Primo Compitino Sistemi Dinamici
18 - 02 - 2019

Primo esercizio

Un punto materiale di massa $m = 1$ è vincolato in modo liscio sulla superficie di equazioni parametriche

$$\begin{aligned} x(u,\theta) &= f(u)\cos\theta, \\ y(u,\theta) &= f(u)\sin\theta, \\ z(u,\theta) &= u, \end{aligned}$$

dove $u \in \mathbb{R}$, f è una funzione regolare definita per ogni u, con derivate di ogni ordine continue e con le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} f(u) &> 0, \quad f(u) = f(-u), \quad \forall\, u \in \mathbb{R}, \\ f'(u) &> 0 \quad \text{per} \quad u > 0. \end{aligned}$$

Il punto P è soggetto soltanto alla forza di richiamo elastica verso la proiezione di P sull'asse di simmetria, cioè

$$\boldsymbol{F} = -k\left(x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y\right) \ .$$

(*a*). Scrivere la Lagrangiana del punto P.

(*b*). Verificare che le configurazioni di equilibrio (ovvero le configurazioni in cui la posizione di P non varia) coincidono con i punti della superficie di quota $z = 0$.

(*c*). Siano fissati i dati iniziali $(u(0), \theta(0)) = (u_o, 0)$: determinare $\dot{u}(0)$, $\dot{\theta}(0)$, in modo tale che $u(t) = u_o$ $\forall\, t \geq 0$.

Facoltativo (solo se si è terminato lo svolgimento dei tre punti precedenti). Discutere l'esistenza di moti limitati o illimitati (ovvero compresi o meno fra due paralleli) a seconda del valore di $\lim\limits_{u\to\infty} f(u)$.

Secondo esercizio

Una particella P di massa $m = 1$ è soggetta alla forza di tipo centrale

$$\boldsymbol{F} = -kr^{\alpha}\boldsymbol{u}_r, \tag{1}$$

dove $k > 0$, $\alpha > 1$, $r = |P - O|$, con O centro della forza e $\boldsymbol{u}_r = \dfrac{P-O}{|P-O|}$. Rispetto ad un SdR $\{O, x, y, z\}$, sono assegnate le condizioni iniziali

$$\left.(P-O)\right|_{t=0} = d\boldsymbol{e}_x, \qquad \left.\frac{d(P-O)}{dt}\right|_{t=0} = \beta\boldsymbol{e}_y,$$

con $d > 0$ e $\beta \neq 0$ e $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ versori degli assi x e y.

(*a*). Calcolare l'energia potenziale efficace $V_{eff} = V(r) + \dfrac{C}{r^2}$, con $V(r)$ da determinarsi in base alle forza (1) e C da esprimere mediante i dati iniziali assegnati.

(*b*). Fissato $d > 0$, determinare β in modo che il punto percorra l'orbita circolare di raggio d. Per quali valori di α la velocità angolare è indipendente dalla posizione iniziale d?

(*c*). Verificare che, comunque si assegnino $d > 0$ e $\beta \neq 0$, la distanza di P dal centro O è compresa fra due valori r_m e r_M, per i quali si chiede di scrivere l'equazione che verificano.

Facoltativo (solo se si è terminato lo svolgimento dei tre punti precedenti). Fissato $d > 0$, determinare i valori di β per i quali d è il pericentro del moto.

SVOLGIMENTO

Primo esercizio

(a) . Calcolando l'energia cinetica a partire dalla parametrizzazione assegnata si ha

$$T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dot{u} & \dot{\theta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f'^{\,2}+1 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[\left(f'^{\,2}+1\right)\dot{u}^{\,2} + f^2\,\dot{\theta}^{\,2}\right].$$

L'energia potenziale dovuta alla forza elastica è

$$\mathcal{V}(x,y) = \frac{k}{2}\left(x^2+y^2\right), \qquad \Longrightarrow \qquad V(u) = \frac{k}{2}f^2(u)$$

essendo V la restrizione sul vincolo. La funzione di Lagrange è dunque

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\left(f'^{\,2}+1\right)\dot{u}^{\,2} + f^2\,\dot{\theta}^{\,2}\right] - \frac{k}{2}f^2(u) \ .$$

(b) . Le configurazioni di equilibrio si ottengono ponendo

$$\frac{\partial V}{\partial u} = 0, \quad \Longrightarrow \quad kf(u)\,f'(u) = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 : \ vera \ \ \forall u \in \mathbb{R}.$$

Dato che $f(u) > 0 \ \forall \ u \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial V}{\partial u} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f'(u) = 0.$$

Ora, $f'(u) = 0$ per $u = 0$, dato che f è funzione pari. D'altra parte per ipotesi $f'(u) \neq 0$ se $u \neq 0$. Le configurazioni di equilibrio si hanno dunque in corrispondenza di $u = 0$ e θ qualsiasi: tali punti formano il parallelo di quota $u = z = 0$ e raggio $f(0)$.

