamo un SdR che è terna principale d'inerzia. In questo caso infatti l'asse X è ortogonale ad un piano di simmetria materiale (così come lo è l'asse Y).

Passiamo adesso al calcolo della matrice d'inerzia rispetto al SdR $\{O, X, Y, z\}$. Abbiamo subito

$$I_z(O) = 2\left(\frac{ml^2}{12}\right) = \frac{ml^2}{6}.$$

Calcoliamo adesso $I_X(O)$, supponendo che l'asse X sia la bisettrice dell'angolo θ, sì che l'asta CD, come del resto l'asta AB, forma un angolo $\theta/2$ con l'asse X. Se parametrizziamo con l'ascissa $s \in [0, L/2]$ il segmento OD, abbiamo

$$X(s) = s\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \qquad Y(s) = s\sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse X del solo segmento OD sarà

$$\begin{aligned} I_X^{OD}(O) &= \int_0^{l/2} (distanza\ dall'asse\ X)^2\, dm = \int_0^{l/2} Y^2(s) \underbrace{\frac{m}{l} ds}_{dm} \\ &= \frac{m}{l}\int_0^{l/2} s^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) ds = \frac{ml^2}{24}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \end{aligned} \tag{1}$$

e quindi $I_X^{CD}(O) = 2I_X^{OD}(O) = \dfrac{ml^2}{12}\sin^2(\theta/2)$. Allo stesso modo, $I_X^{AB}(O) = \dfrac{ml^2}{12}\sin^2(\theta/2)$, per cui

$$I_X(O) = I_X^{AB}(O) + I_X^{CD}(O) = \frac{ml^2}{6}\sin^2(\theta/2).$$

Procedendo in maniera analoga, si ha

$$I_Y(O) = I_Y^{AB}(O) + I_Y^{CD}(O) = \frac{ml^2}{6}\cos^2(\theta/2).$$

Notiamo poi che, essendo il sistema piano,

$$I_z(O) = I_X(O) + I_Y(O) = \frac{ml^2}{6}\left[\sin^2(\theta/2) + \cos^2(\theta/2)\right] = \frac{ml^2}{6},$$

come ci aspettavamo. La matrice d'inerzia rispetto al SdR $\{O, X, Y, z\}$ è dunque

$$\mathbb{I}_{\{X,Y,z\}}(O) = \frac{ml^2}{6}\begin{pmatrix} \sin^2(\theta/2) & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(\theta/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

(c) . Sfruttando l'additività dei momenti d'inerzia si ha

$$\mathbb{I}_{\{x,y,z\}}(O) = \mathbb{I}^{AB}_{\{x,y,z\}}(O) + \mathbb{I}^{CD}_{\{x,y,z\}}(O)\,. \tag{3}$$

La matrice $\mathbb{I}^{AB}_{\{x,y,z\}}(O)$ si determina facilmente

$$\mathbb{I}^{AB}_{\{x,y,z\}}(O) = \frac{ml^2}{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Per quel che riguarda la matrice d'inerzia relativa alla sbarretta CD, cioè $\mathbb{I}^{CD}_{\{x,y,z\}}(O)$, avremo

$$\mathbb{I}^{CD}_{\{x,y,z\}}(O) = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & 0 \\ I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{12} \end{pmatrix}.$$

Consideriamo dunque un SdR cartesiano ortogonale $\{O, \xi, \eta, z\}$ centrato in O in cui l'asse ξ è parallelo a CD e l'asse η giace nel piano delle sbarrette. In pratica $\{O, \xi, \eta, z\}$ si ottiene ruotando di un angolo θ gli assi x, y in modo da allineare l'asse x con la sbarretta CD. Nel SdR $\{O, \xi, \eta, z\}$ la matrice d'inerzia è

$$\mathbb{I}^{CD}_{\{O,\xi,\eta,z\}}(O) = \frac{ml^2}{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se adesso consideriamo, per semplicità, soltanto $\mathbb{I}^{CD}_{\{\xi,\eta\}}(O)$ e $\mathbb{I}^{CD}_{\{x,y\}}(O)$, ovvero le matrici 2×2 relative aglia assi ξ, η e x, y,

