Primo Compitino Sistemi Dinamici
12 - 02 - 2018

Primo esercizio

E' data una particella di massa $m = 1$ vincolata a muoversi sull'asse x e soggetta soltanto alla forza

$$\boldsymbol{F} = -4x^3 e^{-x^4} \boldsymbol{e}_x.$$

(a) . Determinare l'energia potenziale $V(x)$, scrivere la Lagrangiana ed individuare le eventuali configurazioni di equilibrio discutendone la stabilità.

(b) . Dato x_o punto d'inversione, dimostrare che il periodo diverge per $|x_o| \to +\infty$.

(c) . Supponendo $x(0) = 0$, determinare la velocità iniziale $\dot{x}_o$ in modo che il moto si inverta in $x = 1$.

Secondo esercizio

Una particella di massa $m = 1$, è soggetta alla forza di tipo centrale

$$\boldsymbol{F} = -\left(1 + \ln|P - O|\right) \frac{(P - O)}{|P - O|}.$$

(a) . Scrivere la funzione di Lagrange della particella.

(b) . Verificare che tutti i moti sono limitati.

(c) . Data la condizione iniziale $r(0) = 1$, determinare $\dot{\varphi}(0)$ affinché la particella percorra un'orbita circolare.

SVOLGIMENTO

Primo esercizio

(a) . L'energia potenziale $V(x)$ è tale che

$$\frac{dV(x)}{dx} = -\left(-4x^3 e^{-x^4}\right) = 4x^3 e^{-x^4}.$$

Di conseguenza

$$V(x) = -e^{-x^4}. \tag{1}$$

Siccome il punto materiale è vincolato sulla retta

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{x}\boldsymbol{e}_x, \qquad \Longrightarrow \qquad T = \frac{\dot{x}^2}{2}.$$

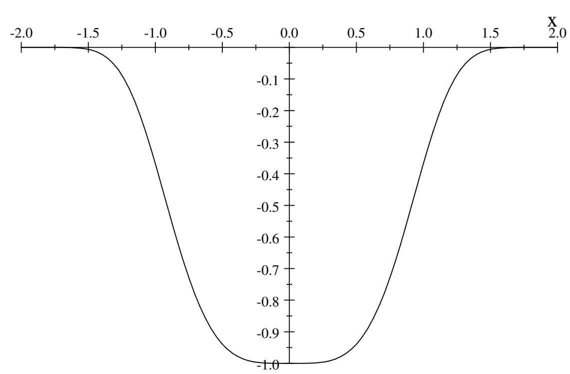
La funzione di Lagrange è dunque

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{\dot{x}^2}{2} + e^{-x^4}.$$

Per determinare la posizioni di equilibrio applichiamo il criterio di Dirichlet, ovvero ricerchiamo i massimo/minimi dell'energia potenziale $V(x)$. Abbiamo

$$V'(x) = 0, \qquad \Longrightarrow \quad 4x^3 e^{-x^4} = 0, \qquad x = 0, \quad \text{p.to di equilibrio.}$$

Il punto di equilibrio risulta stabile perché è un minimo per $V(x)$. Infatti $V'(x) < 0$ per $x < 0$ e $V'(x) > 0$ per $x > 0$. Il grafico di $V(x)$ è riportato nella seguente figura.



(b) . Se x_o è punto d'inversione, ad esso corrisponde una ed una sola energia E data da

$$E = -e^{-x_o^4}. \tag{2}$$

E' evidente dunque che se $x_o \to \infty$ allora $E \to 0$ e viceversa. Calcolando dunque il periodo che corrisponde a $E = 0$ si ha $2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{\sqrt{2e^{-\eta^4}}}$ che diverge. Possiamo tuttavia procedere anche in maniera più formale. Infatti, dal momento che $V(x)$ è pari, abbiamo

$$T(x_o) = 4\int_0^{x_o} \frac{d\eta}{\sqrt{2\left(-|E(x_o)| + e^{-\eta^4}\right)}} \geq \frac{4}{\sqrt{2}}\int_0^{x_o} \frac{d\eta}{\sqrt{e^{-\eta^4}}},$$

con $E(x_o)$ dato dalla (2). Se adesso $x_o \to +\infty$, il secondo integrale diverge e quindi diverge anche il periodo.

(c). L'energia meccanica totale (che si conserva) è data da

$$E = \frac{\dot{x}^2}{2} - e^{-x^4}.$$

Quindi l'energia associata alle condizioni iniziali $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_o$ è

$$E_o = \frac{\dot{x}_o^2}{2} - 1, \tag{3}$$

che, evidentemente, dipende da $\dot{x}_o$. L'esercizio richiede di selezionare $\dot{x}_o$ in modo tale che l'intersezione fra $V(x)$ e la retta orizzontale E_o avvenga in $x = 1$. Quindi $\dot{x}_o$ deve essere preso in modo tale che sia soddisfatta l'equazione

$$V(x)|_{x=1} = E_o, \quad \underset{(1),\ (3)}{\Longrightarrow} \quad -e^{-1} = \frac{\dot{x}_o^2}{2} - 1.$$