(c) . La condizione $u(t) = u_o$ equivale alla richiesta di mantenere il punto P sul parallelo di quota u_o ed ha luogo se e solo se u_o corrisponde ad un punto stazionario dell'energia potenziale efficace (detta anche energia potenziale modificata) che denoteremo con $\hat{V}$. Com'è noto, quest'ultima è la funzione $\hat{V}(u) = V(u) + \dfrac{1}{2}\dfrac{p_\theta^2}{f^2(u)}$, dove $p_\theta = f^2(u(0))\dot{\theta}(0)$ è la costante di moto correlata alla coordinata ciclica θ.

Osservazione .1 *Si può ripercorrerne il calcolo ad esempio scrivendo*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = f^2(u)\,\dot{\theta} \ = p_\theta = \text{costante}, \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{f^2(u)}$$

e pensando all'integrale primo del moto (funzione Hamiltoniana nelle variabili lagrangiane)

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(f'^{\,2}+1\right)\dot{u}^{\,2} + \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{f^2(u)} + \frac{k}{2}f^2(u),$$

per dedurre $\hat{V}$, che ha la struttura dichiarata sopra.

Si ottiene dunque

$$\hat{V}(u) = \frac{k}{2}f^2(u) + \frac{1}{2}\frac{f^4(u_o)\dot{\theta}^2(0)}{f^2(u)} \tag{2}$$

e

$$\hat{V}'(u) = kf(u)\, f'(u) - \frac{f^4(u_o)\dot{\theta}^2(0)}{f^3(u)} f'(u).$$

Si ha $\hat{V}'(u) = 0$ per $u = u_o$ (ovvero $\hat{V}$ è stazionaria in $u = u_o$) se e solo se

$$f(u_o)\, f'(u_o) \left(k - \dot{\theta}^2(0)\right) = 0. \tag{3}$$

Discutiamo l'equazione precedente, ricordando che $f(u) \neq 0$ per ogni $u \in \mathbb{R}$. Si ha $f'(u_o) = 0$ se e solo se $u_o = 0$: in tal caso il parallelo a quota zero accoglie il moto di P qualunque sia $\dot{\theta}(0)$ e con $\dot{u}(0) = 0$ (condizione evidentemente necessaria per avere u costante).
Per $u_o \neq 0$ si deve imporre invece

$$\dot{u}(0) = 0, \qquad \dot{\theta}(0) = \pm\sqrt{k}.$$

Punto facoltativo. Si tratta di configurarsi qualitativamente il profilo di $\hat{V}$: è una funzione positiva, pari e con andamento a $\pm\infty$ legato a quello di f. Dato che quest'ultima funzione è positiva e crescente, esiste il limite per $u \longrightarrow \infty$ secondo una delle due possibilità:

1. $\lim_{u\to\infty} f(u) = \infty$,
2. $\lim_{u\to\infty} f(u) = L > 0$.

Nel primo caso i moti sono evidentemente tutti limitati (qualunque livello di energia interseca a sinistra e a destra il grafico di $\hat{V}$). Nel secondo caso si trova

$$\lim_{u\to\pm\infty} \hat{V}(u) = +\frac{k}{2}L^2 + \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{L^2} = \lambda$$

pertanto, qualunque sia l'andamento di $\hat{V}$, è sempre possibile fissare un livello di energia $\mathcal{E}$ per cui $\hat{V} < \mathcal{E}$ per ogni $u \in \mathbb{R}$ e le condizioni iniziali che determinano tale livello danno luogo a moti illimitati (a sinistra e a destra). D'altra parte, analizzando la derivata

$$\hat{V}'(u) = f(u)\, f'(u) \left(k - \frac{p_\theta^2}{f^4(u)}\right)$$

e ricordando che f è pari e strettamente crescente per $u > 0$, si realizza facilmente che sono possibili solo i seguenti casi:

(i) i dati sono tali che $f(u) > \sqrt[4]{p_\theta^2/k}$, $\forall u \in \mathbb{R}$. In tal caso $\hat{V}$ ha il minimo in $u = 0$ ed è crescente per $u > 0$; per livelli di energia compresa fra $\hat{V}(0)$ e Λ si hanno moti limitati con punti di inversione simmetrici rispetto a $u = 0$.

