Prova Scritta di Sistemi Dinamici
29 - 05 - 2015

Primo esercizio

E' data la superficie ottenuta ruotando attorno all'asse z, la curva di equazione $z = \cosh x$. Un punto materiale P di massa unitaria, è vincolato a muoversi senza attrito su tale superficie. Il punto P è soggetto alla forza peso $-g\boldsymbol{e}_z$,

(*a*). Si scrivano le equazioni del moto.

(*b*). Determinare se esistono soluzioni in cui z rimane costante durante il moto.

(*c*). Calcolare la reazione vincolare durante il moto del caso (b).

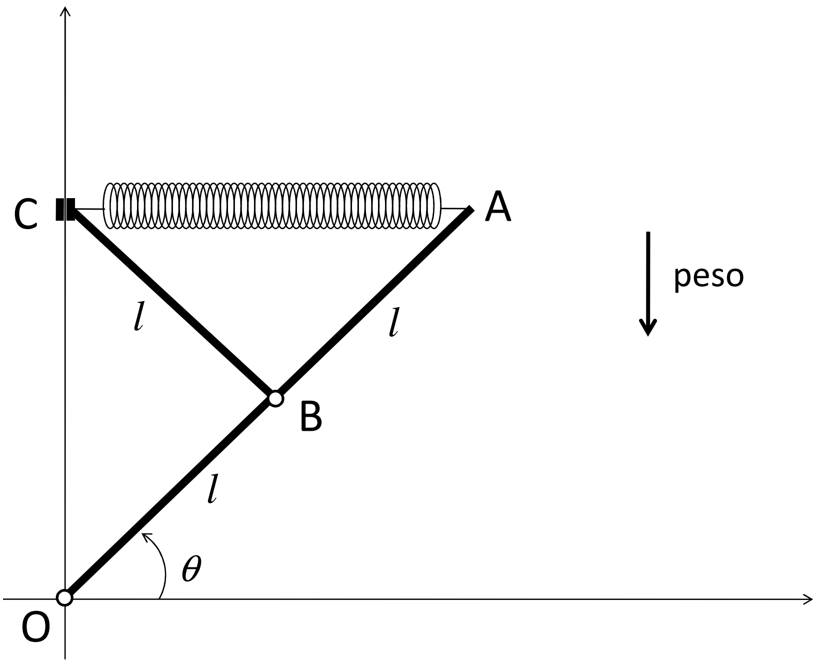
Secondo esercizio

Sono date due sbarrette OA e BC le cui lunghezze sono rispettivamente $2l$ e l. Le due sbarrette hanno ugual massa m. La sbarretta OA ha l'estremo O incernierato in un punto fisso del piano. L'estremo B di BC è incernierato sul punto di mezzo della sbarretta OA, e l'estremo C è vincolato a scorrere senza attrito sulla retta verticale passante per O (v. figura). Una molla di costante elastica k, avente massa e lunghezza a riposo trascurabili, collega gli estremi C ed A. Si prenda come parametro lagrangiano l'angolo θ, $\theta \in [-\pi, \pi)$, che OA forma con l'asse orizzontale, e si consideri $\theta > 0$ per rotazioni antiorarie. La forza peso è diretta come in figura e tutti gli attriti sono trascurabili.

(*a*). Determinare le configurazioni di equilibrio e la loro stabilità in funzione del parametro $\beta = \dfrac{5mg}{8kl}$.

(*b*). Calcolare, in corrispondenza della generica configurazione di equilibrio θ_{eq}, la reazione vincolare nel punto C.

(*c*). Supponendo di rimuovere la molla, si calcoli la velocità $\boldsymbol{v}_A$ del punto A quando OA e verticale, con A sotto O, nel caso in cui il sistema è lasciato andare da fermo dalla configurazione corrispondente a $\theta = 0$.