$$\mathbb{I}^{CD}_{\{\xi,\eta\}}(O) = \frac{ml^2}{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{I}^{CD}_{\{x,y\}}(O) = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{xy} & I_{yy} \end{pmatrix},$$

abbiamo

$$\mathbb{I}^{CD}_{\{x,y\}}(O) = \mathbb{A}\ \mathbb{I}^{CD}_{\{\xi,\eta\}}(O)\ \mathbb{A}^T, \tag{5}$$

dove $\mathbb{A}$ è la matrice di rotazione, cioè

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

La (5) quindi diventa

$$\begin{aligned} \mathbb{I}^{CD}_{\{x,y\}}(O) &= \frac{ml^2}{12}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{ml^2}{12}\begin{pmatrix} \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta \end{pmatrix} = \frac{ml^2}{12}\begin{pmatrix} \sin^2\theta & -\frac{1}{2}\sin 2\theta \\ -\frac{1}{2}\sin 2\theta & \cos^2\theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tornando alla (3) e ricordando la (4) otteniamo

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{\{x,y,z\}}(O) &= \frac{ml^2}{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{ml^2}{12}\begin{pmatrix} \sin^2\theta & -\frac{1}{2}\sin 2\theta & 0 \\ -\frac{1}{2}\sin 2\theta & \cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{ml^2}{12}\begin{pmatrix} \sin^2\theta & -\frac{1}{2}\sin 2\theta & 0 \\ -\frac{1}{2}\sin 2\theta & 1+\cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6}$$

Notiamo che $I_{xy}(O)$ è negativo come già previsto al punto (a). $\mathbb{I}_{\{x,y,z\}}(O)$ sarà diagonale soltanto se $\sin(2\theta)=0$, ovvero $\theta=0$ (le sbarrette sono sovrapposte), oppure $\theta=\pi/2$, le sbarrette sono ortogonali.

Vediamo ora una seconda strada per calcolare $\mathbb{I}^{CD}_{\{x,y,z\}}(O)$. Procedendo come al punto (a), abbiamo

$$I_x^{CD}(O)=2I_x^{OD}(O)=2\int_0^{l/2}(distanza\ dall'asse\ x)^2\,dm,$$

dove il segmento OD verrà ora parametrizzato come

$$x(s)=s\cos\theta,\qquad y(s)=s\sin\theta,\qquad s\in\left[0,\frac{l}{2}\right].\tag{7}$$

In analogia con la (1) otteniamo

$$I_x^{OD}(O)=\frac{ml^2}{24}\sin^2\theta,\qquad\Longrightarrow\qquad I_x^{CD}(O)=\frac{ml^2}{12}\sin^2\theta.$$

Allo stesso modo

$$I_x^{CD}(O)=\frac{ml^2}{12}\cos^2\theta.$$

Resta quindi da calcolare il momento deviatore $I_{xy}^{CD}(O)$, cioè

$$I_{xy}^{CD}(O)=2I_{xy}^{OD}(O)=-2\int_0^{l/2}xydm.$$

Sfruttando ancora la parametrizzazione (7) ed il fatto che $dm=\dfrac{m}{l}ds$, otteniamo

$$I_{xy}^{CD}(O)=-\frac{2m}{l}\int_0^{l/2}s^2\cos\theta\sin\theta\ ds=-\frac{ml^2}{12}\cos\theta\sin\theta=-\frac{ml^2}{24}\sin2\theta.$$

La matrice $\mathbb{I}^{CD}_{\{x,y,z\}}(O)$ è dunque la seguente

$$\mathbb{I}^{CD}_{\{x,y,z\}}(O)=\frac{ml^2}{12}\begin{pmatrix}\sin^2\theta & -\frac12\sin2\theta & 0\\ -\frac12\sin2\theta & \cos^2\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Se adesso alla $\mathbb{I}^{CD}_{\{x,y,z\}}(O)$ così determinata sommiamo la (4), otteniamo nuovamente la (6).

