Secondo Compitino Sistemi Dinamici
08 - 05 - 2017

Primo esercizio

E' data una lamina quadrata di massa m e lato a. Sulla lamina è praticato un foro circolare di raggio $r < a/2$, il cui centro A è posto a distanza d dal centro O della lamina (v. figura 1 (A)).

(*a*). Determinare il momento d'inezia rispetto all'asse z passante per O, ovvero l'asse ortogonale alla lamina passante per O.

(*b*). Dimostrare che il SdR ortogonale centrato in O il cui asse x è allinneato lungo la retta OA, l'asse y giace sul piano della lamina e l'asse z è ortogonale al piano della lamina è terna principale d'inerzia. Calcolare poi $I_{xx}(O)$ e $I_{yy}(O)$.

(*c*). Si supponga adesso di praticare altri 3 identici fori circolari di raggio r sulla lamina in modo che i centri A, B, C e D dei si trovino sui vertici di un quadrato il cui centro coincide con O (si veda la figura 1 (B)). Dire, motivando la risposta, se il SdR $\{O, X, Y, Z\}$, i cui assi X e Y sono rappresentati in figura 1 (B) e l'asse Z è ortogonale alla lamina, è principale d'inerzia.

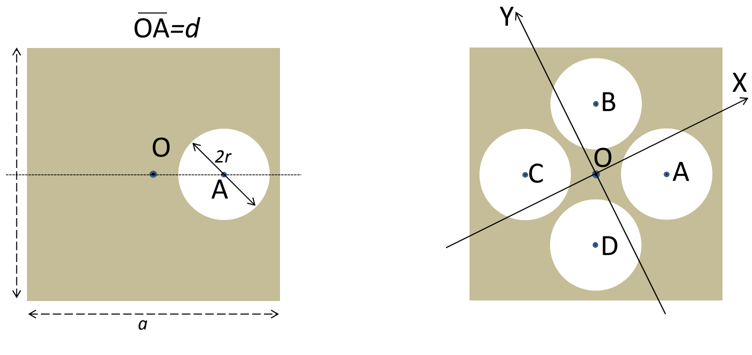
Secondo esercizio

Una sbarretta di massa m e lunghezza l ha gli estremi A e B vincolati a scorrere sugli assi y ed x, come mostrato in figura 2. L'estremo B è poi collegato tramite un file inestensibile e di massa trascurabile ad un punto materiale P (v. figura 2). La massa di P è ancora m. L'ordinata di P quando l'asta è verticale (ovvero quando si trova nella configurazione di riferimento come esplicitato in figura 2) è $-d$, con $d > 0$. Si assume inoltre che $d > l$. Si utilizzi come parametro lagrangiano l'angolo θ, $\theta \in [-\pi, \pi]$, che l'asta forma con la verticale, con la convenzione $\theta > 0$ per rotazione antiorarie. La forza peso è come in figura e tutti i vincoli sono lisci.

(*a*). Determinare le configurazioni di equilibrio e discuterne la stabilità.

(*b*). Determinare la frequanza delle piccole oscillazioni in corrispondenza della configurazione di equilibrio stabile.

(*c*). Calcolare la reazione vincolare nel punto A quando la sbarretta si trova nella configurazione di equilibrio stabile.



(A) (B)

FIGURA 1

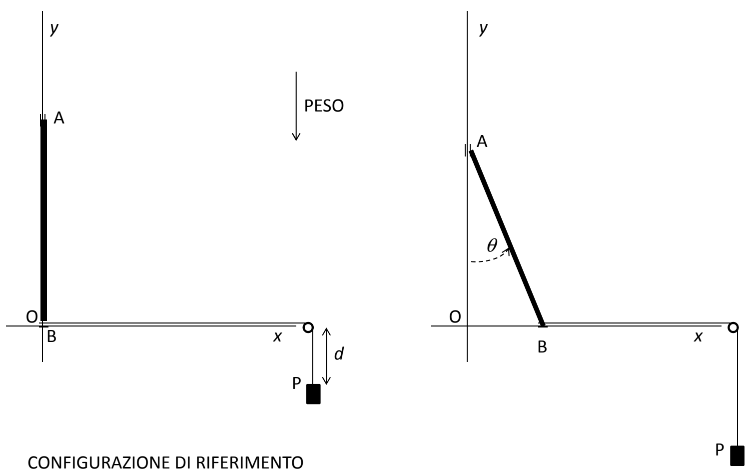


FIGURA 2

SVOLGIMENTO

Primo esercizio

(a) . Cominciamo col determinare la densità superficiale di massa della lamina forata