C
A
peso
l
l
B
l
θ
O

SVOLGIMENTO

Primo esercizio

(a). La superficie è una superficie di rotazione e quindi può essere espressa in termini dei parametri $r \in [0, +\infty)$, $\theta \in [-\pi, +\pi)$,

$$\begin{cases} x(r,\phi) = r\cos\phi, \\ \\ y(r,\phi) = r\sin\phi, \\ \\ z(r,\phi) = \cosh\sqrt{x^2+y^2} = \cosh r. \end{cases} \tag{1}$$

I vettori della base locale sono

$$\boldsymbol{u}_r = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ \sinh r \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_\phi = \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix},$$

con $\boldsymbol{u}_r \cdot \boldsymbol{u}_\phi = 0$, $|\boldsymbol{u}_r|^2 = 1+\sinh^2 r$, $|\boldsymbol{u}_\phi|^2 = r^2$. L'energia cinetica è dunque

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dot{r} & \dot{\phi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\sinh^2 r & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(1+\sinh^2 r\right)\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right], \end{aligned}$$

mentre l'energia potenziale $V = g$ ("quota di P") $= g\cosh r$. La funzione di Lagrange è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\left(1+\sinh^2 r\right)\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right] - g\cosh r\ .$$

Per quanto riguarda l'equazione di moto, osserviamo subito che ϕ è ciclica,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{A}{r^2}, \tag{2}$$

con A costante (da determinarsi in base alle condizioni iniziali). L'equazione per r è invece

$$\frac{d}{dt}\left[\left(1+\sinh^2 r\right)\dot{r}\right] - \left(\sinh r\cosh r\dot{r}^2 + r\dot{\phi}^2 - g\sinh r\right) = 0,$$

ovvero

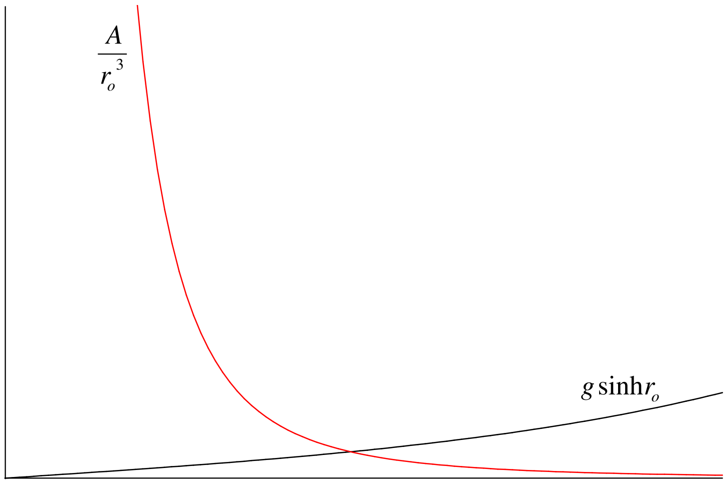
$$\frac{d}{dt}\left[\left(1+\sinh^2 r\right)\dot{r}\right] - \sinh r\cosh r\dot{r}^2 - \frac{A^2}{r^3} + g\sinh r = 0. \tag{3}$$

(b). La condizione $z(t) = z_o$ =cost., equivale alla condizione $r(t) = r_o$ =costante. Dobbiamo quindi analizzarre se possono esistere tali soluzioni, e, in caso affermativo determinarne il numero. Se $r(t) = r_o$, dalla (2) otteniamo

$$\dot{\phi} = \frac{A}{r_o^2} = \text{costante}, \quad \Rightarrow \quad \phi(t) = \omega t + \phi(0), \tag{4}$$

con $\omega = \dfrac{A}{r_o^2}$. Dalla (3) si ha

$$\frac{A^2}{r_o^3} - g\sinh r_o = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A^2}{r_o^3} = g\sinh r_o. \tag{5}$$



Quindi se $A = 0$, perchè $\dot{\phi} = 0$, l'unica soluzione z =cost., è $z = 1$, corrispondente a $r_o = 0$. Il punto P sta fermo in $r = 0$. Se $A \neq 0$, l'equazione (5) ammette una ed una sola soluzione per $r_o > 0$, come mostrato dalla figura.

