Prova Scritta di Sistemi Dinamici
03 - 07 - 2018

Primo esercizio

Si consideri una particella P di massa $m = 1$, vincolata sul piano e alla sola forza di tipo centrale

$$\boldsymbol{F}(r,t) = -g(t)\ln r\ \boldsymbol{e}_r\ ,$$

dove le funzioni g e f sono regolari, $\boldsymbol{e}_r$ è il versore radiale e dove $r = |P - O|$, con O centro della forza.

(a). Utilizzando come coordinate lagrangiane le coordinare polari r e θ centrate in O, scrivere l'energia potenziale e la Lagrangiana della particella.

(b). Mostrare che la variabile θ è ciclica, determinare l'energia potenziale efficace V_{eff} e scrivere l'equazione di moto per la variabile r.

(c). Provare che vale un bilancio energetico del tipo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{r}^{2} + V_{eff}\right) = S(r,t)\,,$$

e determinare la funzione $S(r,t)$.

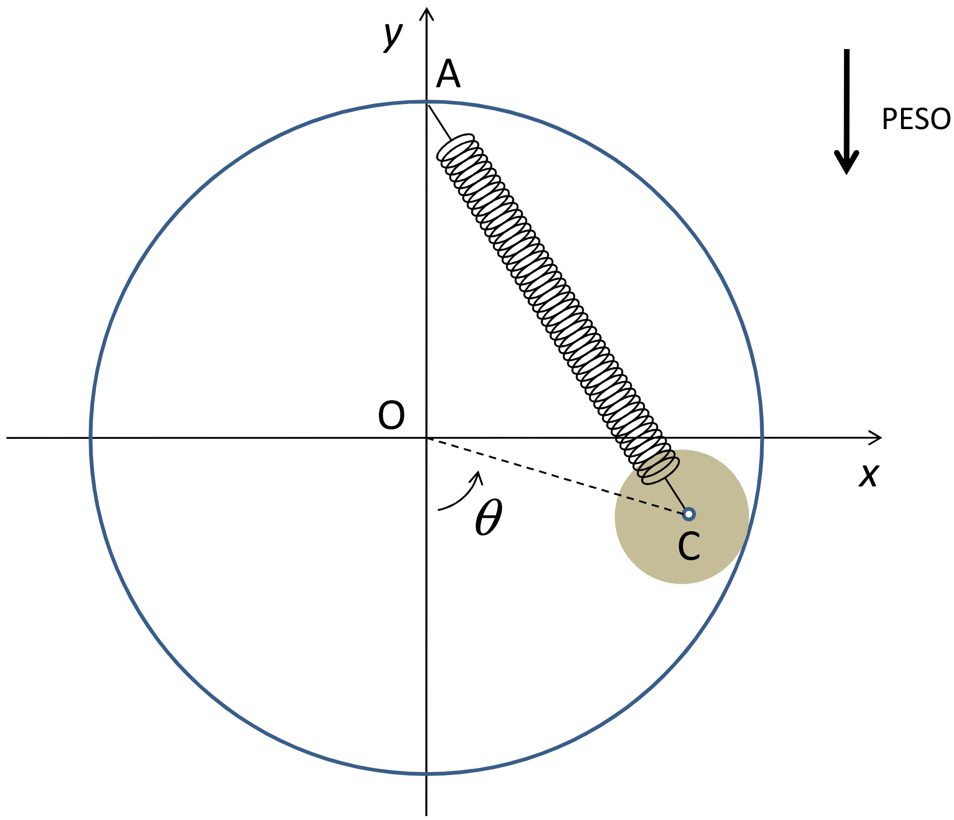
Secondo esercizio

Nel piano verticale sono dati una guida circolare fissa, di centro O e raggio R, e un disco circolare omogeneo di raggio $r < R$ e massa m, quest'ultimo vincolato a rotolare senza strisciare lungo il bordo interno della guida (v. figura). Una molla di massa e lunghezza a riposo trascurabile, di costante elastica k, congiunge il centro C del disco con il punto $A \equiv (0, R)$. Si utilizzi come coordinata lagrangiana l'angolo $\theta \in (-\pi, \pi]$, indicato in figura, positivo per rotazioni antiorarie. Il peso è come in figura.

