Prova Scritta di Sistemi Dinamici
17 - 09 - 2018

Primo esercizio

E' data la superficie di rotazione $x(z,\varphi) = f(z)\cos\varphi,\ y(z,\varphi) = f(z)\sin\varphi,\ z \in \mathbb{R}$, su cui è vincolata una particella di massa $m = 1$, soggetta alla forza peso $-g\boldsymbol{e}_z$. La superficie è priva di attrito. La posizione iniziale della particella è $\boldsymbol{x}(0) = f(z_0)\,\boldsymbol{e}_x + z_0\boldsymbol{e}_z$, $z_0 \in \mathbb{R}$, e la velocità iniziale è $\dot{\boldsymbol{x}}(0) = v_0\boldsymbol{e}_y$, $v_0 > 0$.

(a). Dimostrare che il moto per cui $z(t) = z_0$, avviene soltanto se $f(z_0) = f'(z_0)\,v_0^2/g$.

(b). Tenendo presente la relazione del precedente punto (a) e supponendo $f(z) = 2 - \dfrac{1}{1+z^2}$, dedurre i possibili z_0 sui quali è possibile il moto di cui al precedente punto e calcolare la corrispondente velocità angolare $\dot{\varphi}$ della particella.

(c). Considerando la funzione $f(z)$ del precedente punto (b), $z_0 < 0$ e $\frac{1}{2}v_0^2 + gz_0 < 0$, provare che $z(t)$ è negativo e che il moto è inferiormente illimitato per $t \to \infty$.

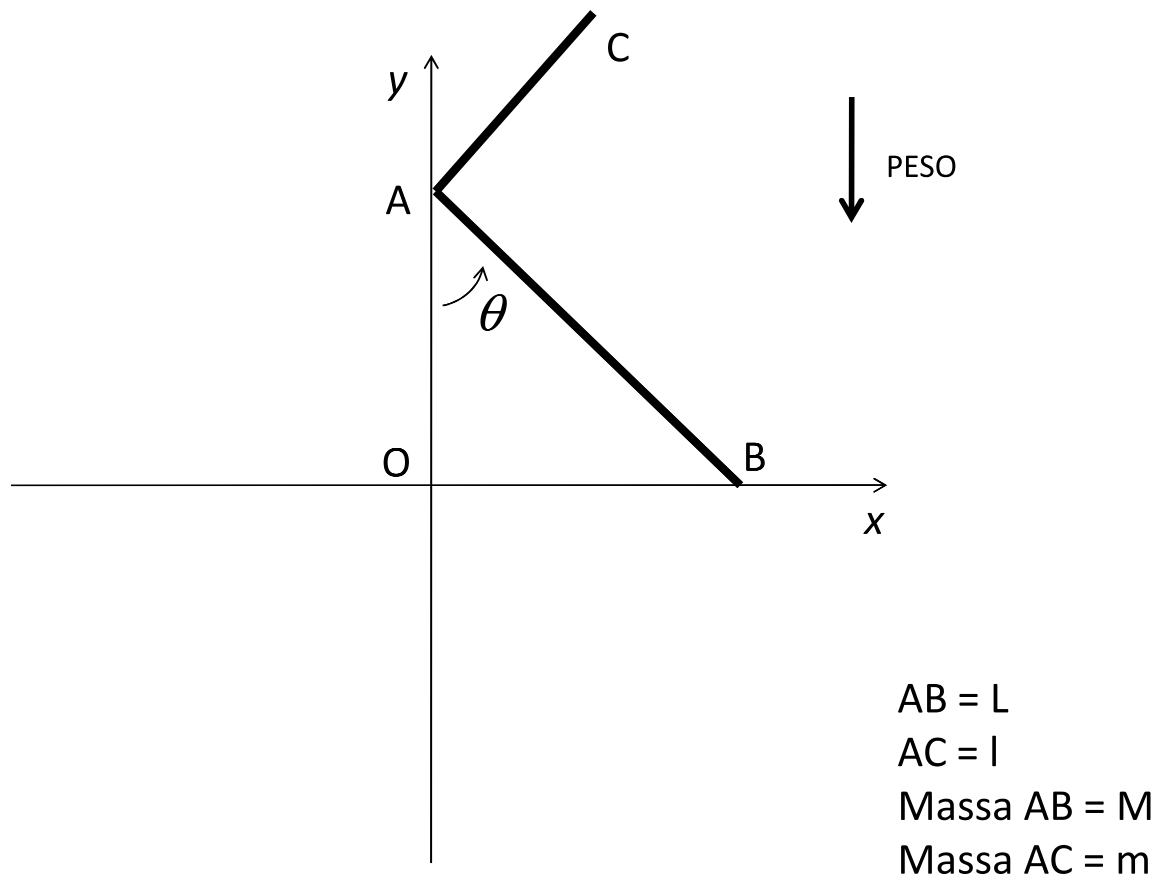
Secondo esercizio

Un sistema rigido è formato da due aste AB e AC saldate insieme nel punto A in modo da formare una "L". L'asta AB è lunga L ed ha massa M, l'asta AC ha massa m e lunghezza l. Gli estremi A e B dell'asta sono vincolati sugli assi y e x, rispettivamente, come mostrato in figura. Si condieri come variabile lagrangiana l'angolo $\theta \in (-\pi, \pi]$ che l'asta AB forma con l'asse y, con $\theta > 0$ per rotazioni antiorarie. Il peso è come in figura e tutti i vincoli sono lisci.