(c). Se $A = 0$, allora banalmente la reazione vincolare è $\boldsymbol{R} = g\boldsymbol{e}_z$, tale da bilanciare esattamente la forza peso. Supponiamo allora $A \neq 0$. Sia r_o la soluzione della (5), mentre $\phi(t)$ è dato dalla (4) dove, per semplicità, si considera $\phi(0) = 0$. La superficie possiamo leggerla come

$$f(x, y, z) = z - \cosh\sqrt{x^2 + y^2},$$

in modo che

$$\begin{aligned}\nabla f &= -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sinh\sqrt{x^2+y^2}\boldsymbol{e}_x - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sinh\sqrt{x^2+y^2}\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z,\\ &= -\cos\phi\sinh r\ \boldsymbol{e}_x - \sin\phi\sinh r\ \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

$$|\nabla f\,|^2 = 1 + \sinh^2 r = \cosh^2 r.$$

La reazione vincolare è dunque $\boldsymbol{R} = \lambda\nabla f$, dove

$$\lambda = \frac{\left[\ddot{\boldsymbol{x}} - (-g\boldsymbol{e}_z)\right]\cdot\nabla f}{|\nabla f\,|^2}$$

Dalla (1) si ha

$$\begin{cases} x = r_o\cos\omega t,\\ y = r_o\sin\omega t,\\ z = \cosh r_o.\end{cases}\qquad\begin{cases}\ddot{x} = -\omega^2 x,\\ \ddot{y} = -\omega^2 y,\\ \ddot{z} = 0.\end{cases}$$

e quindi $\ddot{\boldsymbol{x}}\cdot\nabla f = \omega^2 r_o\sinh r_o$, mentre $g\boldsymbol{e}_z\cdot\nabla f = g$, da cui otteniamo

$$\lambda = \frac{\omega^2 r_o\sinh r_o + g}{\cosh^2 r_o},$$

e

$$\boldsymbol{R} = -\left(\frac{\omega^2 r_o \sinh r_o + g}{\cosh^2 r_o}\right)(\cos\omega t \sinh r_o\ \boldsymbol{e}_x + \sin\omega t \sinh r_o\ \boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z)\,.$$

Secondo esercizio

(a). Cominciamo col determinare le posizioni dei punti d'interesse del sistema

$$(B-O) = l\cos\theta\boldsymbol{e}_x + l\sin\theta\boldsymbol{e}_y, \tag{6}$$

$$(A-O) = 2l\cos\theta\boldsymbol{e}_x + 2l\sin\theta\boldsymbol{e}_y, \tag{7}$$

$$(C-O) = 2l\sin\theta\boldsymbol{e}_y\ ,$$

$$(A-C) = (A-O)-(C-O) = 2l\cos\theta\boldsymbol{e}_x\ ,$$

$$(D-O) = \frac{l}{2}\cos\theta\boldsymbol{e}_x + \frac{3l}{2}\sin\theta\boldsymbol{e}_y\ .$$

dove D è il C.M. dell'asta BC. L'energia potenziale è dunque

$$\begin{aligned} V &= V_{molla} + V_{peso\ OA} + V_{peso\ BC} \\ &= \frac{k}{2}\left|A-C\right|^2 + mg\frac{3l}{2}\sin\theta + mgl\sin\theta \\ &= 2kl^2\cos^2\theta + \frac{5}{2}mgl\sin\theta, \end{aligned}$$

dal momento che B coincide col C.M. dell'asta OA. Le posizioni di equilibrio si determinano risolvendo $\frac{dV}{d\theta}$, cioè

$$V'(\theta) = 4kl^2\cos\theta\left[\beta - \sin\theta\right],$$

dove $\beta = \frac{5mg}{8kl}$. La stabilitá si determina invece analizzando il segno di

$$V''(\theta) = -4kl^2\left(\beta\sin\theta - \sin^2\theta + \cos^2\theta\right) = -4kl^2\left(\beta\sin\theta + 1 - 2\sin^2\theta\right)$$

