**Secondo Compitino Sistemi Dinamici**
**22 maggio 2015**

*Primo esercizio*

E' dato un sistema materiale costituito da due aste $AB$ e $AC$, aventi ugual lunghezza $l$ ed ugual massa $m$, saldate nell'estremo $A$ in modo da formare un angolo retto.

( *i* ). Considerando un SdR cartesiano ortogonale $\{A, x, y, z\}$, con gli assi $x$ e $y$ come nella figura 1.A, e l'asse $z$ ortogonale al piano si determini la matrice d'inerzia $\mathbb{I}(A)$.

( *ii* ). Sia $P_o \equiv \left(\frac{l}{4}, \frac{l}{4}, 0\right)$ il centro di massa dell'intero sistema. Si consideri un SdR cartesiano ortogonale $\{P_o, X, Y, Z\}$ centrato in $P_o$, con gli assi paralleli ai precedenti, come in figura 1.B. Determinare la matrice d'inerzia $\mathbb{I}(P_o)$.

*Secondo esercizio*

Una sbarretta omogenea $AB$ di massa $m$ e lunghezza $l$, ha gli estremi vincolati a scorrere senza attrito sugli assi orizzontale e verticale come mostrato in figura 2. L'estremo $B$ è collegato al punto $C \equiv (a, b)$ da una molla di constante elastica $k$, avente lunghezza a riposo e massa trascurabili. La forza peso è diretta come in figura. Sia $\theta$ l'angolo che l'asta forma con l'asse verticale (positivo per rotazioni antiorarie).

( *i* ). Nell'ipotesi in cui l'estremo $A$ dell'asta non può portarsi a sinistra di $O$, cioè $0 < \theta < \pi$, si scriva la funzione di Lagrange utilizzando come variabile lagrangiana l'ordinata $y$ del punto $B$.

( *ii* ). Supponendo adesso che l'estremo $A$ dell'asta possa portarsi anche a sinistra di $O$, cioè $-\pi \leq \theta < \pi$, si determinino le posizioni di equilibrio e la loro stabilità al variare dei parametri.

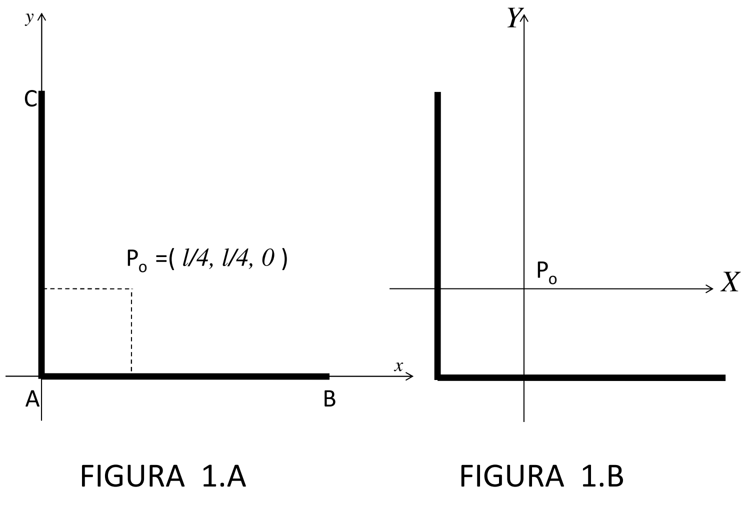


Figure 1:

