Prova Scritta di Sistemi Dinamici
11 - 09 - 2014

Primo esercizio

Un punto materiale di massa unitaria è vincolato a muoversi lungo l'asse x sotto l'azione della forza

$$F(x) = -3x^2 + 2x.$$

(a). Si Determini l'energia potenziale $V(x)$ e se ne disegni il grafico.

(b). Dire per quali valori della velocità iniziale $\dot{x}(0)$ il moto è periodico se la particella parte dalla posizione iniziale $x(0) = 1/3$.

(c). Si calcoli il periodo delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.

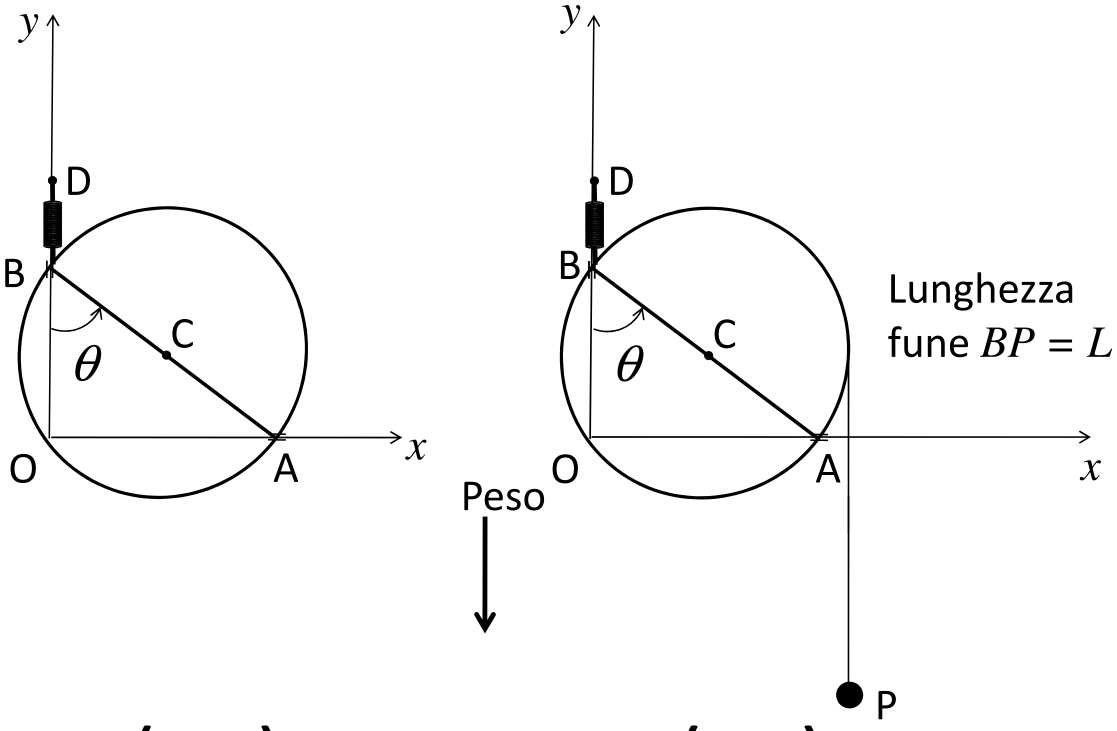
Secondo esercizio

Un sistema rigido è costituito da un asta omogena AB, di lunghezza R e massa m, e da una circonferenza omogenea di diametro $2R$ saldata agli estremi A e B dell'asta. La massa della circonferenza è m. Gli estremi A e B dell'asta sono vincolati a scorrere senza attrito su due guide tra loro ortogonali (gli assi x e y della figura). Tra l'estremo B ed il punto D dell'asse y, le cui coordinate sono $D \equiv (0, 2R)$, è presente una molla di massa e lunghezza a riposo trascurabili la cui rigidezza è k (v. figura (A)). Si utilizzi come variabile l'angolo θ, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, che l'asta AB forma con la verticale (v. figura). La forza peso è diretta come in figura.

(a). Determinare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità, nell'ipotesi che $\frac{mg}{kR} = 2 - \sqrt{2}$.