(a). Determinare le configurazioni di equilibrio, analizzandone la stabilità in funzione del parametro $\alpha = \dfrac{kR}{mg}$.

(b). Detto φ l'angolo di rotolamento del disco, determinare la relazione che lega φ e θ e poi scrivere l'espressione dell'energia cinetica del disco.

(c). Supponendo $\alpha = 1/2$, calcolare la frequenza delle delle piccole oscillazioni nell'intorno della configurazione di equilibrio stabile.


y
A
PESO
O
x
θ
C

SVOLGIMENTO

Primo esercizio

(a). L'energia potenziale V è tale che $\dfrac{\partial V}{\partial r} = -\left(-g\left(t\right)\ln r\right)$, per cui

$$V = g\left(t\right)\int \ln r\ dr = g\left(t\right) r\left(\ln r - 1\right),$$

e quindi $V = V\left(r,t\right)$. Utilizzando le coordinate polari abbiamo

$$\dot{\boldsymbol{x}} \ = \ \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta,$$

per cui

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - g\left(t\right) r\left(\ln r - 1\right).$$

$(\ b\ )$. Siccome $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0, \Longrightarrow \theta$ è ciclica e dunque

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = A_o\ , \quad \Rightarrow \quad r^2\dot{\theta} \ = \ A_o, \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} \ = \ \frac{A_o}{r^2}.$$

Scrivendo l'Hamiltoniana abbiamo

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + g\left(t\right) r\left(\ln r - 1\right)\ ,$$

da cui

$$V_{eff}\left(r,t\right) = \frac{A_o^2}{2r^2} + g\left(t\right) r\left(\ln r - 1\right)\ . \tag{1}$$

L'equazione di moto per la variabile r è

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0,$$

cioè

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{\partial}{\partial r}\left[g\left(t\right) r\left(\ln r - 1\right)\right] = 0, \ \Rightarrow \ \ddot{r} \quad \underbrace{-\frac{A_o^2}{r^3}}_{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{A_o^2}{2r^2}\right)} + \frac{\partial}{\partial r}\left[g\left(t\right) r\left(\ln r - 1\right)\right] = 0,$$

ovvero

$$\ddot{r} + \frac{\partial}{\partial r}\underbrace{\left(\frac{A_o^2}{2r^2} + g\left(t\right) r\left(\ln r - 1\right)\right)}_{V_{eff}(r,t)} = 0, \ \Rightarrow \ \ddot{r} = -\frac{\partial V_{eff}\left(r,t\right)}{\partial r}. \tag{2}$$

$(\ c\ )$. Moltiplicando la (2) per $\dot{r}$ abbiamo

$$\ddot{r}\dot{r} + \frac{\partial V_{eff}\left(r,t\right)}{\partial r}\dot{r}\ = 0 \ \Rightarrow \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{r}^2}{2}\right) + \frac{\partial V_{eff}\left(r,t\right)}{\partial r}\dot{r}\ = 0, \tag{3}$$

con V_{eff} data dalla (1). Ora

$$\begin{aligned} \frac{dV_{eff}\left(r\left(t\right),t\right)}{dt} &= \frac{\partial V_{eff}\left(r,t\right)}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial V_{eff}\left(r,t\right)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial V_{eff}\left(r,t\right)}{\partial r}\dot{r} + \dot{g}\left(t\right)r\left(\ln r - 1\right). \end{aligned}$$

Si ha dunque

$$\frac{\partial V_{eff}\left(r,t\right)}{\partial r}\dot{r} = \frac{dV_{eff}}{dt} - \dot{g}\left(t\right)\ r\left(\ln r - 1\right),$$

e quindi sostituendo nella (3) otteniamo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{r}^2}{2}\right) + \frac{dV_{eff}}{dt} - \dot{g}\left(t\right)\ r\left(\ln r - 1\right) = 0,$$

ovvero

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{r}^2}{2} + V_{eff}\right) = \dot{g}\left(t\right)\ r\left(\ln r - 1\right).$$