$$\sigma = \frac{m}{a^2 - \pi r^2}.$$

Se consideriamo adesso una lamina virtuale piena (cioè in cui il foro è stata rimosso) la sua massa virtuale sarà

$$m_{virt} = \sigma a^2 = m\left(\frac{a^2}{a^2 - \pi r^2}\right).$$

Il momento d'inerzia di tale lamina virtuale rispetto all'asse z ortogonale al piano della lamina e passante per O è

$$I_{zz}^{virt}(O) = \frac{m_{virt}}{12}2a^2 = \frac{m_{virt}}{6}a^2 = \frac{ma^2}{6}\left(\frac{a^2}{a^2 - \pi r^2}\right).$$

Osserviamo ora che $I_{zz}^{virt}(O)$ può esser letto come la somma del momento d'inerza della lamina forata, $I_{zz}(O)$ (che è la nostra incognita) con il momento d'inerzia del disco circolare (virtuale) che corrisponde al foro e che denotiamo con $I_{zz}^{foro}(O)$. Abbiamo dunque

$$I_{zz}^{virt}(O) = I_{zz}(O) + I_{zz}^{foro}(O),$$

da cui

$$I_{zz}(O) = I_{zz}^{virt}(O) - I_{zz}^{foro}(O) = \frac{ma^2}{6}\left(\frac{a^2}{a^2 - \pi r^2}\right) - I_{zz}^{foro}(O).$$

Dobbiamo quindi calcolare $I_{zz}^{foro}(O)$, ovvero il momento d'inerzia del disco corrispondente al foro rispetto all'asse z passante per O. La massa (virtuale) del disco corrispondente al foro è

$$m_{virt}^{foro} = \sigma\pi r^2 = m\left(\frac{\pi r^2}{a^2 - \pi r^2}\right),$$

e quindi, applicando il teorema di Huygens

$$\begin{aligned} I_{zz}^{foro}(O) &= I_{zz}^{foro}(A) + m_{virt}^{foro}d^2 = m_{virt}^{foro}\left(\frac{r^2}{2} + d^2\right) \\ &= m\left(\frac{\pi r^2}{a^2 - \pi r^2}\right)\left(\frac{r^2}{2} + d^2\right). \end{aligned}$$

Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} I_{zz}(O) &= \frac{ma^2}{6}\left(\frac{a^2}{a^2 - \pi r^2}\right) - I_{zz}^{foro}(O) \\ &= \frac{ma^2}{6}\left(\frac{a^2}{a^2 - \pi r^2}\right) - m\left(\frac{\pi r^2}{a^2 - \pi r^2}\right)\left(\frac{r^2}{2} + d^2\right) \\ &= \frac{m}{a^2 - \pi r^2}\left[\frac{a^4}{6} - \pi r^2\left(\frac{r^2}{2} + d^2\right)\right]. \end{aligned}$$

(b) . Si osserva che l'asse y è ortogonale al piano di simmetria materiale della lamina e di conseguenza è principale d'inerzia. L'asse z è principale d'inerzia perchè il sistema è piano e di conseguenza anche l'asse x, che è allineato lungo la retta OA, è principale d'inerzia. Il SdR $\{O, x, y, z\}$ è dunque una terna principale d'inerzia.

Calcoliamo adesso $I_{xx}(O)$. Per quel che riguarda $I_{yy}(O)$ sfrutteremo la relazione (che vale per sistemi piani)

$$I_{zz}(O) = I_{xx}(O) + I_{yy}(O)\,, \qquad \Longrightarrow \qquad I_{yy}(O) = I_{zz}(O) - I_{xx}(O)\,, \tag{1}$$

dove $I_{zz}(O)$ è stato calcolato al precedente punto (a). Per il calcolo di $I_{xx}(O)$ si procede come nel punto (a). Indichiamo con $I_{xx}^{virt}(O)$ il momento d'inerzia della lamina (virtuale) quadrata piena, cioè

$$I_{xx}^{virt}(O) = \frac{m_{virt}}{12}a^2 = \frac{ma^2}{12}\left(\frac{a^2}{a^2-\pi r^2}\right).$$