(b). All'estremo B viene adesso fissata anche una fune inestensibile di lunghezza L, e massa trascurabile, al cui altro estremo è fissato un punto materiale P di massa M (v. figura (B)). La fune si avvolge sulla circonferenza sino a distaccarsene nel punto in cui la tangente alla circonferenza è verticale, come è mostrato nella figura (B), ed è sufficientemente lunga si che in ogni configurazione l'ordinata del punto P è negativa. Determinare le eventuali posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità, nell'ipostesi $m = \frac{3}{2}M$, e $\frac{kR}{Mg} = 1$.

(c). Scrivere l'energia cinetica del solo sistema rigido.



(A) (B)

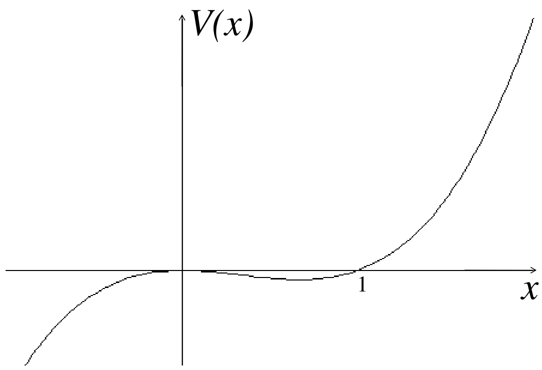
SVOLGIMENTO

Primo esercizio

(a) . Siccome $F(x) = -\dfrac{dV(x)}{dx}$, abbiamo

$$V(x) = x^3 - x^2 = x^2 (x-1) .$$

E' facile vedere che $V(x)$ si annulla in $x = 0$, e in $x = 1$, e che $V(x) \le 0$ per $x \le 1$. Calcolando $V'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x-2)$, e $V''(x) = 6x - 2$, si deduce che $V(x)$ ha due estremi relativi: $x = 0$, e $x = 2/3$. Il primo è un massimo, $V''(0) = -2$, mentre il secondo è un minimo $V''(2/3) = 2$. In particolare $V(0) = 0$, mentre $V(2/3) = V_{\min} = -\dfrac{4}{27}$. Il grafico di $V(x)$ è riportato nella figura sottostante.



(b) . L'integrale primo del moto è l'energia meccanica

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + x^2(x-1) \ .$$

Il moto è periodico se

$$-\frac{4}{27} = V_{\min} < E < 0.$$

L'energia E si calcola in base alle condizioni iniziali. Ponendo $\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$, e $x_0 = x(0)$, abbiamo

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}_0^2 + V(x_0) , \quad \text{con} \quad V(x_0) = x_0^2 (x_0 - 1) ,$$

e quindi $V_{\min} < E < 0$, comporta

$$V_{\min} < \frac{1}{2}\dot{x}_0^2 + V(x_0) < 0, \implies V_{\min} - V(x_0) < \frac{1}{2}\dot{x}_0^2 < -V(x_0) . \tag{1}$$

Siccome $x_0 = 1/3$, $V(x_0) = V(1/3) = -\dfrac{2}{27}$, la (1) si riscrive così

$$\underbrace{-\frac{4}{27} + \frac{2}{27}}_{-2/27} < \frac{1}{2}\dot{x}_0^2 < \frac{2}{27}.$$

La prima disuguaglianza è banalmente verificata mentre la seconda ci dà

$$\dot{x}_0^{\,2} < \frac{4}{27}, \quad \Longrightarrow \quad -\frac{2}{3\sqrt{3}} < \dot{x}_0 < \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Couìncludendo, il moto sarà periodico a partire dalla posizione iniziale $x_0 = 1/3$uindiSapendo , se la velocità iniziale $\left|\dot{x}_0\right| < \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

(c). La posizione di equilibrio stabile corrisponde ad $x = 2/3$, in corrispondenza del quale V ha un minimo $V_{\min}$. Se consideriamo E maggiore di $V_{\min}$, ma "vicino" a $V_{\min}$, è la possibile trovare unespressione approssimata del periodo. Considerando un intorno di $x = 2/3$, si approssima $V(x)$ con il suo sviluppo di Taylor (limitato al secondo ordine)

$$V(x) \approx V_{\min} + \underbrace{V'(2/3)}_{=0}\left(x - \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}\underbrace{V''(2/3)}_{2}\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = V_{\min} + \left(x - \frac{2}{3}\right)^2.$$

