Prova Scritta di Sistemi Dinamici
22 - 06 - 2015

Primo esercizio

Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi senza attrito su una guida rettilinea r, ortogonale al vettore $(O - \Omega)$, di lunghezza R (v. figura A). Il vettore $(O - \Omega)$ ruota sul piano con veloctà angolare costante ω attorna al punto Ω, così da trascinare la guida r. Sia $S : \{O, x, y\}$, il SdR solidale con r, e $\Sigma : \{\Omega, \xi, \eta\}$ quello fisso.

(*a*) . Esprimere il vettore posizione $(P - \Omega)$ sia rispetto al SdR Σ, che rispetto al SdR S.

(*b*) . Determinare: (i) la velocità relativa $\boldsymbol{v}_R$, di P esprimendola sia rispetto a Σ che rispetto ad S; (ii) la velocità assoluta $\boldsymbol{v}_A$ esprimendola soltanto rispetto al SdR Σ.

(*c*) . Supponendo che il punto materiale sia collegato ad O da una molla di costante elastica k, avente massa e lunghezza a riposo trascurabili, si scriva l'equazione di moto di P e si dica per quali valori di k la velocità relativa $\boldsymbol{v}_R$ è costante rispetto al SdR S.

Secondo esercizio

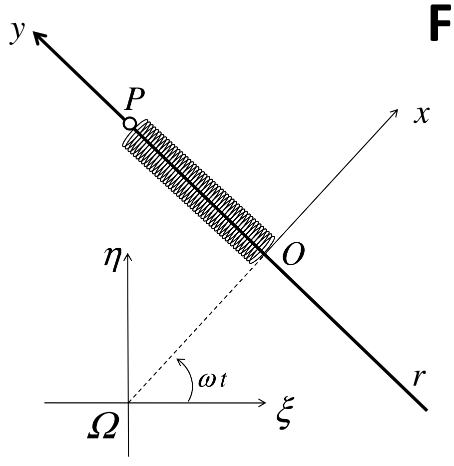
E' data una sbarretta AB di lunghezza R e massa m, il cui estremo A è vincolato a scorrere sulla semicirconferenza di centro O e raggio R, mentre l'altro estremo è vincolato a scorrere sull'asse x, mantenendosi sempre a destra di A, come mostrato nella figura B. Il punto B è poi collegato tramite una molla di lunghezza a riposo e massa trascurabili, al punto $C \equiv (R, 0)$. Si prenda come parametro lagrangiano l'angolo θ, $\theta \in (0,\ \pi)$, che AB forma con la verticale. La forza peso è diretta come in figura e tutti gli attriti sono trascurabili.

(*a*) . Dimostrare che esiste una sola configurazione di equilibrio e che questa è stabile.

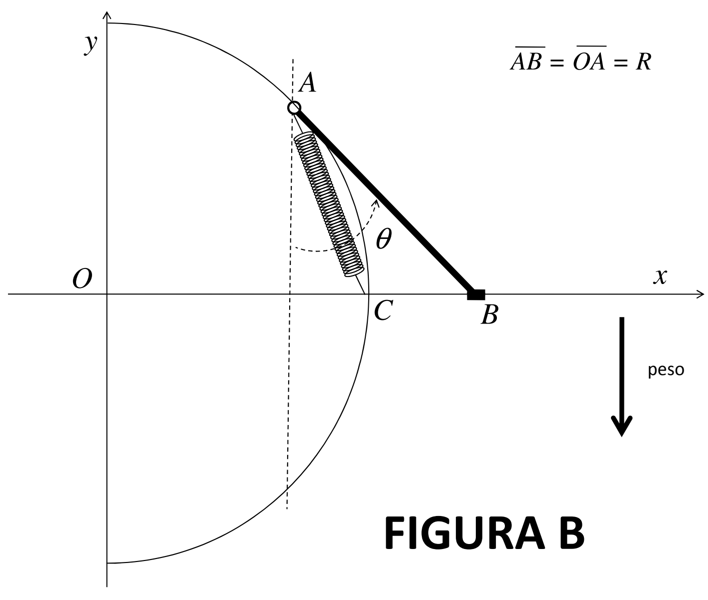
(*b*) . Si calcoli la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.

(*c*) . Supponendo di rimuovere la molla si determini la forza vertical $\boldsymbol{F} = F\boldsymbol{e}_y$, che deve essere applicata in A affinché si abbia equilibrio in ogni configurazione θ.

