Secondo Compitino Sitemi Dinamici
23-05-2014

Primo esercizio

Sono date 5 lamine quadrate uguali. Ogni lamina è omogenea, ha massa m, e lato a. Riferendosi alla Figura 1 (A), sia $\{O, x, y, z\}$ un sistema di riferimento centrato in O, centro della lamina interna, in cui l'asse z è ortogonale al piano del foglio e gli assi x e y sono come in figura.

(*i*). Si dimostri che $\{O, x, y, z\}$ è una terna principale d'inezia e si calcoli $I_{zz}(O)$.

(*ii*). Si calcoli $I_{xx}(O)$, e $I_{yy}(O)$.

Viene poi dato un secondo s.d.r, $\{O, X, Y, z\}$, come in Figura 1 (B).

(*iii*). Si determini la matrice d'inerzia $\mathbb{I}(O)$, relativa al s.d.r. $\{O, X, Y, z\}$.

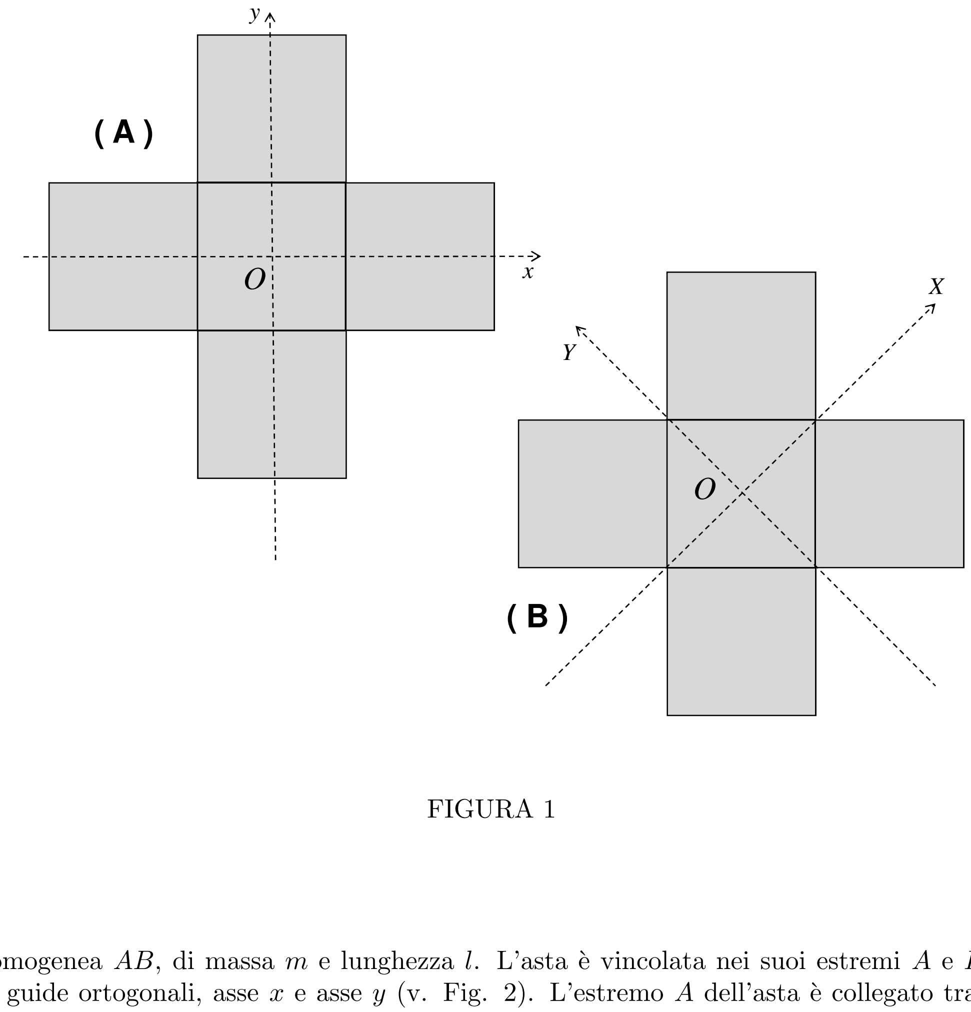


FIGURA 1

Secondo esercizio

E' data un'asta omogenea AB, di massa m e lunghezza l. L'asta è vincolata nei suoi estremi A e B a strisciare senza attrito lungo due guide ortogonali, asse x e asse y (v. Fig. 2). L'estremo A dell'asta è collegato tramite una molla, di massa e lunghezza a riposo trascurabili, al punto $C \equiv (0, l)$. L'asta è soggetta alla forza peso e la costante elastica della molla è k. Si consideri come parametro lagrangiano l'angolo θ, $-\pi < \theta \leq \pi$, che l'asta forma con la verticale e si consideri $\dfrac{mg}{k\ l} = 1$.

