Primo Compitino Sistemi Dinamici
6 febbraio 2014

Primo esercizio

Un punto materiale P di massa $m = 1$, si muove su una retta priva di attrito ed è soggetto ad una forza la cui energia potenziale è

$$V(x) = V_o \left(\frac{3}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right).$$

(*a*). Si scriva la funzione di Lagrange del punto materiale e l'equazione del moto.

(*b*). Detta E l'energia meccanica totale, si determini l'intervallo di valori di E per cui il moto può essere confinato all'interno dell'intervallo $(-1, 1)$.

(*c*). Se $x_o \in (-1, 1)$ è la posizione iniziale di P, si determini, in funzione di x_o, il valore minimo della velocità iniziale $\dot{x}(0)$ per cui $\lim_{t\to\infty} x(t) = +\infty$.

(*d*). Si rappresentino schematicamente, al variare di E, le orbite nel piano delle fasi $\left(x, \dot{x}\right)$, individuando le eventuali separatrici.

Secondo esercizio

E' dato un cono la cui espressione in forma parametrica è (si considera solo $z > 0$)

$$\begin{cases} x = r\cos\phi, \\ y = r\sin\phi, \qquad \phi \in (0, 2\pi], \quad r \in (0, +\infty). \\ z = r, \end{cases}$$

Un punto materiale P di massa $m = 1$, è vincolato a muoversi sul cono soggetto ad una forza la cui energia potenziale, espressa direttamente in coordinate (r, ϕ), è

$$\hat{V}(r) = -V_o a r e^{-ar}, \quad \text{con} \quad a > 0, \quad V_o > 0, \quad \text{parametri costanti.}$$

Si suppone che la superficie sia priva di attrito.

(*a*). Si scriva la Lagrangiana del punto materiale e le equzioni del moto, individuando eventuali coordinate cicliche.

(*b*). Si determini l'energia potenziale efficace.

(*c*). Possono esistere orbite circolari di raggio r se $r < \dfrac{1}{a}$? Si motivi la risposta.

(*d*). Supponendo adesso che $\hat{V}(r) = -\sqrt{2}e^{-r}$, sia $\boldsymbol{S}$ una forza parallela alla superficie. Si determinino le condizioni che $\boldsymbol{S}$ deve soddisfare affinché esistano posizioni di equilibrio.

SVOLGIMENTO

Primo esercizio

(a) . Siccome $m = 1$, la Lagrangiana è semplicemente

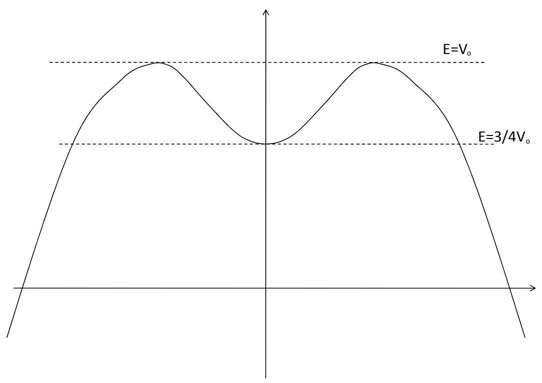
$$\mathcal{L} = \frac{\dot{x}^2}{2} - V(x) = \frac{\dot{x}^2}{2} - V_o\left(\frac{3}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right).$$

L'equazione del moto è

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \underbrace{V_o\left(x - x^3\right)}_{V'(x)} = 0.$$

(b) . Si deve tracciare il grafico di $V(x)$. Si vede banalmente che $V(x)$ è una funzione pari e che ha un minimo relativo in $x = 0$, dove $V(0) = 3/4V_o$, e due massimi relativi in $x = \pm 1$, dove $V(\pm 1) = V_o$. In grafico è riportato nella figura sottostante.

Dall'analisi del grafico si deduce che il moto può essere confinato in $(-1, 1)$ se $3/4V_o \le E \le V_o$.