FIGURA A



$\overline{O\Omega} = R$



$\overline{AB} = \overline{OA} = R$

FIGURA B

SVOLGIMENTO

Primo esercizio

(a) . Cominciamo con l'osservare

$$P - \Omega = (O - \Omega) + (P - O)$$

dove, riferendoci al SdR S, $(P - O) = y\boldsymbol{j}$, mentre nel SdR Σ,

$$(O - \Omega) = R\cos\omega t\boldsymbol{e}_\xi + R\sin\omega t\boldsymbol{e}_\eta \ . \tag{1}$$

Quindi, lavorando in Σ, abbiamo

$$(P-\Omega)_\Sigma = \underbrace{\begin{pmatrix} R\cos\omega t \\ R\sin\omega t \end{pmatrix}}_{(O-\Omega)_\Sigma} + \underbrace{\mathbb{A}\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}}_{(O-\Omega)_\Sigma},$$

dove $\mathbb{A}$, è la matrice di rotazione

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}.$$

L'espressione del vettore $P - \Omega$, rispetto al SdR Σ è

$$(P-\Omega)_\Sigma = (R\cos\omega t - y\sin\omega t)\,\boldsymbol{e}_\xi + (R\sin\omega t + y\cos\omega t)\,\boldsymbol{e}_\eta \ . \tag{2}$$

Per esprimere il vettore $(P - \Omega)$, nel SdR S, si osserva che

$$\underbrace{(\Omega - O)}_{-R\boldsymbol{i}} + (P - \Omega) = \underbrace{(P - O)}_{y\boldsymbol{j}}$$

da cui

$$(P-\Omega)_S = R\ \boldsymbol{i} + y\ \boldsymbol{j}\ .$$

Alternativamente avremmo potuto applicare $\mathbb{A}^{\mathrm{T}}$ alla (2), cioè

$$(P-\Omega)_S = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R\cos t\omega - y\sin t\omega \\ R\sin t\omega + y\cos t\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ y \end{pmatrix}$$

(b). Cominciamo con la velocità relativa $\boldsymbol{v}_R$, che è data da $\boldsymbol{v}_R = \dot{(P - O)}$. Per cui

$$(\boldsymbol{v}_R)_S = \dot{y}\ \boldsymbol{j}, \tag{3}$$

mentre

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}_R)_\Sigma &= \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \dot{y} \end{pmatrix} \\ &= -\dot{y}\sin\omega t\ \boldsymbol{e}_\xi + \ \dot{y}\cos\omega t\ \boldsymbol{e}_\eta \ .\end{aligned} \tag{4}$$

Per quanto riguarda la velocità assoluta $\boldsymbol{v}_A$ di P, abbiamo

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega}\wedge(P - O) + \boldsymbol{v}_R \ .$$

Dalla (1) abbiamo

$$\boldsymbol{v}_O = \dot{(O - \Omega)} = -\omega R\sin\omega t\boldsymbol{e}_\xi + \omega R\cos\omega t\boldsymbol{e}_\eta \ .$$

Per calcolare $\boldsymbol{\omega}\wedge(P-O)$, dobbiamo esprimere $(P-O)$ nel SdR Σ, e cioè

$$\begin{aligned}(P-O)_\Sigma &= \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \\ &= -y\sin\omega t\ \boldsymbol{e}_\xi + y\cos\omega t\ \boldsymbol{e}_\eta \ ,\end{aligned}$$

ed esprimere $\boldsymbol{\omega}$ rispetto al SdR Σ, cioè $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{e}_\zeta$. Abbiamo

$$\boldsymbol{\omega}\wedge(P-O) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\xi & \boldsymbol{e}_\eta & \boldsymbol{e}_\zeta \\ 0 & 0 & \omega \\ -y\sin\omega t & y\cos\omega t & 0 \end{vmatrix} = -y\omega\cos\omega t\ \boldsymbol{e}_\xi - y\omega\sin\omega t\ \boldsymbol{e}_\eta \ .$$

Quindi, riprendendo la (4), si ha

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_A &= \left[-\left(R\omega+\dot{y}\right)\sin\omega t - y\omega\cos\omega t\right]\boldsymbol{e}_\xi + \\ &\quad \left[\left(R\omega+\dot{y}\right)\cos\omega t - y\omega\sin\omega t\right]\boldsymbol{e}_\eta \ .\end{aligned}$$

Evidentemente avremmo ottenuto lo stesso risultato derivando rispetto al tempo la (2).

(c). Determiniamo la funzione di Lagrange del punto materiale P

$$\mathcal{L} = T - V_{el} \ ,$$

dove

$$V_{el} = \frac{k}{2}(P-O)^2 = \frac{k}{2}y^2 \ ,$$

e

$$T = \frac{m}{2}\boldsymbol{v}_A^2 = \frac{m}{2}\left[y^2\omega^2 + \left(R\omega+\dot{y}\right)^2\right] .$$

Abbiamo dunque

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left[y^2\omega^2 + \left(R\omega+\dot{y}\right)^2\right] - \frac{k}{2}y^2 \ .$$

Scrivendo l'equazione di Lagrange $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}\right) - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} = 0$, si ottiene

$$m\ddot{y} - \left(m\omega^2 - k\right)y = 0 \ .$$

Quindi se $k=m\omega^2$, abbiamo $\ddot{y}\ = 0, \Longrightarrow\ \dot{y}\ = costante$. Ma allora, ricordando la (3), abbiamo che, rispetto al SdR S, la velocità relativa del punto materiale P è costante.