Abbiamo quindi mostrato che vale un'equazione energetica del tipo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{r}^{\ 2} + V_{eff}\right) = S\left(r,t\right),$$

dove

$$S\left(r,t\right) = \dot{g}\left(t\right)\ r\left(\ln r - 1\right).$$

Secondo esercizio

(a) . I vettori posizione dei principali punti sono

$$A - O = R\ \boldsymbol{e}_y,$$

$$C - O = \left(R - r\right)\sin\theta\ \boldsymbol{e}_x - \left(R - r\right)\cos\theta\ \boldsymbol{e}_y,$$

$$C - A = \left(C - O\right) - \left(A - O\right) = \left(R - r\right)\sin\theta\ \boldsymbol{e}_x - \left[R + \left(R - r\right)\cos\theta\right]\boldsymbol{e}_y,$$

per cui

$$\left\|C - A\right\|^2 = \left(R - r\right)^2 + R^2 + 2R\left(R - r\right)\cos\theta.$$

L'energia potenziale totale è

$$V\left(\theta\right) = -mg\left(R - r\right)\cos\theta + \frac{k}{2}\left(\left(R - r\right)^2 + R^2 + 2R\left(R - r\right)\cos\theta\right), \tag{4}$$

per cui, trascurando le costanti, inessenziali sia ai fini dell'equilibrio che a quelli della dinamica, si ha

$$V\left(\theta\right) = mg\left(R - r\right)\left(-1 + \alpha\right)\cos\theta.$$

dove, lo ricordiamo, $\alpha = \dfrac{kR}{mg}$.

Calcolando $V'\left(\theta\right)$ e $V''\left(\theta\right)$ abbiamo

$$V'\left(\theta\right) = -mg\left(R - r\right)\left(-1 + \alpha\right)\sin\theta,$$

$$V''(\theta) = -mg(R-r)(-1+\alpha)\cos\theta.$$

Se $\alpha > 1$, le configurazione di equilibrio sono $\theta = 0$, e $\theta = \pi$. Per quel che concerne la stabilità avremo

$$V''(0) = -mg(R-r)(-1+\alpha) < 0, \qquad \theta = 0 \ \text{ instabile},$$

$$V''(\pi) = -mg(R-r)(-1+\alpha)(-1) > 0, \qquad \theta = \pi \ \text{ stabile}.$$

Se $\alpha < 1$, le configurazione di equilibrio sono sempre $\theta = 0$, e $\theta = \pi$, solo che la stabilità è invertita. Se $\alpha = 1$, abbiamo equilibrio per qualsiasi θ, ovvero equilibrio indifferente.

(b). Siccome abbiamo rotolamento puro, la velocità del punto di contatto K fra disco e guida è nulla. Dalla formula fondamentale dei moti rigidi si ha dunque

$$0 = (C \dot{-} O) + \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_z \wedge (K - C).$$

Otteniamo così

$$\theta = -\frac{r}{R-r}\varphi.$$

E' facile a questo punto calcolare l'energia cinetica del disco. Si ha

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}(C \dot{-} O)^2 + \frac{1}{2}I(C)\dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{m}{2}(R-r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\frac{(R-r)^2}{r^2}\dot{\theta}^2 = \frac{3m}{4}(R-r)^2\dot{\theta}^2. \end{aligned}$$

(c). Se $\alpha = 1/2$, la configurazione di equilibrio stabile è $\theta = 0$. Abbiamo dunque

$$\omega^2 = \frac{V''(0)}{\frac{3m}{2}(R-r)^2}.$$

Dal punto (a) si ricava (quando $\alpha = 1/2$)

$$V''(0) = \frac{mg(R-r)}{2},$$

per cui

$$\omega^2 = \frac{g}{3(R-r)}.$$