Prova Scritta di Sistemi Dinamici
09 - 01 - 2017

Primo esercizio

Un punto P di massa $m = 1$, è vincolato a muoversi su una superficie di ottenuta ruotando attorno all'asse z la curva $x = \dfrac{1}{z^2+1}$. La superficie è liscia ed il punto è soggetto alla forza peso (per semplicità si consideri $g = 1$) diretta nel verso opposto dell'asse z.

(a). Si scriva l'energia cinetica della particella.

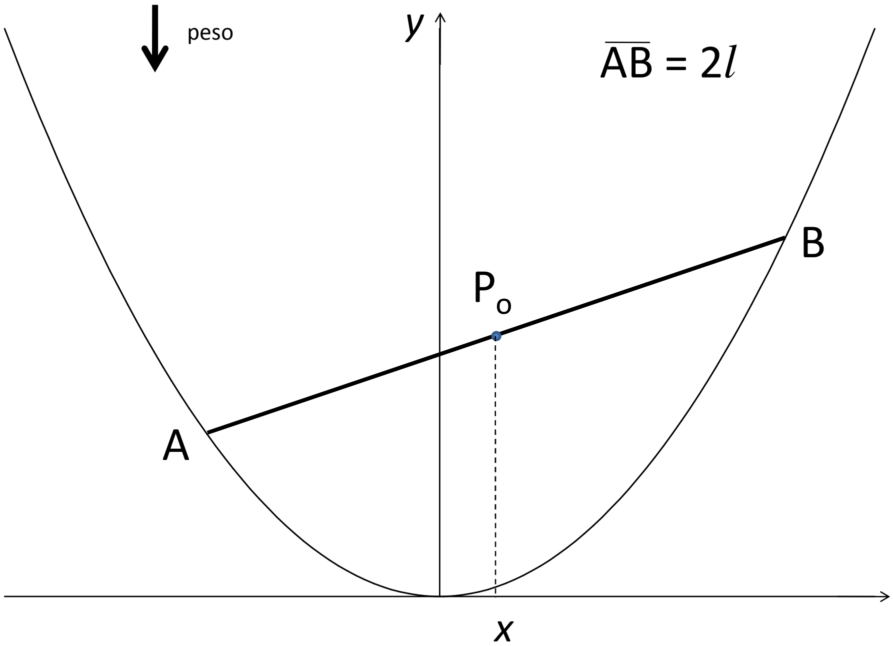
(b). Dire, motivando la risposta, se esistono o meno configurazioni di equilibrio.

Secondo esercizio

Un'asta rigida AB di lunghezza $2l$ e massa m è vincolata in un piano verticale ed i suoi estremi sono vincolati a scorrere su una parabola di equazione $y = \dfrac{x^2}{2a}$, dove a è una costante positiva. Il sistema è soggetto alla sola forza peso diretta come in figura ed i vincoli sono lisci. Si usi la coordinata x del centro di massa P_o come parametro lagrangiano.

(a). Determinare le posizioni di equilibrio dell'asta al variare della sua lunghezza l.

(b). Scrivere l'energia cinetica dell'asta.


peso
y
$\overline{AB} = 2l$
B
P_o
A
x

SVOLGIMENTO

Primo esercizio

(a). Se φ è l'angolo che la proiezione del vettore $(P-O)$ sul piano x, y forma con l'asse x, abbiamo la seguente descrizione parametrica della superficie data in trmini di $z \in \mathbb{R}$, e di $\varphi \in (-\pi, \pi]$

$$\begin{cases} z \in \mathbb{R}, \\ x = \dfrac{1}{z^2+1}\cos\varphi, \\ y = \dfrac{1}{z^2+1}\sin\varphi. \end{cases}$$

I vettori della base del piano tangente sono

$$\boldsymbol{u}_z = \frac{\partial(P-O)}{\partial z} = \frac{-2z}{\left(z^2+1\right)^2}\left(\cos\varphi\boldsymbol{e}_x + \sin\varphi\boldsymbol{e}_y\right) + \boldsymbol{e}_z \ ,$$

$$\boldsymbol{u}_\varphi = \frac{\partial(P-O)}{\partial\varphi} = \frac{1}{z^2+1}\left(-\sin\varphi\boldsymbol{e}_x + \cos\varphi\boldsymbol{e}_y\right).$$