(*i*). Si determinino le posizioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.

(*ii*). Si scriva l'energia cinetica dell'asta.

(*iii*). Supponendo $k = 0$ (molla assente) e che sull'estremo B dell'asta sia applicata una forza orizzontale nota $\boldsymbol{F} = -F\boldsymbol{e}_x$, con $F > 0$, si determinino le eventuali posizioni di equilibrio.

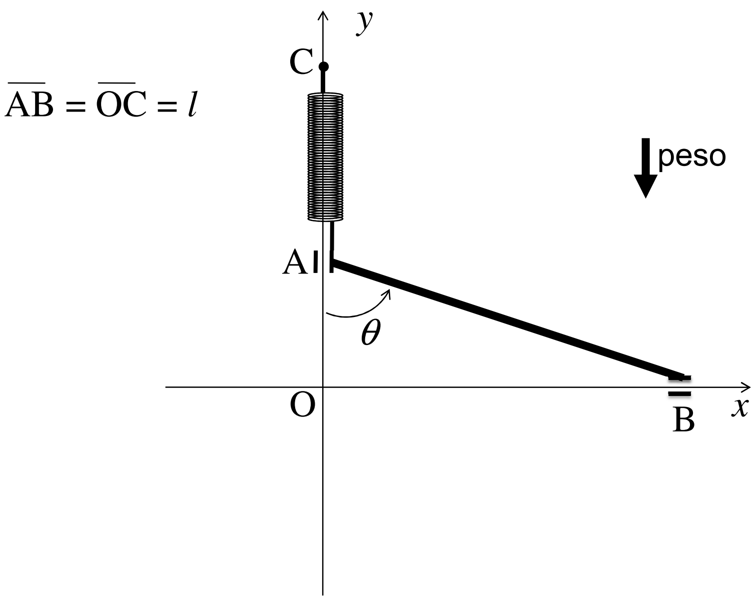


FIGURA 2

SVOLGIMENTO

Primo esercizio

(*i*) . Il sistema è piano e quindi l'asse z è asse principale d'inerzia. Gli assi x, e y sono assi principali d'inerzia perché ortogonali a piani di simmetria materiale.

Il momento d'inerzia rispetto all'asse z, della lamina il cui centro coincide con O, è dato da $\dfrac{ma^2}{6}$. Avremo perciò

$$I_{zz}(O) = \frac{ma^2}{6} + \begin{pmatrix} \textit{momenti d'inerzia rispetto ad } O \\ \textit{delle lamine laterali} \end{pmatrix}.$$

I momenti d'inerzia delle lamine laterali si calcolano applicando il teorema di Huygens, ovvero

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \textit{momenti d'inerzia rispetto ad } O \\ \textit{delle lamine laterali} \end{pmatrix} &= 4\left[\frac{ma^2}{6} + m\begin{pmatrix} \textit{distanza del } CM \textit{ della singola} \\ \textit{lamina da } O \end{pmatrix}^2\right] \\ &= 4\left[\frac{ma^2}{6} + ma^2\right] = \frac{14}{3}ma^2. \end{aligned}$$