Vediamo anche una terza strada per calcolare $\mathbb{I}_{\{x,y,z\}}(O)$. Si parte dalla $\mathbb{I}_{\{X,Y,z\}}(O)$ data dalla (2) e si considera una rotazione degli assi X, Y di $\theta/2$. Analizzando, come prima, soltanto le sotto matrici 2×2, $\mathbb{I}_{\{x,y\}}(O)$ e $\mathbb{I}_{\{X,Y\}}(O)$, scriveremo

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{\{x,y\}}(O) &= \begin{pmatrix}\cos\theta/2 & \sin\theta/2\\ -\sin\theta/2 & \cos\theta/2\end{pmatrix}\mathbb{I}_{\{X,Y\}}(O)\begin{pmatrix}\cos\theta/2 & -\sin\theta/2\\ \sin\theta/2 & \cos\theta/2\end{pmatrix}\\ &= \frac{ml^2}{6}\begin{pmatrix}\cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2)\\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin^2(\theta/2) & 0\\ 0 & \cos^2(\theta/2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\theta/2) & \sin(\theta/2)\\ -\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2)\end{pmatrix}\\ &= \frac{ml^2}{12}\begin{pmatrix}\sin^2\theta & -\frac12\sin2\theta\\ -\frac12\sin2\theta & 1+\cos^2\theta\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Avremo dunque

$$\mathbb{I}_{\{x,y,z\}}(O)=\frac{ml^2}{12}\begin{pmatrix}\sin^2\theta & -\frac12\sin2\theta & 0\\ -\frac12\sin2\theta & 1+\cos^2\theta & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

che appunto coincide con la (6).

Secondo esercizio

(a). Si comincia col determinare le componenti, rispetto al SdR $\{O, x, y\}$, dei vettori posizione dei principali punti coinvolti nell'esercizio. Avremo

$$\begin{aligned} A - O &= 2R\boldsymbol{e}_x, \\ C - O &= \frac{R}{2}\sin\theta\boldsymbol{e}_x - \frac{R}{2}\cos\theta\boldsymbol{e}_y, \\ B - O &= \frac{3R}{2}\sin\theta\boldsymbol{e}_x - \frac{3R}{2}\cos\theta\boldsymbol{e}_y \end{aligned}$$

e

$$A - B = (A - O) - (B - O) = \left(2R - \frac{3R}{2}\sin\theta\right)\boldsymbol{e}_x + \frac{3R}{2}\cos\theta\boldsymbol{e}_y,$$

per cui

$$\|A - B\|^2 = \frac{9}{4}R^2 + 4R^2 - 6R^2\sin\theta = \frac{25}{4}R^2 - 6R^2\sin\theta.$$

L'energia potenziale è dunque

$$\begin{aligned} V(\theta) &= mgy_C + \frac{k}{2}\|A - B\|^2 \\ &= -mg\frac{R}{2}\cos\theta + \frac{kR^2}{2}\left(\frac{25}{4} - 6\sin\theta\right) \\ &= -mg\frac{R}{2}\cos\theta - 3kR^2\sin\theta + \frac{25}{8}kR^2 \\ &= 3kR^2\left(-\frac{mg}{6kR}\cos\theta - \sin\theta\right) + \frac{25}{8}kR^2. \end{aligned}$$

Ricordando che $\dfrac{mg}{6kR} = 1$, otteniamo

$$\begin{aligned} V(\theta) &= -3kR^2(\cos\theta + \sin\theta) + \frac{25}{8}kR^2 \\ &= -\frac{6kR^2}{\sqrt{2}}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{25}{8}kR^2. \end{aligned} \tag{8}$$

Per determinare le configurazioni di equilibrio si devono individuare le soluzioni di $V'(\theta) = 0$, cioè

$$V'(\theta) = -\frac{6kR^2}{\sqrt{2}}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

cioè

$$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4},$$

$$\theta + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}, \quad \Rightarrow \quad \theta = -\frac{3\pi}{4}.$$