Scriviamo dunque l'energia cinetica della particella P

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dot{z} & \dot{\varphi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_z\cdot\boldsymbol{u}_z & \boldsymbol{u}_z\cdot\boldsymbol{u}_\varphi \\ \boldsymbol{u}_z\cdot\boldsymbol{u}_\varphi & \boldsymbol{u}_\varphi\cdot\boldsymbol{u}_\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{4z^2}{\left(z^2+1\right)^4}\right)\dot{z}^{\,2} + \frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}\dot{\varphi}^{\,2}\right]. \end{aligned}$$

(b). Per stabilire se esitono o meno configurazioni di equilibrio bisogna analizzare l'energia potenziale efficace. Scriviamo dunque la funzione di Lagrange[1]

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{4z^2}{\left(z^2+1\right)^4}\right)\dot{z}^{\,2} + \frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}\dot{\varphi}^{\,2}\right] - z,$$

da cui emerge immediatamente che φ è coordinata ciclica

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}\dot{\varphi} = A_o = \text{costante},$$

cioè

$$\dot{\varphi} = A_o\left(z^2+1\right)^2.$$

Per determinarae V_{eff} passiamo dalla funzione Hamiltoniana

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= T + V = \frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{4z^2}{\left(z^2+1\right)^4}\right)\dot{z}^{\,2} + \frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}\dot{\varphi}^{\,2}\right] + z \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{4z^2}{\left(z^2+1\right)^4}\right)\dot{z}^{\,2} + \underbrace{\left(\frac{A_o^2}{2}\left(z^2+1\right)^2 + z\right)}_{V_{eff}}. \end{aligned}$$

[1] Si ricordi che consideriamo $m = g = 1$.

Quindi

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial z} = 2A_o^2\left(z^2+1\right)z+1\ .$$

Se $A_o = 0$, allora $\frac{\partial V_{eff}}{\partial z} = 1$, $\Longrightarrow$ non esistono configurazioni di equilibrio.
Se invece $A_o \neq 0$, le eventuali configurazioni di equilibrio sono date dalle soluzione di

$$\left(z^2+1\right)z = -\frac{1}{2A_o^2}\ . \tag{1}$$

Posto $f(z) = z^3+z$, è facile mostrare che $f(z\ )$è monotona crescente e che $\lim_{z\to\pm\infty} f(z) = \pm\infty$. Di conseguenza l'equazione (1) ammette una ed una sola soluzione, corrispondente ad un valore di z negativo. Quindi se $A_o \neq 0$, esiste un'unica configurazione di equilibrio.

Secondo esercizio

(a). Dobbiamo esprimere in funzione di x la quota, cioè la y, del centro di massa P_o. Posto

$$P_o - O = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y, \qquad A-O = x_A\boldsymbol{e}_x + y_A\boldsymbol{e}_y, \qquad B-O = x_B\boldsymbol{e}_x + y_B\boldsymbol{e}_y,$$

abbiamo

$$y_A = \frac{x_A^2}{2a}, \qquad y_B = \frac{x_B^2}{2a},$$

$$x = \frac{x_A+x_B}{2}, \quad \Longrightarrow \quad 4x^2 = x_A^2+x_B^2+2x_Ax_B \tag{2}$$

e

$$y = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{1}{4a}\left(x_A^2+x_B^2\right) = \frac{1}{4a}\left(4x^2-2x_Ax_B\right). \tag{3}$$

Dobbiamo quindi esprimere il prodotto x_Ax_B in termini di x. Per far ciò imponiamo il vincolo

$$\left(x_A-x_B\right)^2+\left(y_A-y_B\right)^2 = 4l^2.$$

Quest'ultimo si riscrive come

$$\left(x_A-x_B\right)^2+\frac{1}{4a^2}\left(x_A^2-x_B^2\right)^2 = 4l^2,$$

ovvero

$$\left(x_A-x_B\right)^2+\frac{1}{4a^2}\left(x_A-x_B\right)^2\underbrace{\left(x_A+x_B\right)^2}_{4x^2} = 4l^2,$$

che comporta

$$\left(x_A-x_B\right)^2\left[1+\frac{4x^2}{4a^2}\right] = 4l^2, \quad\Rightarrow\quad \left(x_A-x_B\right)^2 = \frac{4a^2l^2}{a^2+x^2}.$$