Otteniamo così

$$I_{zz}(O) = \frac{29}{6}ma^2.$$

(*ii*) . Si nota che, per simmetria, $I_{xx}(O) = I_{yy}(O)$. Siccome $I_{xx}(O) + I_{yy}(O) = I_{zz}(O)$, avremo

$$I_{xx}(O) = I_{yy}(O) = \frac{I_{zz}(O)}{2} = \frac{29}{12}ma^2.$$

(*iii*) . Siccome $I_{xx}(O) = I_{yy}(O)$, una qualunque coppia di direzioni, tra loro ortogonali, nel piano ortogonale all'asse z costituiscono direzioni principali d'inerzia. Quindi, $I_{XX}(O) = I_{YY}(O) = I_{xx}(O) = I_{yy}(O)$,

$$\mathbb{I}_{\{O,X,Y,z\}}(O) = \frac{29}{12}ma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Secondo esercizio

(*i*) . Determiniamo per prima cosa le posizioni dei punti di maggio interesse

$$\begin{aligned} A - O &= l\cos\theta\, \boldsymbol{e}_y \ , \\ B - O &= l\sin\theta\, \boldsymbol{e}_x \ , \\ C - A &= (l - l\cos\theta)\, \boldsymbol{e}_y \ , \\ P_o - O &= \frac{l}{2}(\sin\theta\, \boldsymbol{e}_x + \cos\theta\, \boldsymbol{e}_y)\, , \end{aligned}$$

dove P_o indica il CM dell'asta AB.

Per quanto riguarda l'energia potenziale, abbiamo

$$\begin{aligned} V &= V_{molla} + V_{peso\ asta} \\ &= \frac{k}{2}|C - A|^2 + mg\frac{l}{2}\cos\theta \\ &= \frac{kl^2}{2}(1 - \cos\theta)^2 + mg\frac{l}{2}\cos\theta. \end{aligned}$$

Le posizione di equilibrio sono gli zeri di $\dfrac{dV}{d\theta}$, ovvero

$$\begin{aligned}\frac{dV}{d\theta} &= kl^2(1-\cos\theta)\sin\theta - \frac{mgl}{2}\sin\theta \\ &= kl^2\sin\theta\ [1-\cos\theta - \frac{1}{2}\underbrace{(\frac{mg}{kl})}_{1}\ ] \\ &= kl^2\sin\theta\left(\frac{1}{2}-\cos\theta\right) = 0.\end{aligned}$$

Quindi, per $\theta\in(-\pi,\pi)$, abbiamo le seguenti posizioni di equilibrio

$$\theta = 0, \quad \theta=\pm\pi, \quad \theta=\frac{\pi}{3}, \quad \theta=-\frac{\pi}{3}.$$

Per determinarne la stabilità calcoliamo la derivata seconda

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = kl^2\left[\cos\theta\left(\frac{1}{2}-\cos\theta\right)+\sin^2\theta\right],$$

ottenendo

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=0} &= -\frac{1}{2}kl^2<0, &&\text{equilibrio instabile,}\\ \left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=\pm\pi} &= -\frac{3}{2}kl^2<0, &&\text{equilibrio instabile,}\\ \left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta=\pm\frac{\pi}{3}} &= \frac{3}{4}kl^2>0, &&\text{equilibrio stabile.}\end{aligned}$$

(*ii*). Se con T denotiamo l'energia cinetica dell'asta, abbiamo

$$\begin{aligned}T &= \frac{m}{2}|\dot{P_o - O}|^2 + \frac{1}{2}I\,(P_o)\,\dot\theta^2 \\ &= \frac{m}{2}\frac{l^2}{4}\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot\theta^2 = \frac{ml^2}{6}\dot\theta^2.\end{aligned}$$