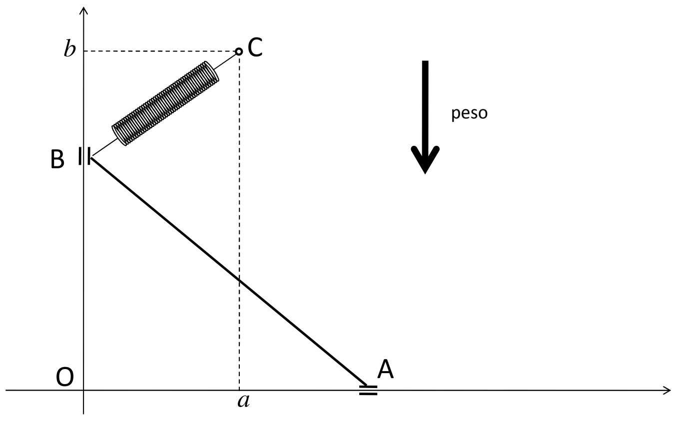


Figure 2:

**SVOLGIMENTO**

*Primo esercizio*

( $i$ ) . Siccome il sistema è piano la matrice d'inerzia è di questo tipo

$$\mathbb{I}(A)=\begin{pmatrix} I_{xx}(A) & I_{xy}(A) & 0 \\ I_{xy}(A) & I_{yy}(A) & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz}(A) \end{pmatrix}.$$

Per ovvi motivi di simmetria $I_{xx}(A)=I_{yy}(A)$. Inoltre poiché, $I_{zz}(A)=I_{xx}(A)+I_{yy}(A)$, risulta $I_{zz}(A)=2I_{xx}(A)$. Si ha quindi

$$\mathbb{I}(A)=\begin{pmatrix} I_{xx}(A) & I_{xy}(A) & 0 \\ I_{xy}(A) & I_{xx}(A) & 0 \\ 0 & 0 & 2I_{xx}(A) \end{pmatrix}.$$

Mostriamo adesso che $I_{xy}(A)=0$. Infatti, supponendo si suddividere ciscuna sbarretta in tanti punti materiali, scriveremo, con ovvio significato dei simboli,

$$I_{xy}(A)=-\left(\sum_{i\in AB} m_i x_i y_i+\sum_{i\in AC} m_i x_i y_i\right) ,$$

dove $m_i$ è la massa dell'$i$-esimo punto materiale. Ora se $i\in AB$, $\Rightarrow y_i=0$, mentre se $i\in AC$, $\Rightarrow x_i=0$. Di conseguenza $I_{xy}(A)=0$.

Calcoliamo adesso $I_{xx}(A)$. Avremo

$$I_{xx}(A)=I_{xx}^{asta\ AB}(A)+I_{xx}^{asta\ AC}(A).$$

Evidentemente $I_{xx}^{asta\ AB}(A)=0$, mentre $I_{xx}^{asta\ AC}(A)$ può essere calcolato sfruttando il teorema di Huygens

$$I_{xx}^{asta\ AC}(A)=\frac{1}{12}ml^2+m\left(\frac{l}{2}\right)^2=\frac{ml^2}{3}.$$

Abbiamo quindi

$$\mathbb{I}(A) = \frac{ml^2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

( *ii* ) . Facendo riferimento alla figura 1.B, le coordinate del punto $A$ rispetto al SdR $\{P_o, X, Y, Z\}$, sono

$$A \equiv (X_A, Y_A, 0) = \left(-\frac{l}{4}, -\frac{l}{4}, 0\right).$$

Siccome $P_o$ è il centro di massa del sistema delle due aste (la cui massa totale è $2m$), possiamo applicare il teorema di Huygens

$$\mathbb{I}(A) = \mathbb{I}(P_o) + \begin{pmatrix} 2mY_A^2 & -2mX_AY_A & 0 \\ -2mX_AY_A & 2mX_A^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2m\left(X_A^2 + Y_A^2\right) \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \mathbb{I}(P_o) &= \mathbb{I}(A) - \begin{pmatrix} 2mY_A^2 & -2mX_AY_A & 0 \\ -2mX_AY_A & 2mX_A^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2m\left(X_A^2 + Y_A^2\right) \end{pmatrix} \\ &= \frac{ml^2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - m\begin{pmatrix} \frac{l^2}{8} & -\frac{l^2}{8} & 0 \\ -\frac{l^2}{8} & \frac{l^2}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l^2}{4} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

da cui

$$\mathbb{I}(P_o) = \frac{ml^2}{8}\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{pmatrix}.$$

