Prova Scritta di Sistemi Dinamici
04 - 07 - 2017

Primo esercizio

E' dato un punto materiale P di massa $m = 1$, soggetto alla forza centrale del tipo

$$\boldsymbol{F} = f(r)\ \boldsymbol{\kappa}_r,$$

dove $r = |P - O|$, $\boldsymbol{\kappa}_r$ è il versore radiale e $f(r)$ è una funzione C^1 strettamente decrescente, definita per ogni $r \geq 0$.

(a). Determinare l'energia potenziale efficace e dimostrare che al più esiste una sola orbita circolare e che questa è stabile.

(b). Verificare che se $f(r) < 0$ allora esiste l'orbita circolare.

(c). Trovare una condizione sufficiente su $f(r)$ affinché tutti i moti siano limitati.

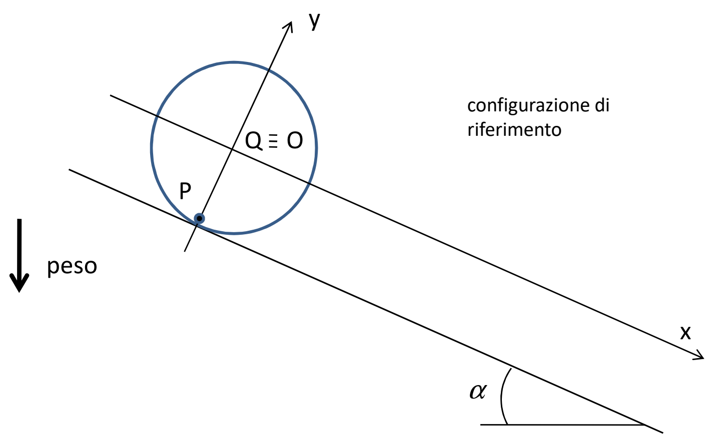
Secondo esercizio

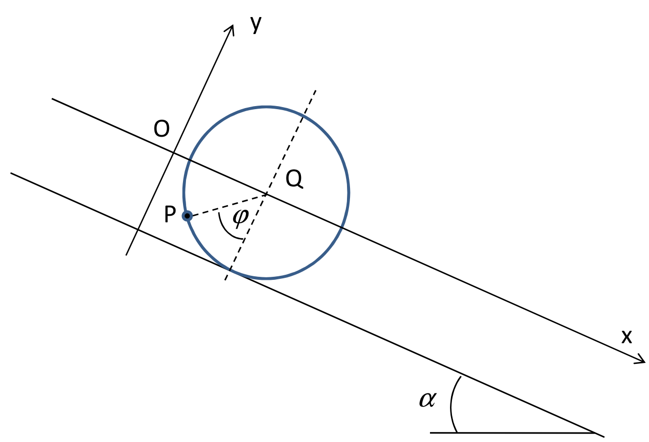
Un sistema rigido è formato da un disco di raggio R e massa m, sul cui bordo è fissato un punto materiale P di massa m. Il disco è vincolato a rotolare senza strisciare su una guida che forma un angolo α con l'orizzontale. Il centro del disco è denotato con la lettera Q (v. figura). Si utilizzi come sistema di riferimento quello centrato in O il cui asse x è parallelo alla guida (v. figura) e come variabile lagrangiana l'angolo di rotolamento φ, misurato a partire dalla configurazione di riferimento corrispondente a quella in cui $Q \equiv O$ e P coincide col punto di contatto fra guida e disco. Il peso è diretto come in figura e $\varphi > 0$ corrisponde a rotazioni antiorarie.

(a). Determinare l'energia cinetica del sistema.

(b). Determinare l'energia potenziale del sistema.

(c). Supponendo $\alpha = 30°$, si determinino le configurazioni di equilibrio.


y
configurazione di
riferimento
Q ≡ O
P
peso
x
α


y
O
Q
P
φ
x
α

SVOLGIMENTO

Primo esercizio

(a) . Siccome

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\partial V}{\partial r}\boldsymbol{\kappa}_r,$$

abbiamo

$$V(r) = -\int_0^r f(s)\,ds.$$

Sempre utilizzando le coordinate polari abbiamo

$$(P-O) = r\cos\varphi\boldsymbol{e}_x + r\sin\varphi\boldsymbol{e}_y \ ,$$

per cui

$$\dot{(P-O)} = \dot{r}\boldsymbol{\kappa}_r + r\dot{\varphi}\boldsymbol{\kappa}_\varphi \ ,$$

dove $\boldsymbol{\kappa}_\varphi = -\sin\varphi\boldsymbol{e}_x + \cos\varphi\boldsymbol{e}_y$. L'energia cinetica di P è dunque