Abbiamo quindi i seguenti casi:

- $\beta > 1$. Le configurazioni di equilibrio sono $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$. In particolare

$$V''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 4kl^2(\beta+1) > 0, \quad \Rightarrow \quad \theta = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{stabile},$$

$$V''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4kl^2(\beta-1) < 0, \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \text{instabile}.$$

- $\beta < 1$. Le configurazioni di equilibrio sono $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, oltre a

$$\theta_1 = \arcsin\beta, \quad \text{e} \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} + \arcsin\beta,$$

  dove $\theta_1 \in (0, \pi/2)$. Abbiamo

$$V''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -4kl^2(\beta+1) > 0, \quad \Rightarrow \quad \theta = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{stabile},$$

$$V''(\theta_1) = -4kl^2\left(1-\beta^2\right) < 0, \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta_1, \quad \text{instabile},$$

$$V''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4kl^2(\beta-1) > 0, \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \text{stabile},$$

$$V''(\theta_2) = -4kl^2\left(1-\beta^2\right) < 0, \quad \Rightarrow \quad \theta = \theta_2, \quad \text{instabile}.$$

(b). Poiché il vincolo è liscio, la reazione vincolare in C è $\boldsymbol{R} = R\ \boldsymbol{e}_x$, con R incognita. Scriviamo dunque la seconda equazione cardinale con centro di riduzione B. Abbiamo

$$(C-B)\wedge(R\ \boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{F}_{molla})+(D-B)\wedge(-mg\boldsymbol{e}_y)=0,$$

dove D è il punto di mezo dell'asta BC. Quindi, siccome $(D-B)=\frac{1}{2}(C-B)$, e

$$\boldsymbol{F}_{molla}=2kl\cos\theta_{eq}\ \boldsymbol{e}_x,$$

scriveremo

$$(C-B)\wedge\left[(R+2kl\cos\theta_{eq})\,\boldsymbol{e}_x-\frac{mg}{2}\boldsymbol{e}_y\right]=0,$$

con $(C-B)=-l\cos\theta_{eq}\boldsymbol{e}_x+l\sin\theta_{eq}\boldsymbol{e}_y$. Si ottiene dunque

$$R=\frac{mg}{2}\frac{\cos\theta_{eq}}{\sin\theta_{eq}}-2kl\cos\theta_{eq}\ . \tag{8}$$

Un'altra strada per determinare $\boldsymbol{R}$ è quella di scrivere la seconda equazione cardinale per il sistema delle due aste, considerando O come centro di riduzione. In tal caso le uniche forze esterne sono i pesi delle due aste, applicati in B e in D, e la forza $\boldsymbol{R}$. In tal caso la forza della molla è una forza interna e quindi non compare nella seconda equazione cardinale. Abbiamo

$$(C-O)\wedge(R\boldsymbol{e}_x)+(D-O)\wedge(-mg\boldsymbol{e}_y)+(B-O)\wedge(-mg\boldsymbol{e}_y)=0,$$

da cui otteniamo

$$R=-\frac{3}{4}mg\frac{\cos\theta_{eq}}{\sin\theta_{eq}}. \tag{9}$$

Notiamo infine che la (8) e la (9) non sono in contraddizione. Infatti uguagliandole si ottiene

$$-\frac{3}{4}mg\frac{\cos\theta_{eq}}{\sin\theta_{eq}}=\frac{mg}{2}\frac{\cos\theta_{eq}}{\sin\theta_{eq}}-2kl\cos\theta_{eq},\quad\Leftrightarrow\quad\underbrace{\left(\frac{5mg}{8kl}\right)}_{\beta}\frac{\cos\theta_{eq}}{\sin\theta_{eq}}=\cos\theta_{eq},$$

che è appunto verificata quando $\theta_{eq}=\pm\frac{\pi}{2}$, oppure $\sin\theta_{eq}=\beta$.