Otteniamo dunque

$$\dot{x}_o = \pm\sqrt{2\left(1 - \frac{1}{e}\right)}\ .$$

Secondo esercizio

(a) . Lavorando in coordinate polari piane

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi, \end{aligned}$$

abbiamo $(P-O) = r\boldsymbol{e}_r$, per cui

$$\boldsymbol{F} = -\left(1+\ln r\right)\boldsymbol{e}_r \ .$$

L'energia potenziale è dunque

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\left[-\left(1+\ln r\right)\right], \quad \Rightarrow \quad V\left(r\right) = r\ln r,$$

mentre l'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^{\,2} + r^2\dot{\varphi}^{\,2}\right).$$

La funzione di Lagrange è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^{\,2} + r^2\dot{\varphi}^{\,2}\right) - r\ln r$$

(b) . E' evidente che φ è variabile ciclica. Di conseguenza

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = A_o \ ,$$

dove A_o è una costante dipendente dalle condizioni iniziali. Abbiamo dunque

$$r^2\dot{\varphi} = A_o \ , \quad \Longrightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{A_o}{r^2} \ . \tag{4}$$

Determiniamo l'energia potenziale efficace sfruttando la funzione di Hamilton $\mathcal{H} = T + V$, cioè

$$\mathcal{H} = \frac{\dot{r}^{\,2}}{2} + \frac{r^2}{2}\underbrace{\dot{\varphi}^{\,2}}_{\frac{A_o^2}{r^4}} + r\ln r = \frac{\dot{r}^{\,2}}{2} + \frac{A_o^2}{2r^2} + r\ln r.$$

Si ottiene quindi

$$V_{eff}\left(r\right) = \frac{A_o^2}{2r^2} + r\ln r \ .$$

Per provare che tutti i moti sono limitati è necessario studiare qualitativamente la funzione $V_{eff}\left(r\right)$ per $r \geq 0$. Si suppone innanzitutto che $A_o \neq 0$ e si osserva che

$$V'_{eff}\left(r\right) = -\frac{A_o^2}{r^3} + 1 + \ln r, \tag{5}$$

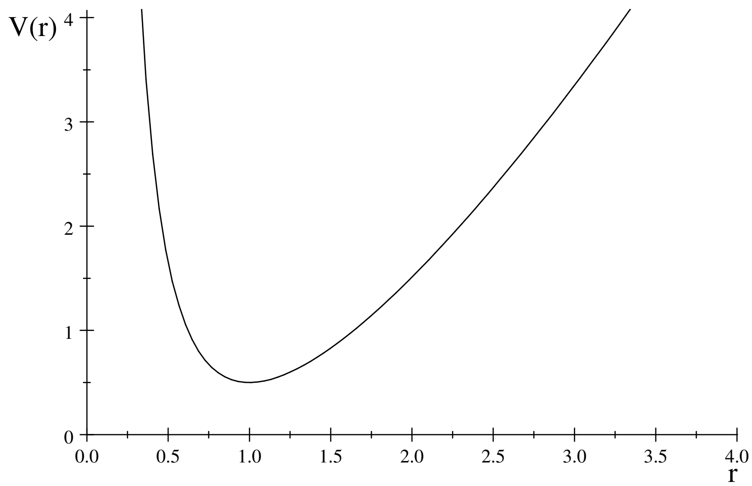
ha un unico zero. Inoltre $V''_{eff}\left(r\right) > 0$ e quindi $V_{eff}\left(r\right)$ presenta un minimo. Abbiamo poi

$$\lim_{r\to 0} V_{eff}\left(r\right) = +\infty, \qquad \lim_{r\to\infty} V_{eff}\left(r\right) = +\infty.$$

L'andamento $V_{eff}\left(r\right)$ è dunque rappresentato nella successiva figura.
Quindi, dato comunque $E > \min V_{eff}\left(r\right)$, abbiamo che $0 < r_{\min} \leq r\left(t\right) \leq r_{\max} < +\infty$, essendo $r_{\min}$ e $r_{\max}$ le intersezioni fra $V_{eff}\left(r\right)$ e la retta orizzontale E.

Se $A_o = 0$, la particella si muove su una retta che, senza perdere di generalità, possiamo identificare con l'asse x. La particella è soggetta alla forza

$$\boldsymbol{F} = -\left(1+\ln|x|\right)\left(sgnx\right)\boldsymbol{e}_x$$



che risulta attrattiva verso l'origine per $|x|$ sufficientemente grandi ma che diventa repulsiva e diverge per $|x| \to 0$. La corrispondente energia potenziale è

$$V(x) = |x| \ln |x|,$$

che non è C^1 in $x = 0$. Dall'analisi del grafico di $V(x)$ deduciamo che se $\min V(x) \leq E < 0$, la particella oscilla attorno alle ascisse in cui $V(x)$ ha il suo minimo, rimanendo sempre a destra oppure a sinistra dell'origine. Se $E \geq 0$ non possiamo effettuare l'analisi qualitativa standard non essendo $V(x)$ sufficientemente regolare. Il moto è comunque limitato.

(c) . Ricordando lo (4) abbiamo

$$\dot{\varphi}(0) = \frac{A_o}{r(0)^2}, \quad \Longrightarrow \quad A_o = \dot{\varphi}(0).$$

La particella percorrerà un'orbita circolare di raggio $r = 1$, se l'energia potenziale efficace $V_{eff}(r)$ ha il suo minimo proprio in in $r = 1$. Quindi, sfruttando la (5), si ottiene

$$\left. V'_{eff}(r) \right|_{r=1} = 0, \quad \Rightarrow \quad -A_o^2 + 1 = 0,$$

da cui $A_o = \pm 1$, e $\dot{\varphi}(0) = \pm 1$.