(c) . L'energia meccanica E si calcola in base ai dati iniziali

$$E = \frac{\dot{x}^2(0)}{2} + V(x_o).$$

Se vogliamo che, partendo da $x(0) = x_o \in (-1, 1)$, $x(t) \longrightarrow \pm\infty$, è necessario che $E > V_o$, cioè

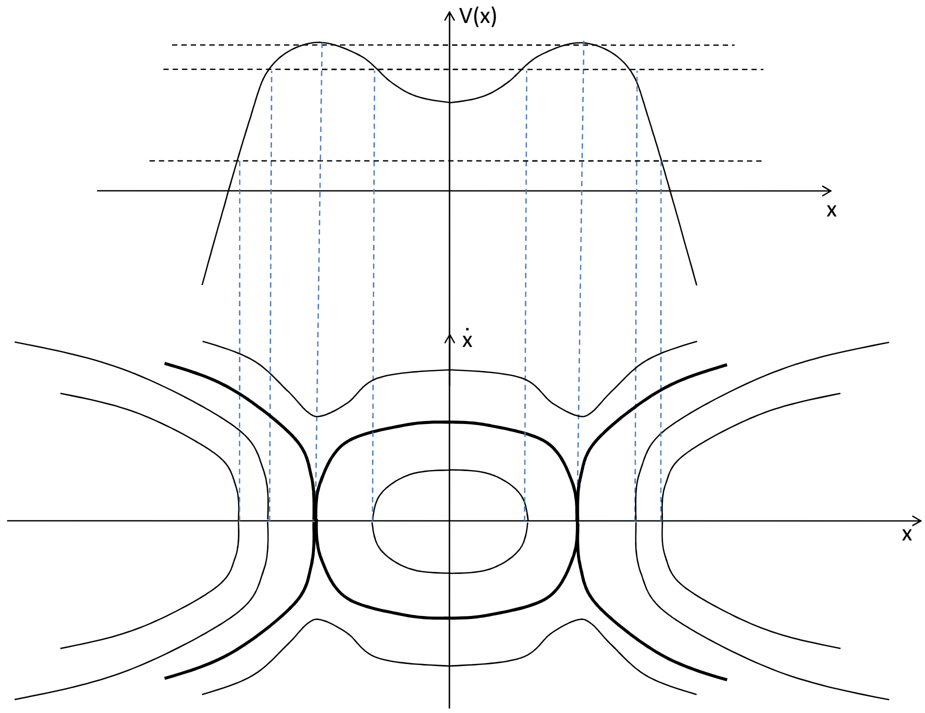
$$\frac{\dot{x}^2(0)}{2} + V(x_o) > V_o, \quad \Longrightarrow \quad \dot{x}^2(0) > 2\left(V_o - V(x_o)\right) = V_o\left(\frac{1}{2} - x_o^2 + \frac{x_o^4}{2}\right)$$

da cui

$$\dot{x}(0) < -\sqrt{V_o\left(\frac{1}{2} - x_o^2 + \frac{x_o^4}{2}\right)}, \quad \text{oppure} \quad \dot{x}(0) > \sqrt{V_o\left(\frac{1}{2} - x_o^2 + \frac{x_o^4}{2}\right)}.$$

In particolare, siccome la condizione richiesta è $x(t) \longrightarrow +\infty$, dovrà essre $\dot{x}(0) > \sqrt{V_o\left(\frac{1}{2} - x_o^2 + \frac{x_o^4}{2}\right)}$.

(d) . Si veda la figura. In grassetto sono riportate le separatrici.