La stabilità dipende dal segno di $V''(\theta)$. Siccome

$$V''(\theta) = \frac{6kR^2}{\sqrt{2}}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right),$$

abbiamo

$$V''(\pi/4) = \frac{6kR^2}{\sqrt{2}} = 3kR^2\sqrt{2} > 0, \quad \Rightarrow \quad \pi/4 \text{ stabile},$$

$$V''(-3\pi/4) = -\frac{6kR^2}{\sqrt{2}} = -3kR^2\sqrt{2} < 0, \quad \Rightarrow \quad -3\pi/4 \ \text{ instabile.}$$

(b) . In questo caso il sistema rigido ha un punto fisso, il punto O, per cui

$$T = \frac{1}{2} I(O) \dot{\theta}^2 .$$

Applicando il teorema di Hygens otteniamo

$$I(O) = \frac{mR^2}{2} + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}mR^2,$$

e quindi

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}mR^2\right)\dot{\theta}^2 . \tag{9}$$

Per quel che riguarda la frequenza (o meglio la pulsazione) in corrispondenza di $\theta = \pi/4$, si ha

$$\omega^2 = \frac{V''(\pi/4)}{\frac{3}{4}mR^2} = \frac{3kR^2\sqrt{2}}{\frac{3}{4}mR^2} = 4\sqrt{2}\frac{k}{m} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{g}{R}.$$

(c) . Ricordando la (8) e la (9), scriviamo l'Hamiltoniana del sistema

$$H = T + V = \frac{3}{8}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{6kR^2}{\sqrt{2}}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{25}{8}kR^2,$$

ovvero, siccome $kR^2 = \sqrt{2}/6$ e $mR^2 = 4/3$

$$H = T + V = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{25\sqrt{2}}{48}.$$

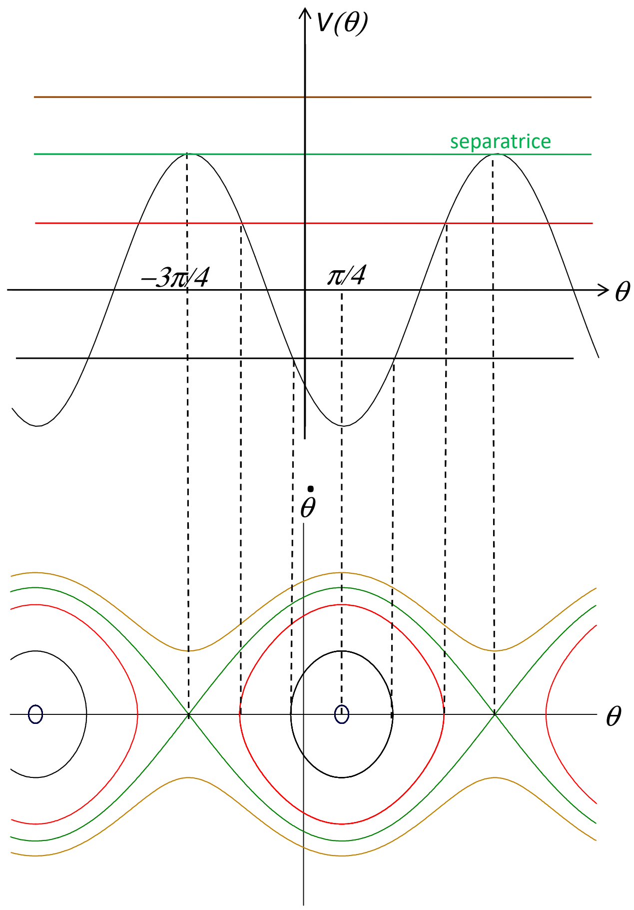
Ponendo quindi $E' = E + \frac{25\sqrt{2}}{48}$, abbiamo

$$\dot{\theta}^2 = 2\left[E' + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

da cui l'analisi qualitativa discende facilmente:

- $E' = -1$, configurazione di equilibrio stabile;
- $-1 < E' < 1$, orbite limitate e periodiche;
- $E' = 1$, separatrice;
- $E' > 1$, orbite illimitate.

La rappresentazione del moto nel piano delle fasi è data dalla seguente figura.


V(θ)
separatrice
−3π/4
π/4
θ
θ̇
θ