Indichiamo poi con $I_{xx}^{foro}(O)$ il momento d'inerzia del disco (virtuale) corrispondente al foro

$$I_{xx}^{foro}(O) = \frac{m_{virt}^{foro}}{4}r^2 = \frac{mr^2}{4}\left(\frac{\pi r^2}{a^2-\pi r^2}\right).$$

Infine, siccome

$$I_{xx}^{virt}(O) = I_{xx}(O) + I_{xx}^{foro}(O)\,,$$

si ha

$$\begin{aligned} I_{xx}(O) &= I_{xx}^{virt}(O) - I_{xx}^{foro}(O) \\ &= \frac{ma^2}{12}\left(\frac{a^2}{a^2-\pi r^2}\right) - \frac{mr^2}{4}\left(\frac{\pi r^2}{a^2-\pi r^2}\right) \\ &= \frac{m}{a^2-\pi r^2}\left(\frac{a^4}{12} - \frac{\pi r^4}{4}\right). \end{aligned}$$

In ultimo, riprendendo la (1) e la formula per $I_{zz}(O)$ abbiamo

$$\begin{aligned} I_{yy}(O) &= I_{zz}(O) - I_{xx}(O) \\ &= \frac{m}{a^2-\pi r^2}\left[\frac{a^4}{6} - \pi r^2\left(\frac{r^2}{2}+d^2\right) - \frac{a^4}{12} + \frac{\pi r^4}{4}\right] \\ &= \frac{m}{a^2-\pi r^2}\left[\frac{a^4}{12} - \pi\frac{r^4}{4} - \pi r^2 d^2\right]. \end{aligned}$$

(c). Consideriamo il SdR ortogonale $\{O,\xi,\eta,Z\}$ centrato in O in cui l'asse ξ è allineato lungo la retta COA, e l'asse η lungo la retta DOB, e l'asse Z è ortogonale al piano della lamina. E' banale osservare che tale SdR è principale d'inerzia e che, per ovvi motivi di simmetria,

$$I_{\xi\xi}(O) = I_{\eta\eta}(O)\,.$$

Quindi, limitandoci soltanto alle prime due righe e due colonne della matrice d'inerzia, abbiamo

$$\mathbb{I}(O) = I\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dove $I = I_{\xi\xi}(O) = I_{\eta\eta}(O)$. Se dunque denotiamo con $\mathbb{Q}$ la matrice ortogonale che fa passare dal SdR $\{O,\xi,\eta\}$ al SdR $\{O,X,Y\}$, e con $\mathbb{J}$ la matrice d'inerzia nel SdR $\{O,X,Y\}$, abbiamo

$$\mathbb{J} = \mathbb{Q}I\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbb{Q}^{\mathrm{T}} = I\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbb{Q}\mathbb{Q}^{\mathrm{T}} = I\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi $\mathbb{J}$ è diagonale e dunque il SdR $\{O,X,Y,Z\}$ è terna principale d'inerzia.

Secondo esercizio

(a). Denotiamo con P_o il centro di massa della sbarretta AB. Abbiamo

$$P_o - O = \frac{l}{2} \left(\sin\theta \boldsymbol{e}_x + \cos\theta \boldsymbol{e}_y \right),$$

$$\overset{\bullet}{(P_o - O)} = \frac{l}{2} \dot{\theta} \left(\cos\theta \boldsymbol{e}_x - \sin\theta \boldsymbol{e}_y \right). \tag{2}$$

Inoltre, se donotiamo con y_P l'ordinata del punto P si ha

$$y_P = -d - l \sin\theta \ ,$$

$$\dot{y}_P = -l \dot{\theta} \cos\theta. \tag{3}$$

L'energia potenziale è soltanto quella dovuta alla forza peso, per cui

$$V = V_{sbarretta} + V_P = mg \frac{l}{2} \cos\theta - mg \left(d + l \sin\theta \right).$$

Le posizioni di equilibrio si determinano imponendo $V'(\theta) = 0$, cioè

$$V'(\theta) = -mg \frac{l}{2} \sin\theta - mgl \cos\theta = -mgl \left(\frac{\sin\theta}{2} + \cos\theta \right).$$

