Prova Scritta di Sistemi Dinamici
26 - 06 - 2014

Primo esercizio

Un punto materiale P di massa m è vincolato a scorrere senza attrito su una parabola la cui equazione sul piano $\{O, x, y\}$ è $x = \dfrac{y^2}{2p}$. La parabola ruota con velocità uniforme ω attorno all'asse y. La particella è soggetto alla forza di una molla ideale, di costante elastica k, il cui estremo è fissato nell'origine. Si usi come variabile l'ordinata y, $y \in \mathbb{R}$, del punto P. La forza peso non è presente.

(a). Sia $\{O, X, y, Z\}$, un s.d.r. fisso rispetto al quale il piano che contiene la parabola sta ruotando. Si determinino le coordinate del punto P rispetto al s.d.r. $\{O, X, y, Z\}$.

(b). Scrivere l'energia cinetica di P nel s.d.r. $\{O, X, y, Z\}$.

(c). Determinare le posizioni di equilibrio di P rispetto al s.d.r. $\{O, x, y\}$ (s.d.r. ruotante), supponendo che $\beta^2 = \frac{2p^2k}{m\omega^2 - k} > 0$.

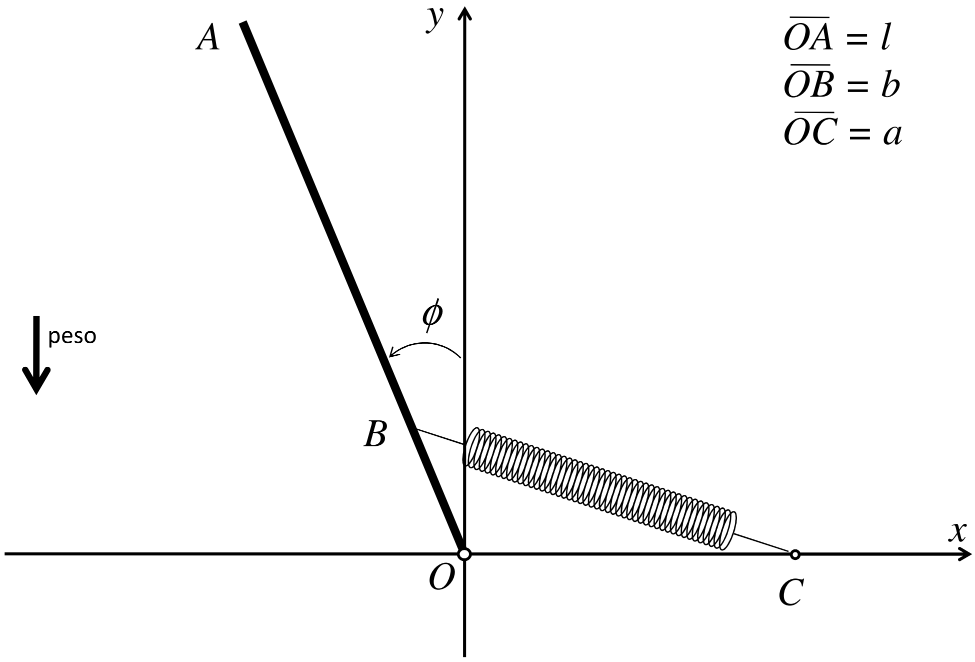
Secondo esercizio

Un'asta omogenea AO di massa m e lunghezza l è posta su un piano verticale. L'asta è vincolata a ruotare senza attrito attorno all'estremo O. Il punto B, distante b da O, è collegato mediante una molla di lunghezza a riposo e massa trascurabili al punto fisso $C \equiv (a, 0)$, come mostrato in figura. La rigidezza della molla è k. Si consiglia di utilizzare come variabile lagrangiana l'angolo ϕ, $\phi \in [0, 2\pi]$, che l'asta forma con l'asse y (v. figura).

(a). Trovare le possibili posizioni di equilibrio dell'asta e analizzare la loro stabilità nell'ipotesi che il parametro adimensionale $\alpha = \dfrac{mgl}{2abk}$ sia uguale ad 1.

(b). Sempre nell'ipostesi $\alpha = 1$, determinare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alle posizioni di equilibrio stabile.

(c). Scrivere l'equazione di moto dell'asta utilizzando le equazioni cardinali, nell'ipotesi che venga rimossa la molla.


$\overline{OA} = l$
$\overline{OB} = b$
$\overline{OC} = a$
A
y
ϕ
peso
B
O
C
x

SVOLGIMENTO

Primo esercizio

(a) . Si deve esprimere la posizione di P rispetto al s.d.r. fisso centrato in O e di versori $\boldsymbol{e}_X$, $\boldsymbol{e}_y$, ed $\boldsymbol{e}_Z$, in termini della variabile y. Si denota con $\phi(t)$, l'angolo di rotazione del piano $\{O, x, y\}$, attorno all'asse y. Ovviamente $\phi(t) = \omega t + \phi_o$. Avremo

$$\begin{aligned} P - O &= (distanza\ dall'asse\ di\ rotazione)\left[\cos\phi(t)\,\boldsymbol{e}_X + \sin\phi(t)\,\boldsymbol{e}_Z\right] + y\boldsymbol{e}_y \\ &= x\left[\cos\phi(t)\,\boldsymbol{e}_X + x\sin\phi(t)\,\boldsymbol{e}_Z\right] + y\boldsymbol{e}_y \\ &= \frac{y^2}{2p}\left[\cos\phi(t)\,\boldsymbol{e}_X + \sin\phi(t)\,\boldsymbol{e}_Z\right] + y\boldsymbol{e}_y \ . \end{aligned}$$