(ii) i dati sono tali che $0 < f(u) < \sqrt[4]{p_\theta^2/k}$, $\forall u \in \mathbb{R}$.In tal caso $\hat{V}$ ha il massimo in $u = 0$ e decresce per $u > 0$; per livelli di energia compresa tra λ e $\hat{V}(0)$ si hanno moti limitati a sinistra oppure a destra, a seconda del segno di $u(0)$.

(iii) Esiste $\bar{u} > 0$ per cui $f(\bar{u}) = \sqrt[4]{p_\theta^2/k}$ (se esiste, è unico). In questo caso esistono moti limitati attorno alla posizione $\bar{u}$, con punti di inversione di medesimo segno.

Osservazione .2 *Il caso $\bar{u} = 0$ rientra sostanzialmente in (i). Inoltre, non si sono specificati i moti di tipo asintotico, che si evidenziano facilmente tracciando il profilo di $\bar{V}$ nei tre casi.*

Secondo esercizio

(a). Lavorando con le coordinate polari sul piano del moto, con polo nel centro del moto O,

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi, \end{aligned}$$

abbiamo $P-O = r\boldsymbol{e}_r$ e l'energia potenziale V verifica

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\left(-kr^{\alpha}\right), \quad \text{da cui} \quad V(r) = \frac{k}{\alpha+1}r^{\alpha+1}. \tag{4}$$

L'energia potenziale efficace è dunque

$$V_{eff}(r) = \frac{\alpha}{\alpha+1}r^{\alpha+1} + \frac{L_z^2}{2r^2}$$

dove $L_z = \left(r^2\dot{\varphi}\right)|_{t=0}$ è la costante del momento angolare ($m=1$ nell'esercizio).

Osservazione .3 *Si può riportare il calcolo di V_{eff}, ad esempio, sostituendo $\dot{\varphi} = \frac{L_z}{r^2}$ nell'espressione dell'energia (costante) $\mathcal{E} = T+V$, con T energia cinetica*

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^{\,2} + r^2\dot{\varphi}^{\,2}\right).$$

Oppure, equivalentemente, tramite la Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^{\,2} + r^2\dot{\varphi}^{\,2}\right) - \frac{k}{\alpha+1}r^{\alpha+1},$$

in cui φ è variabile ciclica: di conseguenza

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = A_o\ ,$$

dove A_o è una costante dipendente dalle condizioni iniziali (coincidente con L_z). Abbiamo dunque

$$r^2\dot{\varphi} = A_o\ , \quad \Longrightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{A_o}{r^2}\ . \tag{5}$$

L'energia potenziale efficace viene determinata sfruttando la funzione di Hamilton $\mathcal{H} = T+V$ nelle variabili lagrangiane, che risulta costante del moto:

$$\mathcal{H} = \frac{\dot{r}^{\,2}}{2} + \frac{r^2}{2}\underbrace{\dot{\varphi}^{\,2}}_{\frac{A_o^2}{r^4}} + \frac{k}{\alpha+1}r^{\alpha+1} = \frac{\dot{r}^{\,2}}{2} + \frac{A_o^2}{2r^2} + \frac{k}{\alpha+1}r^{\alpha+1}.$$

In ogni caso si ottiene

$$V_{eff}(r) = \frac{k}{\alpha+1}r^{\alpha+1} + \frac{C}{2r^2}, \qquad C = A_o^2/2 = L_z^2/2$$

con C da specificare sulla base delle condizioni iniziali. Dalla posizione iniziale $\left.(P-O)\right|_{t=0} = d\boldsymbol{e}_x$ si deduce immediatamente $r(0) = d$ e $\varphi(0) = 0$. Inoltre, da

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, \\ \dot{y} &= \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \end{aligned}$$

calcolato per $t=0$ si deduce

$$\dot{r}(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = \frac{\beta}{d}\ . \tag{6}$$

Otteniamo così

$$A_o = d^2 \frac{\beta}{d} = d\beta,$$

per cui

$$V_{eff}(r) = \frac{d^2\beta^2}{2r^2} + \frac{k}{\alpha+1} r^{\alpha+1}. \tag{7}$$

Quindi $V(r)$ è data dalla (4) mentre $C = \frac{d^2\beta^2}{2}$.