Secondo esercizio

(a). Cominciamo col determinare le posizioni dei punti d'interesse del sistema

$$(A-O) = R\sin\theta\boldsymbol{e}_x + R\cos\theta\boldsymbol{e}_y,$$

$$(C-O) = R\boldsymbol{e}_x \ ,$$

$$(A-C) = (A-O)-(C-O) = (R\sin\theta - R)\,\boldsymbol{e}_x + R\cos\theta\boldsymbol{e}_y \ .$$

Inoltre, s P_o è il CM della sbarretta, abbiamo

$$(P_o - A) = \frac{R}{2}\sin\theta\boldsymbol{e}_x - \frac{R}{2}\cos\theta\boldsymbol{e}_y \ ,$$

per cui

$$(P_o - O) = (A - O) + (P_o - A) = \frac{3}{2} R \sin\theta \boldsymbol{e}_x + \frac{R}{2} \cos\theta \boldsymbol{e}_y \ . \tag{5}$$

L'energia potenziale totale è

$$\begin{aligned} V &= V_{molla} + V_{peso} \\ &= \frac{k}{2} |A - C|^2 + mg\frac{R}{2} \cos\theta \\ &= kR^2 (1 - \sin\theta) + mg\frac{R}{2} \cos\theta, \end{aligned}$$

Le posizioni di equilibrio si determinano risolvendo $\frac{dV}{d\theta}$, cioè

$$V'(\theta) = -kR^2 \cos\theta - \frac{mgR}{2} \sin\theta. \tag{6}$$

Accertato che $\theta = \pi/2$ non è soluzione di $V'(\theta) = 0$, abbiamo

$$V'(\theta) = -\frac{mgR}{2} \cos\theta \left[\frac{2kR}{mg} + \tan\theta\right] = 0,$$

le cui soluzioni, posto $\beta = \frac{2kR}{mg}$, sono

$$\tan\theta = -\beta, \quad \Longrightarrow \quad \theta = \theta_\beta, \quad \text{con} \quad \theta_\beta = \arctan(-\beta), \quad \frac{\pi}{2} < \theta_\beta < \pi.$$

Per quanto riguarda la stabilità, analizziamo il segno di

$$V''(\theta) = \frac{mgR}{2} \left[(\beta + \tan\theta) \sin\theta - \cos\theta \left(\tan^2\theta + 1\right)\right],$$

per cui

$$V''(\theta_\beta) = \frac{mgR}{2} \left[-\cos\theta_\beta \left(\beta^2 + 1\right)\right] > 0,$$

dal momento che $\frac{\pi}{2} < \theta_\beta < \pi$. Concludiamo quindi che esiste una sola una configurazione di equilibrio stabile.

(b). Applicando la formula classica abbiamo

$$\omega^2 = \frac{V''(\theta_\beta)}{a_o(\theta_\beta)} = \frac{mgR}{2a_o(\theta_\beta)} \left[-\cos\theta_\beta \left(\beta^2 + 1\right)\right],$$

dove

$$T = \frac{1}{2} a_o(\theta) \dot{\theta}^2$$

Se $I(P_o) = \frac{1}{12} mR^2$, è il momento d'inerzia della sbarretta rispetto al suo CM, l'energia cinetica è data da

$$T = \frac{m}{2} \left|(P_o \dot{-} O)\right|^2 + \frac{1}{2} I(P_o) \dot{\theta}^2.$$

Sfruttando la (5)

$$(P_o \dot{-} O) = R\dot{\theta} \left(\frac{3}{2} \cos\theta \boldsymbol{e}_x - \frac{1}{2} \sin\theta \boldsymbol{e}_y\right),$$

per cui

$$\left|(\dot{P_o - O})\right|^2 = R^2\dot{\theta}^2\Big(\underbrace{\frac{9}{4}}_{2+\frac{1}{4}}\cos^2\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta\Big)$$
$$= R^2\dot{\theta}^2\left(2\cos^2\theta + \frac{1}{4}\right).$$

In conclusione

$$T = \frac{m}{2}R^2\dot{\theta}^2\left(2\cos^2\theta + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}mR^2\right)\dot{\theta}^2$$
$$= \frac{1}{2}\underbrace{\left[mR^2\left(2\cos^2\theta + \frac{1}{3}\right)\right]}_{a_o(\theta)}\dot{\theta}^2,$$

e quindi

$$\omega^2 = \frac{g}{R}\frac{\left[-\cos\theta_\beta\left(\beta^2+1\right)\right]}{4\cos^2\theta_\beta + \dfrac{2}{3}}.$$

(c) . All'equilibrio la seguente equazione deve essere soddisfatta

$$-\frac{dV_{peso}}{d\theta} + \boldsymbol{F}\cdot\delta\left(A - O\right) = 0,$$

dove $\delta\left(A-O\right)$ è lo spostamento virtuale del punto A, cioè

$$\delta\left(A - O\right) = R\cos\theta\boldsymbol{e}_x - R\sin\theta\boldsymbol{e}_y .$$

Siccome $\boldsymbol{F}\cdot\delta\left(A-O\right) = -FR\sin\theta$, ricordando la (6) abbiamo

$$-FR\sin\theta + \frac{mgR}{2}\sin\theta = 0, \quad \Rightarrow \quad R\sin\theta\left(\frac{mg}{2} - F\right) = 0.$$

Quindi, avremo equilibrio $\forall\ \theta \in (0,\pi)$, se $F = \dfrac{mg}{2}$.