Abbiamo quindi

$$x_A^2+x_B^2-2x_Ax_B = \frac{4a^2l^2}{a^2+x^2}.$$

Ricordando la (2), cioè $x_A^2+x_B^2 = 4x^2-2x_Ax_B$, si ottiene

$$4x^2-4x_Ax_B = \frac{4a^2l^2}{a^2+x^2},$$

cioè

$$-2x_Ax_B = -2x^2+\frac{2a^2l^2}{a^2+x^2}.$$

A questo punto possiamo sostituire nella (3) ed ottenere la y del centro di massa in funzione della sua ascissa x

$$y = \frac{1}{4a}\left(4x^2 - 2x^2 + \frac{2a^2l^2}{a^2+x^2}\right) = \frac{1}{2a}\left(x^2 + \frac{a^2l^2}{a^2+x^2}\right). \tag{4}$$

L'energia potenziale dovuta al peso è dunque

$$V(x) = \frac{mg}{2a}\left(x^2 + \frac{a^2l^2}{a^2+x^2}\right).$$

Per determinare le cofigurazioni di equilibrio è necessario risolvere l'equazione $V'(x) = 0$, cioè

$$V'(x) = \frac{mg}{a}\left(1 - \frac{a^2l^2}{(a^2+x^2)^2}\right)x = 0.$$

Quindi $x = 0$ è sempre posizione di equilibrio. Le altre eventuali configurazioni corrispondono agli zeri di

$$1 - \frac{a^2l^2}{(a^2+x^2)^2} = 0.$$

Abbiamo

$$(a^2+x^2)^2 = a^2l^2, \qquad \Longrightarrow \qquad a^2 + x^2 = al,$$

e quindi

$$x^2 = al - a^2 = a(l-a).$$

Dunque, se $l > a$ esistono altre due configurazioni di equilibrio e queste sono

$$x = -\sqrt{a(l-a)}, \qquad \text{e} \qquad x = \sqrt{a(l-a)}.$$

(b). Trattandosi di un corpo rigido senza punti fissi, applichiamo la formula

$$T = \frac{m}{2}\dot{(P_o - O)}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m(2l)^2\right)\dot{\varphi}^2,$$

dove φ è l'angolo di rotazione dell'asta che definiamo come l'angolo che l'asta forma con la retta orizzontale passante per A. Dobbiamo quindi calcolare i due contributi. Cominciando dal primo si ha

$$\dot{(P_o - O)} = \dot{x}\boldsymbol{e}_x + \dot{y}\boldsymbol{e}_y = \dot{x}\left(\boldsymbol{e}_x + y'(x)\,\boldsymbol{e}_y\right),$$

e quindi

$$\dot{(P_o - O)}^2 = \dot{x}^2\left(1 + y'(x)^2\right).$$

Applichiamo la (4)

$$\dot{(P_o - O)}^2 = \dot{x}^2\left[1 + \frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{a^2l^2}{(a^2+x^2)^2}\right)^2\right].$$

Dobbiamo adesso esprimere φ in termini di x. Data la definizione di φ

$$\tan\varphi = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1}{2a}\frac{x_B^2 - x_A^2}{x_B - x_A} = \frac{1}{a}\underbrace{\left(\frac{x_A + x_B}{2}\right)}_{x},$$

per cui

$$\tan\varphi = \frac{x}{a}, \quad \Longrightarrow \quad \varphi(x) = \arctan\frac{x}{a}.$$

e di conseguenza

$$\dot{\varphi} = \varphi'(x)\,\dot{x} = \frac{\dot{x}}{a\left(\frac{x^2}{a^2}+1\right)} = \frac{a\dot{x}}{x^2+a^2}.$$

A questo punto siamo in grado di scrivere l'energia cinetica dell'asta

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2}\left[1+\frac{x^2}{a^2}\left(1-\frac{a^2l^2}{\left(a^2+x^2\right)^2}\right)^2\right]+\frac{ml^2}{6}\left(\frac{a}{x^2+a^2}\right)^2\dot{x}^2.$$