Osservazione .4 *Come controllo dimensionale possiamo osservare che C è una lunghezza al quadrato per una velocità al quadrato: dividendo per una lunghezza al quadrato (r^2) si ottiene un'energia con massa unitaria, coerentemente con V_{eff} a sinistra dell'uguale, in cui, ricordiamo, $m = 1$.*

(b) . L'orbita circolare di raggio $r = d$, si ha se e solo se $V'_{eff}(d) = 0$ (il dato iniziale $\dot{r} = 0$ è già predisposto). Siccome

$$V'_{eff}(r) = -\frac{d^2\beta^2}{r^3} + kr^{\alpha} \ ,$$

abbiamo $V'_{eff}(d) = 0$, se e solo se

$$0 = -\frac{d^2\beta^2}{d^3} + kd^{\alpha}, \quad \Longleftrightarrow \quad \beta = \pm\sqrt{k} d^{\frac{\alpha+1}{2}} \ .$$

Ora nell'orbita circolare la velocità angolare è costante ed è pari alla velocità angolare iniziale $\dot{\varphi}(0)$. Quest'ultima si calcola è data dalla (6), cioè

$$\dot{\varphi}(0) = \frac{\beta}{d} = \pm \frac{\sqrt{k} d^{\frac{\alpha+1}{2}}}{d} = \pm\sqrt{k} d^{\frac{\alpha-1}{2}}.$$

Quindi $\dot{\varphi}(0)$ è indipendente da d soltanto se $\alpha = 1$, cioè se la forza è elastica. Tuttavia $\alpha = 1$ non rientra nel range specificato nel testo.

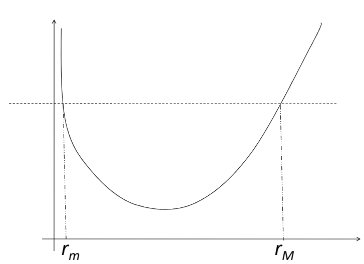
(c) . Riprendendo (7) e ricordando che $\alpha > 1$, abbiamo

$$\lim_{r \to 0^+} V(r) \ = +\infty, \quad \text{e} \quad \lim_{r \to +\infty} V(r) = +\infty.$$

Inoltre, $V'_{eff}(r) = 0$ ha un'unica soluzione

$$r^{3+\alpha} = \frac{d^2\beta^2}{k}.$$

L'energia potenziale efficace presenta quindi un solo minimo per cui $r(t)$ è limitato, ovvero $r_m \leq r(t) \leq r_M$, con r_m e r_M intersezioni fra V_{eff} ed il livello energetico E (che si suppone maggiore del minimo di $V_{eff}(r)$), come mostrato in figura.



L'equazione che determina r_m e r_M è $V_{eff}(r) = E$, che in questo caso si scrive

$$\frac{k}{\alpha+1} r^{\alpha+1} + \frac{d^2\beta^2}{2r^2} = \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{k}{\alpha+1} d^{\alpha+1}$$

dato che l'energia cinetica T all'istante $t = 0$ è $\beta^2/2$ e $V(d) = \dfrac{k}{\alpha+1} d^{\alpha+1}$.

Punto facoltativo. La condizione iniziale sulla velocità comporta $\dot{r}(0) = 0$, dunque all'istante $t = 0$ il grafico di V_{eff} intercetta il livello di energia E. La posizione iniziale $r = d$ è dunque pericentro oppure apocentro, a seconda di come avviene l'intersezione. In particolare, d è pericentro se e solo se $V'_{eff}(d) \leq 0$ (ovvero il moto si sviluppa a destra), che equivale a

$$\beta^2 \geq k d^{\alpha+1} \; .$$

In caso di uguaglianza, come si è visto, si ha l'orbita circolare e la coincidenza di pericentro e apocentro.