(a). Determinare le configurazioni di equilibrio, analizzandone la stabilità, nell'ipotesi $m \gg M$ e $l = 2L$.

(b). Determinare l'energia cinetica del sistema e, sempre nelle ipotesi $m \gg M$, $l = 2L$ calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni.

(c). Dire, motivando la risposta, se applicando una forza $\boldsymbol{F} = F\boldsymbol{e}_x$ all'estremo B si può avere equilibrio per $\theta = \pi/2$.


C
y
PESO
A
θ
O
B
x
AB = L
AC = l
Massa AB = M
Massa AC = m

SVOLGIMENTO

Primo esercizio

(a). L'energia cinetica della particella è

$$T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dot{z} & \dot{\varphi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (1+f\,')^2 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left((1+f\,')^2\,\dot{z}^2 + f^2\dot{\varphi}\right),$$

mentre l'energia potenziale

$$V(z) = gz,$$

per cui

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(1+f\,')^2\,\dot{z}^2 + f\,^2\dot{\varphi}^2\right] - gz,$$

e

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left[(1+f\,')^2\,\dot{z}^2 + f\,^2\dot{\varphi}^2\right] + gz.$$

La variabile φ è ciclica, per cui

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = f\,^2(z)\,\dot{\varphi} = f\,^2(z_0)\,\dot{\varphi}(0)\,, \tag{1}$$

dove bisogna determinare $\dot{\varphi}(0)$. Sfruttando le condizioni iniziali e la parametrizzazione della superficie è facile dedurre che $\varphi(0) = 0$ e che $z(0) = z_0$. Abbiamo dunque

$$\dot{\boldsymbol{x}}(0) = f'(z_0)\,\dot{z}(0)\,\boldsymbol{e}_x + f(z_0)\,\dot{\varphi}(0)\,\boldsymbol{e}_y + \dot{z}(0)\,\boldsymbol{e}_z = v_0\boldsymbol{e}_y\ .$$

Quindi

$$\dot{\varphi}(0) = \frac{v_0}{f(z_0)}. \tag{2}$$

Dalla (1) si ottiene

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{f\,^2(z_0)}{f\,^2(z)}\dot{\varphi}(0) = \frac{f\,(z_0)\,v_0}{f\,^2(z)}. \tag{3}$$

L'energia potenziale efficace è

$$V_{eff}(z) = \frac{1}{2}\frac{f\,^2(z_0)\,v_0^2}{f\,^2(z)} + gz.$$

L'orbita $z = z_0$ potrà esserci soltanto se $V'_{eff}(z_0) = 0$, ovvero

$$\left[-\frac{f\,^2(z_0)\,v_0^2}{f\,^3(z)}f'(z) + g\right]_{z=z_0} = 0, \quad \Longrightarrow \quad gf(z_0) = v_0^2 f'(z_0)\,. \tag{4}$$

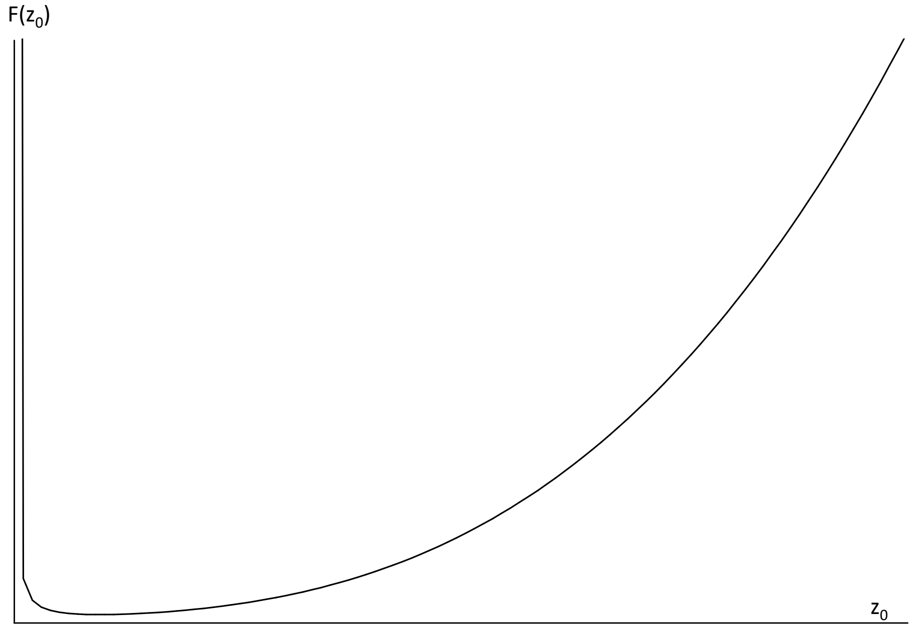
L'uguaglianza è possibile soltanto se $f(z)/f'(z) > 0$.