Siccome $\cos\theta = 0$, ovvero $\theta = \pm\pi/2$, non è soluzione di $V'(\theta) = 0$, possiamo dividere per $\cos\theta$, e così ottenere

$$V'(\theta) = -mgl \cos\theta \left(1 + \frac{1}{2} \tan\theta \right) = 0.$$

Le soluzioni di equilibrio sono dunque

$$\tan\theta = -2, \qquad \Longrightarrow \qquad \theta = \begin{cases} \theta_o = \arctan(-2) < 0, \\ \\ \theta_1 = \theta_o + \pi, \end{cases}$$

dove $\theta_o \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0 \right)$ e $\theta_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right)$.

Per quel che riguarda la stabilità dobbiamo calcolare $V''(\theta)$ e valutarla in corrispondenza di θ_o e θ_1. Abbiamo dunque

$$V''(\theta) = -mgl \left(\frac{\cos\theta}{2} - \sin\theta \right) = mgl \left(\sin\theta - \frac{\cos\theta}{2} \right),$$

per cui:

$\theta = \theta_o$

$$V''(\theta_o) = mgl \left(\sin\theta_o - \frac{\cos\theta_o}{2} \right) < 0,$$

siccome $\sin\theta_o < 0$ e $\cos\theta_o > 0$. Si deduce che θ_o è configurazione di equilibrio instabile.

$\theta = \theta_1$

$$V''(\theta_1) = mgl \left(\sin\theta_1 - \frac{\cos\theta_1}{2} \right) > 0,$$

dal momento che $\sin\theta_1 > 0$ e $\cos\theta_1 < 0$. Dunque θ_1 è configurazione di equilibrio stabile.

(b). La configurazione di equilibrio stabile è θ_1. Dobbiamo scrivere l'energia cinetica totale T ed approssimarla in corrispondenza di $\theta = \theta_1$. Si comincia dall'energia cinetica della sbarretta. Ricordando la (2) otteniamo

$$T_{sbarretta} = \frac{m}{2}\overset{\bullet}{(P_o - O)}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{12}\right)\overset{\bullet}{\theta}^2 = \frac{ml^2}{6}\overset{\bullet}{\theta}^2.$$

L'energia cinetica del punto materiale P è (si ricordi la (3))

$$T_P = \frac{m}{2}\overset{\bullet}{y}_P^2 = \frac{ml^2}{2}\overset{\bullet}{\theta}^2\cos^2\theta.$$

Abbiamo dunque

$$T = T_{sbarretta} + T_P = \frac{1}{2}\underbrace{\left[ml^2\left(\frac{1}{3} + \cos^2\theta\right)\right]}_{a(\theta)}\overset{\bullet}{\theta}^2,$$

e dunque la frequenza (o meglio la pulsazione) delle piccole oscillazione è data da

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(\theta_1)}{a(\theta_1)}} = \sqrt{\frac{g}{l}\left[\frac{\sin\theta_1 - \dfrac{\cos\theta_1}{2}}{\dfrac{1}{3} + \cos^2\theta_1}\right]}.$$

(c). Il vincolo è liscio e dunque la reazione vincolare in A è $\boldsymbol{R}_A = R\boldsymbol{e}_x$, con R incognito. Si scrive la seconda cardinale con centro di riduzione in B,

$$(A - B) \wedge R\boldsymbol{e}_x + (P_o - O) \wedge (-mg)\,\boldsymbol{e}_y = 0, \tag{4}$$

dove $(A - B) = l\,(-\sin\theta\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\boldsymbol{e}_y)$ e $(P_o - B) = \dfrac{l}{2}(-\sin\theta\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\boldsymbol{e}_y)$. Ovviamente $\theta = \theta_1$, siccome siamo nella configurazione di equilibrio stabile. La (4) diventa

$$l\,(-\sin\theta_1\boldsymbol{e}_x + \cos\theta_1\boldsymbol{e}_y) \wedge \left(R\boldsymbol{e}_x - \frac{mg}{2}\boldsymbol{e}_y\right) = 0,$$

da cui si ricava

$$R = \frac{mg}{2}\underbrace{\tan\theta_1}_{-2} = -mg,$$

e quindi $\boldsymbol{R}_A = -mg\boldsymbol{e}_x$.