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^{\,2} + r^2\dot{\varphi}^{\,2}\right),$$

e la funzione di Lagrange

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^{\,2} + r^2\dot{\varphi}^{\,2}\right) + \int_0^r f(s)\,ds \ .$$

La variabile φ è ciclica,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = r^2\dot{\varphi} = A_o, \quad \Longrightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{A_o}{r^2},$$

con A_o costante che dipende dai dati iniziali.

Per determinare l'energia potenziale efficace conviene passare dalla funzione Hamiltonia

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \left(\frac{\dot{r}^{\,2}}{2} + \frac{r^2}{2}\dot{\varphi}^{\,2}\right) - \int_0^r f(s)\,ds \\ &= \frac{\dot{r}^{\,2}}{2} + \frac{A_o^2}{2r^2} - \int_0^r f(s)\,ds \ .\end{aligned}$$

L'energia potenziale efficace è dunque

$$V_{eff}(r) = \frac{A_o^2}{2r^2} - \int_0^r f(s)\,ds.$$

Le eventuali orbite circolari si possono avere soltanto se $A_o \neq 0$ e corrispondono agli zeri di $V'_{eff}(r)$, cioè

$$V'_{eff}(r) = -\frac{A_o^2}{r^3} - f(r) = 0.$$

Data la regolarità di $f(r)$, abbiamo che $\lim_{r\to 0^+} V'_{eff}(r) = -\infty$, mentre

$$V''_{eff}(r) = \frac{3A_o^2}{r^4} - f'(r) > 0, \qquad \forall\ r > 0,$$

visto che, per ipotesi, $f'(r) < 0, \forall\ r \geq 0$. Di conseguenza non è detto che $V'_{eff}(r) = 0$ abbia soluzione, ma se la soluzione esiste questa è unica. Abbiamo così provato che al massimo esiste una sola orbita circolare. Non solo, ma dato che $V''_{eff}(r) > 0, \forall\ r > 0$, nel caso in cui l'orbita circolare esista questa è stabile perchè corrisponde ad un minimo di V_{eff}.

(b) . Se adesso supponiamo che $f(r) < 0$, $\forall\, r \geq 0$, allora

$$-f(r) = |f(r)| > 0, \quad \forall\, r \geq 0.$$

Ricordando poi che $f(r)$ è strettamente monotona decrescente, $|f(r)|$ risulterà monotona crescente per cui esite $\lim_{r\to\infty} |f(r)|$ e questo è positivo, eventualmente uguale a $+\infty$. Abbiamo dunque

$$\lim_{r\to 0^+} V'_{eff}(r) = \lim_{r\to 0^+} \left(-\frac{A_o^2}{r^3} + |f(r)| \right) = -\infty,$$

$$\lim_{r\to 0^+} V'_{eff}(r) = \lim_{r\to\infty} \left(-\frac{A_o^2}{r^3} + |f(r)| \right) = \lim_{r\to\infty} |f(r)| > 0,$$

e perciò, dato che $V''_{eff}(r) > 0$, $\forall\, r > 0$, l'equazione $V'_{eff}(r) = 0$, ammette una ed una sola soluzione. L'orbita circolare in tal caso esiste ed è unica.

(c) . La condizione necessaria affinché tutte le orbite siano limitate è che $V_{eff}(r)$ abbia una forma a "buca con pareti infinite". Siccome

$$\lim_{r\to 0^+} V_{eff}(r) = +\infty,$$

è sufficiente richiedere che

$$\lim_{r\to\infty} V_{eff}(r) = +\infty \quad \Longrightarrow \quad -\int_0^\infty f(s)\, ds = +\infty.$$

Secondo esercizio

(a) . Il vincolo di rotolamento pure impone

$$Q - O = -R\varphi \boldsymbol{e}_x\ ,$$

per cui

$$\dot{(Q - O)} = -R\dot{\varphi} \boldsymbol{e}_x\ .$$

Osserviamo che, riferendoci alla figura, l'angolo φ è negativo ed infatti l'ascissa di Q risulta positiva.