(b) . La velocità di P nel s.d.r. $\{O, X, y, Z\}$ è

$$\dot{(P - O)} = \frac{y\dot{y}}{p}\left[\cos\phi(t)\,\boldsymbol{e}_X + \sin\phi(t)\,\boldsymbol{e}_Z\right] + \frac{y^2}{2p}\left[-\dot{\phi}\sin\phi(t)\,\boldsymbol{e}_X + \dot{\phi}\cos\phi(t)\,\boldsymbol{e}_Z\right] + \dot{y}\boldsymbol{e}_y \ ,$$

dove $\dot{\phi} = \omega$. L'energia cinetica T è data da

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{d(P-O)}{dt}\right)^2 = \frac{m}{2}\left[1 + \frac{y^2}{p^2}\right]\dot{y}^2 + \frac{m\omega^2}{8p^2}y^4$$

(c) . L'energia potenziale elastica è

$$V = \frac{k}{2}|P - O|^2 = \frac{k}{2}\left(\frac{y^4}{4p^2} + y^2\right)$$

mentre la Lagrangiana è data da

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left[1 + \frac{y^2}{p^2}\right]\dot{y}^2 + \frac{m\omega^2}{8p^2}y^4 - \frac{k}{2}\left(\frac{y^4}{4p^2} + y^2\right).$$

Si può quindi identificare un'enrgia potenziale efficace

$$\begin{aligned} V_{eff}(y) &= -\frac{m\omega^2}{8p^2}y^4 + \frac{k}{2}\left(\frac{y^4}{4p^2} + y^2\right) \\ &= \frac{k - m\omega^2}{8p^2}y^4 + \frac{k}{2}y^2. \end{aligned}$$

Le posizioni di equilibrio (rispetto al s.d.r. ruotante) si ottengono risolvendo

$$\frac{dV_{eff}(y)}{dy} = 0, \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{k - m\omega^2}{2p^2}y^2 + k\right)y = 0,$$

cioè

$$\frac{dV_{eff}(y)}{dy} = k\left(-\frac{y^2}{\beta^2} + 1\right)y = 0.$$

Abbiamo quindi le seguenti posizioni di equilibrio

$$y = 0, \qquad \text{e} \qquad y = \pm\beta.$$

Secondo esercizio

(a). Per prima cosa si definiscono i vettori posizione dei principali punti

$$\begin{aligned} P_o - O &= \frac{l}{2}\left(-\sin\phi \boldsymbol{e}_x + \cos\phi \boldsymbol{e}_y\right), \\ B - O &= b\left(-\sin\phi \boldsymbol{e}_x + \cos\phi \boldsymbol{e}_y\right), \\ C - O &= a\boldsymbol{e}_x \ , \\ B - C &= (B-O) - (C-O) = \left(-b\sin\phi - a\right)\boldsymbol{e}_x + b\cos\phi \boldsymbol{e}_y \ . \end{aligned}$$

Passiamo quindi a calcolare le energie potenziali della molla

$$V_{molla} = \frac{k}{2}\left|B-C\right|^2 = \frac{k}{2}\left(a^2 + b^2 + 2ab\sin\phi\right),$$

e del peso

$$V_{peso} = mg\frac{l}{2}\cos\phi.$$

L'energia potenziale totale è dunque

$$V = V_{molla} + V_{peso} = mg\frac{l}{2}\cos\phi + \frac{k}{2}\left(a^2 + b^2 + 2ab\sin\phi\right).$$

Le configurazioni di equilibrio sono gli zeri di V', ovvero

$$\begin{aligned} V' &= -mg\frac{l}{2}\sin\phi + kab\cos\phi \\ &= kab[\cos\phi - \underbrace{\frac{mgl}{2kab}}_{\alpha=1}\sin\phi] = kab[\cos\phi - \sin\phi] = 0. \end{aligned}$$

Le soluzioni sono $\phi = \pi/4$, e $\phi = 5/4\pi$. La stabilità è dettata dal segno di $V'' = kab[-\sin\phi - \cos\phi]$, per cui

$$\begin{aligned} V''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -\sqrt{2}kab = -\sqrt{2}\frac{mgl}{2} < 0, \qquad \text{instabile}, \\ V''\left(\frac{5\pi}{4}\right) &= \sqrt{2}kab = \sqrt{2}\frac{mgl}{2} > 0, \qquad \text{stabile}. \end{aligned}$$

(b). Dobbiamo scrivere la lagrangiana del sistema. L'energia cinetica dell'asta incernierata nel punto O è

$$T = \frac{1}{2}I_O\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{3}\right)\dot{\phi}^2.$$

Abbiamo quindi

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{3}\right)\dot{\phi}^2 - \left[mg\frac{l}{2}\cos\phi + \frac{k}{2}\left(a^2 + b^2 + 2ab\sin\phi\right)\right].$$

Considerando poi la posizione di equilibrio stabile, $\phi = \frac{5\pi}{4}$, la lagrangiana approssimata, a meno di costanti, è data da

$$\mathcal{L}_{app} = \frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{3}\right)\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}V''\left(\frac{5\pi}{4}\right)\left(\phi - \frac{5\pi}{4}\right)^2,$$

per cui la frequenza delle piccole oscillazioni è

$$\omega^2 = \frac{V''\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{\frac{ml^2}{3}} = 3\sqrt{2}\left(\frac{ab}{l^2}\right)\frac{k}{m} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\frac{g}{l}.$$

(c) . Consideriamo il punto O come centro di riduzione. Avremo

$$I_O\ddot{\phi}\ \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{\tau}_O^{ext} = (P_o - O) \wedge (-mg\boldsymbol{e}_y) = mg\frac{l}{2}\sin\phi\ \boldsymbol{e}_z,$$

per cui

$$\ddot{\phi} = \frac{3}{2}\frac{g}{l}\sin\phi.$$