*Secondo esercizio*

( *i* ) . Se $y$ è l'ordinata del punto $B$, abbiamo (v. figura 2)

$$y = y(\theta), \quad \text{con} \quad y(\theta) = l\cos\theta, \tag{1}$$

che è una corrispondenza 1 ad 1 fra $\theta \in [0, \pi]$, e $y \in [-l, l]$. La funzione di Lagrange è

$$\mathcal{L} = T - (V_{peso} + V_{elastica}),$$

e deve essere espressa in termini della variabile lagrangiana $y$. Per quanto riguarda $V_{peso}$, abbiamo

$$V_{peso} = mg \cdot (\text{y del C.M.}),$$

per cui

$$V_{peso} = mg\frac{y}{2}, \tag{2}$$

mentre l'energia potenziale elastica, riferendoci alla figura 2, è data da

$$V_{elastica} = \frac{k}{2}\overline{BC}^{\,2} = \frac{k}{2}\left(a^2 + (b-y)^2\right). \tag{3}$$

Dobbiamo adesso esprimere l'enrgia cinetica della sbarretta

$$T = \frac{m}{2}(P_o \dot{-} O)^2 + \frac{1}{2} I(P_o) \dot{\theta}^2,$$

in funzione di $y$. Ora $(P_o - O) = \frac{l}{2}(\sin\theta\, \boldsymbol{e}_x + \cos\theta\, \boldsymbol{e}_y)$, $\Rightarrow$ $(P_o \dot{-} O)^2 = \frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2$, per cui, ricordando che $I(P_o) = \frac{1}{12} m l^2$,

$$T = \frac{m l^2}{6} \dot{\theta}^2.$$

Dalla (1) ricaviamo la relazione fra $\dot{\theta}$ e $\dot{y}$,

$$\dot{y} = -l \sin\theta\, \dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{y}^2 = l^2(1 - \underbrace{\cos^2\theta}_{\frac{y^2}{l^2}})\dot{\theta}^2,$$

da cui

$$\dot{\theta}^2 = \frac{\dot{y}^2}{l^2 - y^2}.$$

Abbiamo quindi

$$\mathcal{L}\left(y, \dot{y}\right) = \frac{m l^2}{6} \frac{\dot{y}^2}{l^2 - y^2} - \left[mg\frac{y}{2} + \frac{k}{2}\left(a^2 + (b - y)^2\right)\right].$$

( *ii* ). Adesso l'ordinata $y$ del punto $B$, non può essere considerata come variabile lagrangiana in quanto la (1), quando $\theta \in (-\pi, \pi)$, non è una corrispondenza biunivoca fra $\theta$ e $y$. La variabile lagrangiana da utilizzare è dunque l'angolo $\theta$. Le (2) e (3) vanno quindi intese come

$$V_{peso}(\theta) = mg\frac{y(\theta)}{2}.$$

e

$$V_{elastica}(\theta) = \frac{k}{2}\overline{BC}^2 = \frac{k}{2}\left(a^2 + (b - y(\theta))^2\right),$$

con $y(\theta)$ data dalla (1). Si ottiene dunque

$$V(\theta) = mg\frac{y(\theta)}{2} + \frac{k}{2}\left(a^2 + (b - y(\theta))^2\right),$$

$$\begin{aligned} V'(\theta) &= \left[\frac{mg}{2} - k(b - y(\theta))\right] y'(\theta) \\ &= k\left[y(\theta) - \left(b - \frac{mg}{2k}\right)\right] y'(\theta), \end{aligned}$$

$$V''(\theta) = k\left[y(\theta) - \left(b - \frac{mg}{2k}\right)\right] y''(\theta) + k\left(y'(\theta)\right)^2$$