(*iii*). Facendo riferimento alla figura sottostante, indichiamo con $\boldsymbol{N}_A = N_A\boldsymbol{e}_x$, e $\boldsymbol{N}_B = N_B\boldsymbol{e}_y$, le reazioni vincolari (ortogonali ai vincoli) negli estremi A e B. Scriviamo la prima equazione cardinale

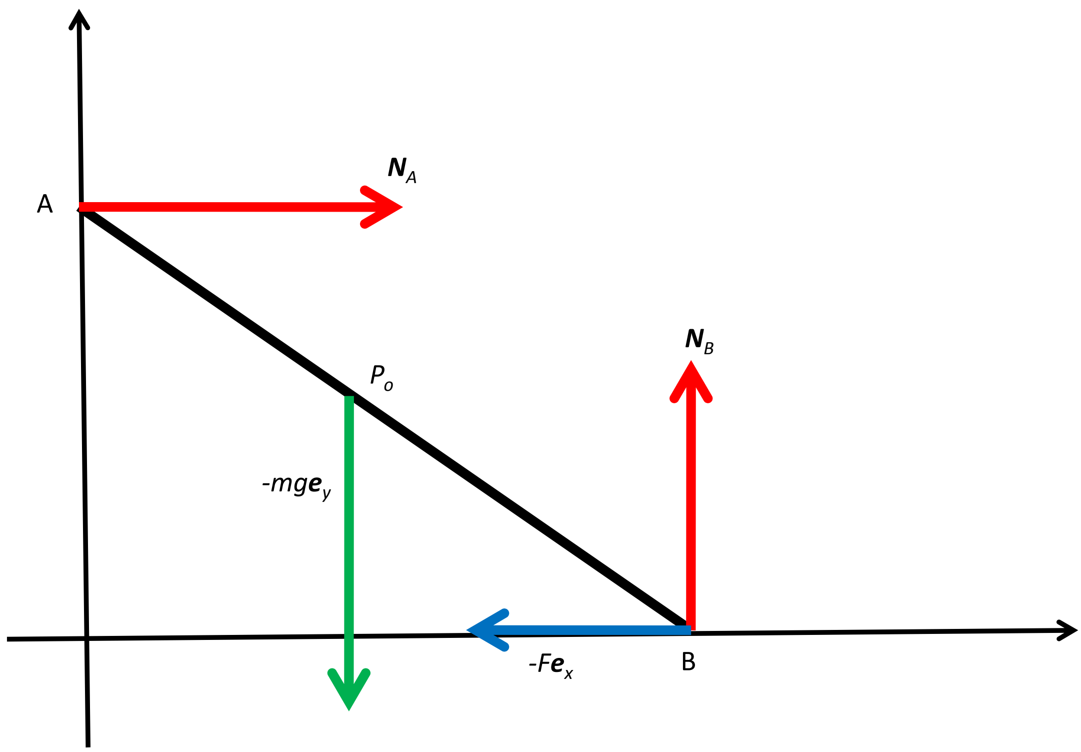
$$\boldsymbol{F}^{\ ext} = 0, \qquad \begin{cases} N_A - F = 0, \ \Rightarrow \quad N_A = F, \\ \\ N_B - mg = 0, \ \Rightarrow \quad N_B = mg.\end{cases}$$

Scriviamo poi la seconda equazione cardinale con centro di riduzione A,

$$(P_o - A)\wedge(-mg\boldsymbol{e}_y) + (B-A)\wedge(N_B\boldsymbol{e}_y - F\boldsymbol{e}_x) = 0,$$

ottenendo $-F\cos\theta + \dfrac{mg}{2}\sin\theta = 0$, da cui ricaviamo le posizioni di equilibrio

$$\tan\theta = \frac{2F}{mg}.$$



A
$\boldsymbol{N}_A$
P_o
$\boldsymbol{N}_B$
$-mg\boldsymbol{e}_y$
$-F\boldsymbol{e}_x$
B