$(\ b\ )$. Supponendo adesso

$$f(z) = 2 - \frac{1}{1+z^2},$$

risolviamo la (4). Posto $\gamma^2 = v_0^2/g$, si ha

$$2 - \frac{1}{1+z_0^2} = \gamma^2\frac{2z_0}{(1+z_0^2)^2}.$$



Quindi z_0 deve soddisfare la seguente equazione

$$F(z_0) = \gamma^2, \qquad \text{con} \qquad F(z_0) = \frac{\left(1+z_0^2\right)\left(1+2z_0^2\right)}{2z_0}.$$

L'andamento di $F(z_0)$ è rappresentato in figura.

Ricordando la (3), ovvero la (2), la velocità angolare sulle orbite $z(t) = z_0$, è costante ed è pari a

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{v_0}{f\ (z_0)}$$

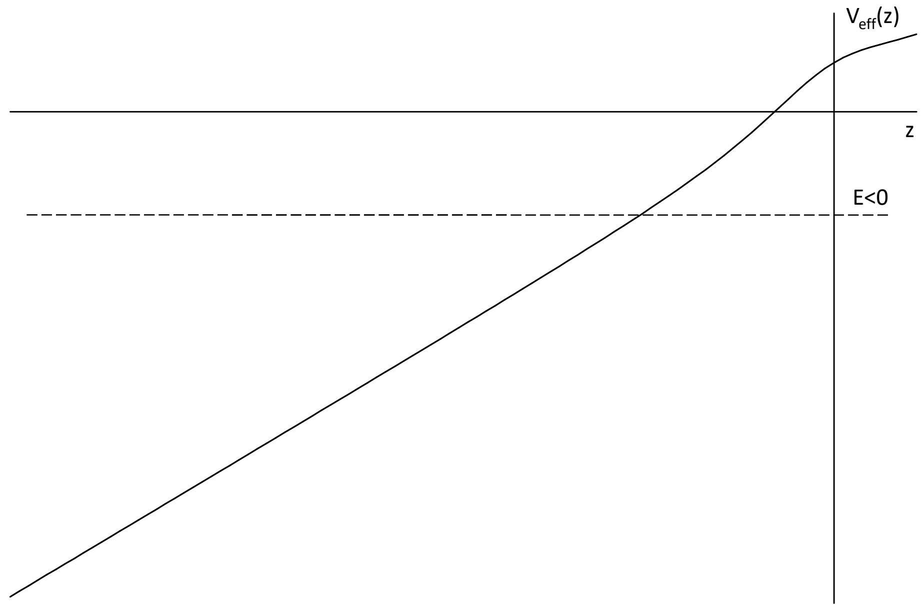
(c). Cominciamo con lo studiare l'andamento di $V_{eff}(z)$ per $z \leq 0$. Si ha $V_{eff}(0) = \frac{1}{2} f^{\ 2}(z_0)\, v_0^2 > 0$,

$$\begin{aligned} V'_{eff}(z) &= g - \frac{f^{\ 2}(z_0)\, v_0^2}{f^{\ 3}(z)} f'(z) \\ &= g - \frac{f^{\ 2}(z_0)\, v_0^2}{\left(2 - \dfrac{1}{1+z^2}\right)^3} \frac{2z}{(1+z^2)}, \end{aligned}$$

per cui $V'_{eff}(z) > 0$ per $z \leq 0$. Inoltre $\lim_{z\to-\infty} V_{eff}(z) = -\infty$. Le orbite $z(t)$ che si originano da $z_0 < 0$, sono tali che

$$V_{eff}(z(t)) \leq E = \frac{1}{2} v_0^2 + g z_0 < 0,$$

come mostrato in figura.



Di conseguenza si ha una solo intersezione semplice fra $V_{eff}(z)$ e la retta orizzontale E. Le orbite $z(t)$ sono negative e sono illimitate inferiormente per $t \to \infty$.