Gli estremi dell'intervallo dove si svolge il moto sono dati da

$$V_{\min} + \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = E, \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_m = \dfrac{2}{3} - \sqrt{E - V_{\min}}, \\[2ex] x_M = \dfrac{2}{3} + \sqrt{E - V_{\min}}. \end{cases}$$

Quindi, introducendo $\xi = x - 2/3$, si ha

$$\xi_m = -\sqrt{E - V_{\min}},$$

$$\xi_M = \sqrt{E - V_{\min}},$$

e

$$E - V \approx E - V_{\min} - \xi^2.$$

Da ciò segue l'espressione approssimata di T

$$T \approx 2 \int_{-\sqrt{E-V_{\min}}}^{\sqrt{E-V_{\min}}} \frac{d\xi}{\sqrt{2\left[(E - V_{\min}) - \xi^2\right]}}.$$

Da cui, ricordando che $\int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\Big|_{-a}^{a} = \pi$, ricaviamo

$$T \approx \frac{2}{\sqrt{2}}\pi.$$

Secondo esercizio

(a). Il primo passo è determinare in funzione di θ le posizioni dei principali punti. Abbiamo

$$\begin{aligned} B - O &= 2R\cos\theta\ \boldsymbol{e}_y\,, \\ A - O &= 2R\sin\theta\ \boldsymbol{e}_x\,, \\ D - O &= 2R\ \boldsymbol{e}_y\,, \\ C - O &= R\sin\theta\ \boldsymbol{e}_x + R\cos\theta\ \boldsymbol{e}_y\,, \quad \Rightarrow \quad (\dot{C - O}) = R\dot{\theta}\left(\cos\theta\ \boldsymbol{e}_x - \sin\theta\ \boldsymbol{e}_y\right)\,. \end{aligned}$$

L'allungamento della molla è dato dal vettore

$$B - D = 2R\,(1-\cos\theta)\,\boldsymbol{e}_y.$$

L'energia poteziale elastica

$$V_{elastica} = \frac{k}{2}\,(B-D)^2 = \frac{k}{2}\,(2R - 2R\cos\theta)^2 = 2kR^2\,(1-\cos\theta)^2\,,$$

mentre quella dovuta alla forza peso agente sul sistema rigido è

$$V_{sistema\ rigido} = 2mgy_c = 2mgR\cos\theta,$$

dal momento che il centro C è il CM del sistema rigido. L'energia potenziale totale è

$$\begin{aligned} V &= V_{elastica} + V_{sistema\ rigido} = 2mgR\cos\theta + 2kR^2\,(1-\cos\theta)^2 \\ &= 2kR^2\,\left[\frac{mg}{kR}\,\cos\theta + (1-\cos\theta)^2\right] = 2kR^2\left[\left(2-\sqrt{2}\right)\cos\theta + 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta\right] \\ &= 2kR^2\left(\cos^2\theta - \sqrt{2}\cos\theta + 1\right). \end{aligned}$$

Le posizioni di equilibrio e la loro stabilità si determinano applicando il criterio di Dirichlet. Calacolando derivata prima e seconda di $V\,(\theta)$ si ottiene

$$\begin{aligned} V'\,(\theta) &= 2kR^2\left(-2\cos\theta\sin\theta + \sqrt{2}\sin\theta\right) = 4kR^2\sin\theta\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos\theta\right), \\ V''\,(\theta) &= 4kR^2\left[-2\cos^2\theta + \sqrt{2}\cos\theta + 2\sin^2\theta\right], \end{aligned}$$

da cui si ricavano le configurazioni di equilibrio (considerando ovviamente $\theta \in [0,\pi/2]$)

$$V'\,(\theta) = 0, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sin\theta = 0, \quad \Rightarrow \quad \theta = 0, \\ \\ \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad \Rightarrow \quad \theta = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases},$$