(c). Per calcolare $\boldsymbol{v}_A$ applichiamo la formula fondamentale dei moti rigidi

$$\boldsymbol{v}_A=\underbrace{\boldsymbol{v}_O}_{=0}+\dot\theta\boldsymbol{e}_z\wedge(A-O)\,,$$

oppure deriviamo rispetto al tempo la (7)

$$\boldsymbol{v}_A=\dot{(A-O)}=-2l\dot\theta\sin\theta\boldsymbol{e}_x+2l\dot\theta\cos\theta\boldsymbol{e}_y.$$

Evidentemente $\dot\theta$ è incognita e deve essere calcolata quando la sbarretta è verticale, cioè quando $\theta=-\frac{\pi}{2}$. A tal scopo, osserviamo che l'Hamiltoniana $H=T+V$, è conservata. Quindi

$$H\left(\theta=0,\dot\theta=0\right)=H\left(\theta=-\frac{\pi}{2},\dot\theta\right).$$

Dobbiamo allora determinare T,

$$T=\underbrace{\frac{1}{2}I_{OA}(O)\,\dot\theta^2}_{T_{OA}}+\underbrace{\left(\frac{m}{2}\dot{(D-O)}^2+\frac{1}{2}I_{BC}(D)\,\omega_{BC}^2\right)}_{T_{BC}}\,, \tag{10}$$

dove ω_{BC}, è la velocità angolare dell'asta BC, che ovviamente deve essere determinata. Sfruttando la formula dei moti rigidi abbiamo

$$\boldsymbol{v}_B = \dot{(C - O)} + \omega_{BC}\boldsymbol{e}_z \wedge (B - C) \, .$$

Del resto, dalla (6), si ha

$$\boldsymbol{v}_B = \dot{(B - O)} = -l\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{e}_x + l\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{e}_y \ .$$

Quindi dall'uguaglianza

$$-l\dot{\theta}\sin\theta\boldsymbol{e}_x + l\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{e}_y = \dot{(C - O)} + \omega_{BC}\boldsymbol{e}_z \wedge (B - C) \, ,$$

si ricava ω_{BC}. In particolare, siccome $\dot{(C - O)} = 2l\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{e}_y$, e $(B - C) = (B - O) - (C - O)$, si ottiene

$$\omega_{BC} = -\dot{\theta} \ .$$

Tornando adesso alla (10), abbiamo

$$I_{OA}(O) = \frac{1}{12}m\,(2l)^2 + ml^2 = \frac{4}{3}ml^2,$$

$$\dot{(D - O)}^2 = l^2\left(\frac{1}{4} - 2\cos^2\theta\right)\dot{\theta}^2,$$

per cui $T = ml^2\left(\frac{5}{6} - \cos^2\theta\right)\dot{\theta}^2$. L'Hamiltoniana è quindi

$$H = ml^2\left(\frac{5}{6} - \cos^2\theta\right)\dot{\theta}^2 + \frac{5}{2}mgl\sin\theta.$$

Tenendo conto del fatto $H = 0$ nella configurazione inziale (il sistema è orizzontale e $\dot{\theta} = 0$), abbiamo $H\left(\theta = -\frac{\pi}{2}, \dot{\theta}\right) = 0$, da cui ricaviamo $\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{3g}{l}}$ (il segno $-$ è dovuto al fatto che la rotazione avviene in senso orario). Possiamo dunque calcolare $\boldsymbol{v}_A$, ottenendo

$$\boldsymbol{v}_A = -\sqrt{\frac{3g}{l}}\boldsymbol{e}_z \wedge (-2l\ \boldsymbol{e}_y) = -2\sqrt{3gl}\ \boldsymbol{e}_x \ .$$