Secondo esercizio

(a). Calcoliamo i vettori che costituiscono la base locale del piano tangente

$$\boldsymbol{u}_r = \cos\phi \boldsymbol{e}_x + \sin\phi \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z, \quad \boldsymbol{u}_\phi = -r\sin\phi \boldsymbol{e}_x + r\cos\phi \boldsymbol{e}_y \ ,$$

con $|\boldsymbol{u}_r|^2 = 2$, e $|\boldsymbol{u}_\phi|^2 = r^2$. L'energia cinetica è data da

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{r} & \dot{\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(2\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}\right).$$

La funzione di Lagrange è dunque

$$\mathcal{L} = T - \hat{V}(r) = \frac{1}{2}\left(2\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) + V_o a r e^{-ar}$$

Siccome in $\mathcal{L}$ non compare ϕ, si deduce che ϕ è una coordinata ciclica, ovvero $p_\phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}$, è costante. Infatti

$$r^2\dot{\phi} = A_o, \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{A_o}{r^2} \tag{1}$$

L'equazione per r è

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = 0, \quad \Rightarrow \ 2\ddot{r} - \frac{\partial}{\partial r}\left(T - \hat{V}(r)\right) = 0, \quad \Rightarrow \ 2\ddot{r} - \underbrace{\frac{\partial T}{\partial r}}_{r\dot{\phi}^2} + \frac{\partial\hat{V}}{\partial r} = 0,$$

ovvero

$$2\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 - V_o a\left(1 - ar\right)e^{-ar} = 0.$$

Sfruttando la (1)

$$2\ddot{r} + \underbrace{\left(-\frac{A_o^2}{r^3}\right)}_{\frac{d}{dr}\left(\frac{A_o^2}{2r^2}\right)} + \underbrace{\left(-V_o a\left(1-ar\right)e^{-ar}\right)}_{\frac{d\hat{V}}{dr}} = 0, \quad \Rightarrow \; 2\ddot{r} + \frac{d}{dr}\left(\frac{A_o^2}{2r^2} + \hat{V}\left(r\right)\right) = 0,$$

da cui

$$\ddot{r} \; = -\frac{1}{2}\frac{d}{dr}\left(\frac{A_o^2}{2r^2} - V_o are^{-ar}\right).$$

(b) . Partendo dall'equazione per r, possiamo individuare l'energia potenziale efficace

$$V_{eff}\left(r\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{A_o^2}{2r^2} + \hat{V}\left(r\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{A_o^2}{2r^2} - V_o are^{-ar}\right)$$

(c) . Le orbite circolari sono le soluzioni di $\dfrac{dV_{eff}\left(r\right)}{dr} = 0$. Dobbiamo stabilire quando l'equazione

$$\frac{dV_{eff}\left(r\right)}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{A_o^2}{r^3} + V_o a\left(ar-1\right)e^{-ar} = 0, \tag{2}$$

può essere risolta e quando non sarà sicuramente risolubile. Riscrivendo la (2) abbiamo

$$V_o a\left(ar-1\right)e^{-ar} = \frac{A_o^2}{r^3},$$

dove V_o ed a sono positivi. Concludiamo che la (2) non ammete sicuramente soluzioni se

$$ar - 1 < 0, \quad \Leftrightarrow \quad r < \frac{1}{a}$$

Abbiamo quindi provato che se $r < 1/a$ non esistono orbite circolari. Se invece $ar - 1 > 0$, ovvero $r > \dfrac{1}{a}$, la (2) potrebbe avere soluzioni ma la loro esistenza non è garantita.

(d) . Se $\boldsymbol{S}$ è parallela alla superificie la esprimeremo in termini della base locale

$$\boldsymbol{S} = S_r\frac{\boldsymbol{u}_r}{|\boldsymbol{u}_r|} + S_\phi\frac{\boldsymbol{u}_\phi}{|\boldsymbol{u}_\phi|}.$$

dove S_r, e S_ϕ sono le componenti della forza. Le equazioni da cui determinare l'equilibrio sono

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial\hat{V}}{\partial\phi} + S_\phi r = 0 \\ \\ -\dfrac{\partial\hat{V}}{\partial r} + S_r\sqrt{2} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} S_\phi = 0 \\ \\ -e^{-r} + S_r = 0 \end{cases}$$

Quindi potermo avere equilibrio soltanto se $S_\phi = 0$ e se la seconda equazione ammette soluzioni per $r > 0$. In particolare, se $0 < S_r < 1$, la seconda equazione è risolubile e la configurazione di equilibrio è $r = \ln\left(1/S_r\right)$, e ϕ qualsiasi.