Per quanto riguarda il punto P abbiamo

$$\begin{aligned} P - O &= (P - Q) + (Q - O) \\ &= (R\sin\varphi \boldsymbol{e}_x - R\cos\varphi \boldsymbol{e}_y\ ) + (-R\varphi \boldsymbol{e}_x)\,, \end{aligned}$$

e dunque

$$\dot{(P - O)} = \left[(-R + R\cos\varphi)\, \boldsymbol{e}_x + R\sin\varphi \boldsymbol{e}_y\ \right] \dot{\varphi}\ .$$

L'energia cinetica del disco è

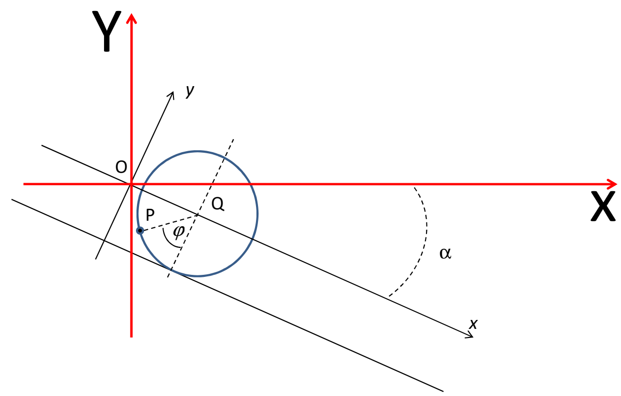
$$T_{disco} = \frac{1}{2} I(Q)\, \dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2} \dot{(Q - O)}^2 = \frac{3}{4} m R^2 \dot{\varphi}^2,$$

mentre quella del punto materiale P è

$$T_P = \frac{m}{2} \dot{(P - O)}^2 = m R^2 \dot{\varphi}^2 (1 - \cos\varphi)\,.$$

Abbiamo quindi

$$T = m R^2 \dot{\varphi}^2 \left(\frac{7}{4} - \cos\varphi \right).$$



(b) . Per determinare l'energia potenziale dovuta alla forza peso dobbiamo individuare un livello di riferimento e rispetto ad esso calcolare le quote di P e di Q. Come livello di riferimento consideriamo la retta orizzonatale che passa per O. Anzi per esser più precisi consideriamo il sistema di riferimento $\{O, X, Y\}$ rappresentato nella figura sovrastante, in modo che la quata è l'ordinata Y.

L'energia potenziale è dunque

$$V(\varphi) = mgY(Q) + mgY(P) = mg(Y(Q) + Y(P)).$$

Dobbiamo quindi trasformare le coordinate dei punti Q e P nel SdR $\{O, X, Y\}$. Siccome $\{O, X, Y\}$ è ruotato di un angolo $\alpha > 0$ rispetto a $\{O, x, y\}$, si ha

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$\begin{pmatrix} X(Q) \\ Y(Q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -R\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R\varphi\cos\alpha \\ R\varphi\sin\alpha \end{pmatrix},$$

e

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X(P) \\ Y(P) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -R\varphi + R\sin\varphi \\ -R\cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-R\varphi + R\sin\varphi)\cos\alpha - R\cos\varphi\sin\alpha \\ (R\varphi - R\sin\varphi)\sin\alpha - R\cos\alpha\cos\varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si noti ancora la coerenza delle formule: nel caso della figura si ha $\varphi < 0$, ed infatto abbiamo $Y(Q) = R\varphi\sin\alpha < 0$. In particolare $Y(Q) = 0$ se $\alpha = 0$. Quindi, tornando all'energia potenziale, scriveremo

$$\begin{aligned} V(\varphi) &= mgR[2\varphi\sin\alpha - \sin\varphi\sin\alpha - \cos\alpha\cos\varphi] \\ &= mgR[2\varphi\sin\alpha - \cos(\varphi - \alpha)]. \end{aligned}$$

(c) . Le posizioni di equilibrio si individuano trovando gli zeri di $V'(\varphi)$, cioè

$$V'(\varphi) = mgR[2\sin\alpha + \sin(\varphi - \alpha)].$$

Ora, $\alpha = 30^\circ$ per cui $\sin\alpha = 1/2$, e quindi

$$V'(\varphi) = 0, \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) = -1, \quad \Rightarrow \quad \varphi - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Quindi, le configurazioni di equilibrio sono date da

$$\varphi = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \qquad k = 0,\ \pm 1,\ \ldots\ .$$