Abbiamo i seguenti casi:
Primo caso: $\left(b - \frac{mg}{2k}\right) > l$, $\Rightarrow$ $\left[y(\theta) - \left(b - \frac{mg}{2k}\right)\right] < 0$. Le posizioni di equilibrio sono $\theta = 0,\ \pi$ . Per quanto riguarda la stabilità si ha

$$V''(0) = k\underbrace{\left[y(0) - \left(b - \frac{mg}{2k}\right)\right]}_{<0} \underbrace{y''(0)}_{-l\cos 0} > 0, \quad \Rightarrow \quad \theta = 0 \text{ stabile},$$

$$V''(\pi) = k\underbrace{\left[y(\pi) - \left(b - \frac{mg}{2k}\right)\right]}_{<0} \underbrace{y''(\pi)}_{-l\cos\pi} = lk < 0, \quad \Rightarrow \quad \theta = 0 \text{ instabile}.$$

Secondo caso: $\left(b-\dfrac{mg}{2k}\right)<-l,\ \Rightarrow\ \left[y\left(\theta\right)-\left(b-\dfrac{mg}{2k}\right)\right]>0$. Le posizioni di equilibrio sono ancora $\theta=0,\ \pi$, la stabilità però è invertita

$$V^{''}\left(0\right)=k\underbrace{\left[y\left(0\right)-\left(b-\frac{mg}{2k}\right)\right]}_{>0}\underbrace{y^{''}\left(0\right)}_{-l\cos 0}<0,\quad\Rightarrow\quad\theta=0\ \text{ instabile,}$$

$$V^{''}\left(\pi\right)=k\underbrace{\left[y\left(\pi\right)-\left(b-\frac{mg}{2k}\right)\right]}_{>0}\underbrace{y^{''}\left(\pi\right)}_{-l\cos\pi}>0,\quad\Rightarrow\quad\theta=0\ \text{ stabile.}$$

Terzo caso: $\left(b-\dfrac{mg}{2k}\right)=\pm l$. I risultati sono gli stessi del cao 1 e 2, a seconda che $\left(b-\dfrac{mg}{2k}\right)=l$, oppure $\left(b-\dfrac{mg}{2k}\right)=-l$. Infatti analizzando il segno di $V'\left(\theta\right)$, si deduce la stabilità di $\theta=0$, e $\theta=\pi$.

Quarto caso: $\left|b-\dfrac{mg}{2k}\right|<l$. Le posizioni di equilibrio sono

$$y\left(\theta\right)=\left(b-\frac{mg}{2k}\right)<l,\quad\Rightarrow\quad\theta=\pm\theta_o,\quad\text{con}\quad\theta_o=\arccos\left(\frac{b}{l}-\frac{mg}{2lk}\right),$$

oltre alle solite $\theta=0,\ \pi$. Per quanto attiene la stabilità si ha

$$V^{''}\left(0\right)=k\underbrace{\left[y\left(0\right)-\left(b-\frac{mg}{2k}\right)\right]}_{>0}\underbrace{y^{''}\left(0\right)}_{-l\cos 0}<0,\quad\Rightarrow\quad\theta=0\ \text{ instabile,}$$

$$V^{''}\left(\pi\right)=k\underbrace{\left[y\left(\pi\right)-\left(b-\frac{mg}{2k}\right)\right]}_{<0}\underbrace{y^{''}\left(\pi\right)}_{-l\cos\pi}<0,\quad\Rightarrow\quad\theta=0\ \text{ instabile,}$$

$$V^{''}\left(\pm\theta_o\right)=k\underbrace{\left[y\left(\pm\theta_o\right)-\left(b-\frac{mg}{2k}\right)\right]}_{=0}y^{''}\left(\pm\theta_o\right)+k\left(y'\left(\pm\theta_o\right)\right)^2>0,\quad\Rightarrow\quad\theta=\pm\theta_o\ \text{ stabile.}$$