Secondo esercizio

(a) . I vettori posizione dei principali punti sono

$$A - O = L \cos\theta \, \boldsymbol{e}_y,$$

$$B - O = L \sin\theta \, \boldsymbol{e}_x.$$

Se P_1 è il CM dell'asta AB

$$(P_1 - O) = \frac{L}{2} \sin\theta \, \boldsymbol{e}_x + \frac{L}{2} \cos\theta \, \boldsymbol{e}_y,$$

mentre se P_2 è quello dell'asta AC

$$(P_2 - O) = \frac{l}{2} \cos\theta \, \boldsymbol{e}_x + \left(L \cos\theta + \frac{l}{2} \sin\theta \right) \, \boldsymbol{e}_y.$$

L'energia potenziale totale è

$$V(\theta) = Mg\frac{L}{2} \cos\theta + mg \left(L \cos\theta + \frac{l}{2} \sin\theta \right), \tag{5}$$

che riscriveremo come

$$V(\theta) = g \left[L \left(\frac{M}{2} + m \right) \cos\theta + m\frac{l}{2} \sin\theta \right].$$

Calcolando $V'(\theta)$ e $V''(\theta)$ abbiamo

$$V'(\theta) = g\left[-L\left(\frac{M}{2}+m\right)\sin\theta + m\frac{l}{2}\cos\theta\right],$$

$$V''(\theta) = -V(\theta) = -g\left[L\left(\frac{M}{2}+m\right)\cos\theta + m\frac{l}{2}\sin\theta\right].$$

Siccome $\theta = \pm\pi/2$, non è soluzione di $V'(\theta) = 0$, le configurazione di equilibrio si ottengono risolvendo

$$\tan\theta = \frac{ml}{L(M+2m)},$$

che, nell'ipotesi $\frac{M}{m}$ trascurabile e $l/2L = 1$, diventa praticamente

$$\tan\theta = 1, \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, \\[2ex] -\dfrac{3}{4}\pi. \end{cases}$$

Per quel che concerne la stabilità avremo

$$V''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -V\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0, \qquad \theta = \frac{\pi}{4} \text{ instabile},$$

$$V''\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -V\left(-\frac{3\pi}{4}\right) > 0, \qquad \theta = -\frac{3\pi}{4} \text{ stabile}.$$

(b) . Calcoliamo l'energia cinetica dell'asta AB

$$T_{AB} = \frac{M}{2}\dot{(P_1 - O)}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{ML^2}{12}\right)\dot{\theta}^2 = \frac{ML^2}{6}\dot{\theta}^2,$$

mentre quella dell'asta AC è

$$T_{AC} = \frac{m}{2}\dot{(P_2 - O)}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{12}\right)\dot{\theta}^2.$$

Ora

$$\dot{(P_2 - O)} = -\frac{l}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}\boldsymbol{e}_x + \left(-L\sin\theta + \frac{l}{2}\cos\theta\right)\dot{\theta}\boldsymbol{e}_y,$$

per cui

$$T_{AC} = \frac{ml^2}{6}\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\left(L^2\sin^2\theta - lL\sin\theta\cos\theta\right)\dot{\theta}^2.$$

Otteniamo così

$$T = T_{AB} + T_{AC} = \frac{ml^2 + ML^2}{6}\dot{\theta}^2 + \frac{mL^2}{2}\left(\sin^2\theta - \frac{l}{L}\sin\theta\cos\theta\right)\dot{\theta}^2,$$

che scriveremo come

$$T = \frac{1}{2}\underbrace{\left[\frac{ml^2 + ML^2}{3} + mL^2\left(\sin^2\theta - \frac{l}{L}\sin\theta\cos\theta\right)\right]}_{a(\theta)}\dot{\theta}^2.$$

Quindi, per quel che rigurada le piccole oscillazioni scriveremo

$$\omega^2 = \frac{V''(-3\pi/4)}{a(-3\pi/4)}.$$

Tenendo conto del fatto che $l = 2L$ e che $\frac{M}{m}$ è trascurabile,

$$a\left(-3\pi/4\right) = \frac{5}{6} m L^2,$$

$$V''\left(-3\pi/4\right) = mLg\sqrt{2},$$

si ha

$$\omega^2 = \frac{6\sqrt{2}}{5}\frac{g}{L}\ .$$

(c) . Cominciamo con lo scrivere l'equazione simbolica della statica

$$V'\left(\theta\right) + \frac{\partial\left(B - O\right)}{\partial\theta} \cdot \boldsymbol{F} = 0,$$

ovvero

$$g\left[-L\left(\frac{M}{2} + m\right)\sin\theta + m\frac{l}{2}\cos\theta\right] + FL\cos\theta = 0.$$

In $\theta = \pi/2$ si ha

$$-Lg\left(\frac{M}{2} + m\right) = 0,$$

che non può mai essere soddisfatta. Non possiamo quindi avere equilibrio per $\theta = \pi/2$.