Per quel che riguarda la stabilità abbiamo

$$V''\,(0) = 4kR^2\left(-2+\sqrt{2}\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0, \quad \text{instabile},$$

$$V''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4kR^2, \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \quad \text{stabile}.$$

(b). Per prima cosa dobbiamo poi determinare l'ordinata del punto P. Riferendoci alla figura (B), la lunghezza della fune che si trova al di sopra dell'asse x è

$$\underbrace{R\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}_{\substack{\text{parte della fune}\\ \text{avvolta sulla}\\ \text{circonferenza}}} + \underbrace{R\cos\theta}_{\substack{\text{parte verticale}\\ \text{della fune}}}\,,$$

e di conseguenza

$$y_P = -\left[L - \left(R\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + R\cos\theta\right)\right].$$

Il segno $-$ è dovuto al fatto che sappiamo, sulla base dei dati, che y_P è sempre negativa.

L'energia potenziale totale è

$$V = V_{sistema\ rigido} + V_{elastica} + V_P\,,$$

dove V_P è l'energia potenziale dovuta alla massa M,

$$\begin{aligned} V_P &= Mgy_P = -Mg\left\{L - \left[R\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + R\cos\theta\right]\right\} \\ &= MgR\left[\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\theta\right] - MgL. \end{aligned}$$

In definitiva la nuova energia potenziale è

$$V(\theta) = gR(2m + M)\cos\theta + MgR\theta - MgL + MgR\frac{\pi}{2} + 2kR^2(1 - \cos\theta)^2\,,$$

la cui derivata è

$$\begin{aligned} V'(\theta) &= MgR\left(1 - \left(\frac{2m}{M} + 1\right)\sin\theta\right) + 4kR^2(1 - \cos\theta)\sin\theta \\ &= MgR\left[1 - \left(\frac{2m}{M} + 1\right)\sin\theta + \frac{4kR}{Mg}(1 - \cos\theta)\sin\theta\right]. \end{aligned}$$

Adesso ricordiamo che $m = \frac{3}{2}M$, e $\frac{kR}{Mg} = 1$, per cui $\left(\frac{2m}{M} + 1\right) = 4$, si ha

$$V'(\theta) = MgR[1 - 4\sin\theta + 4(1 - \cos\theta)\sin\theta] = MgR[1 - 2\sin(2\theta)]\,.$$

Quindi, posto $\phi = 2\theta$, $\phi \in [0, \pi]$, le posizioni di equilibrio si ottengono risolvendo, in $[0, \pi]$, l'equazione

$$1 - 2\sin\phi = 0, \quad\Rightarrow\quad \sin\phi = \frac{1}{2}, \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \phi_1 = \frac{\pi}{6}, & \Rightarrow\quad \theta_1 = \frac{\pi}{12}, \\ \phi_2 = \frac{5\pi}{6}, & \Rightarrow\quad \theta_2 = \frac{5\pi}{12}. \end{cases}$$

Per stabilire la stabilità, calcoliamo la derivata seconda $V'' = -4MgR\cos(2\theta) = -4MgR\cos\phi$, da cui otteniamo

$$\begin{cases} V''(\theta_1) < 0, & \Rightarrow\quad \theta_1 \ \text{ instabile }, \\ V''(\theta_2) > 0, & \Rightarrow\quad \theta_2 \ \text{ stabile }. \end{cases}$$

(c) . L'energia cinetica del solo sistema rigido è

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}2m\dot{(C - O)}^2 + \frac{1}{2}I(C)\dot{\theta}^2 \\ &= m\left(R\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}I(C)\dot{\theta}^2. \end{aligned}$$

Dobbiamo quindi determinare il momento d'inerzia rispetto ad un asse che passa per il punto C ed è perpendicolare al piano del sistema rigido. Data l'additività del momento d'inerzia

$$I(C) = \underbrace{\frac{1}{12}m(2R)^2}_{\text{asta}} + \underbrace{mR^2}_{\text{circonferenza}} = \frac{4}{3}mR^2,$$

da cui ricaviamo

$$T = \frac{5}{3}mR^2\dot{\theta}^2\,.$$