Prova Scritta di Sistemi Dinamici
25 - 09 - 2017

Primo esercizio

E' data una particella materiale P di massa $m = 1$, vincolato su un cono liscio di equazione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. P è soggetta alla forza centrale del tipo

$$\boldsymbol{F} = -\frac{2a}{|P-O|^4}(P-O) + \frac{b}{\sqrt{2}}\frac{(P-O)}{|P-O|} \ ,$$

dove a e b sono costanti.

(a). Si scriva l'energia potenziale efficace V_{eff}.

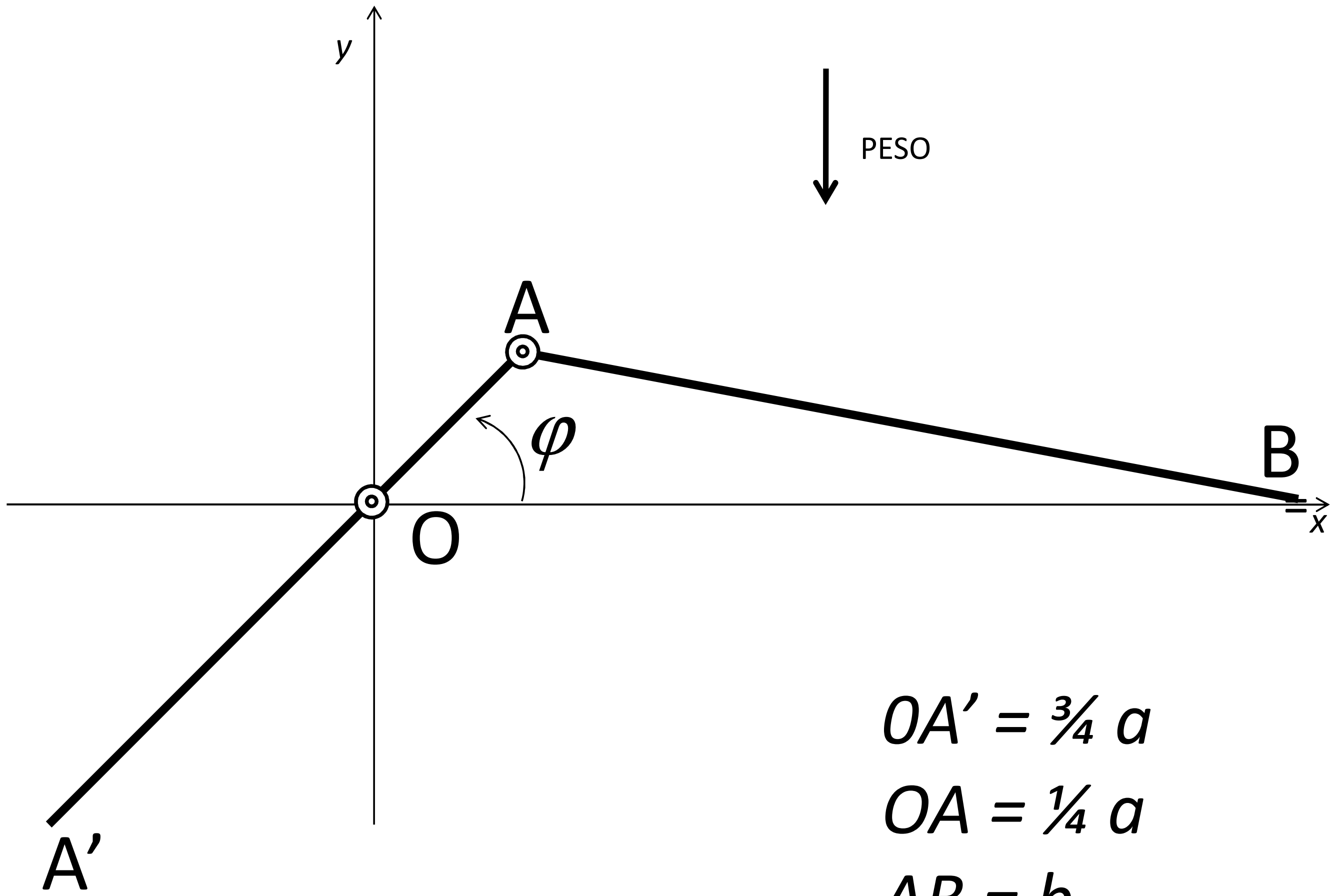
(b). Supponendo $a = b = 1$ e che all'istante iniziale $|P - O| = r_o$, dire per quali valori della velocità iniziale P esite un'orbita circolare.

Secondo esercizio

E' dato il manovellismo rappresentato in figura. L'asta $A'A$ è lunga a ed è incernierata nel punto O e la lunghezza della porzione OA' è $3/4a$. L'asta AB è lunga $b > a$, ed il suo estremo B può scorrere senza attrito lungo l'asse x. Le masse delle aste sono uguali e pari a m. Si consideri come variabile lagrangiana l'angolo φ, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, indicato in figura. Tutti i vincoli sono lisci ed il peso è come in figura.

(a). Determinare le configurazioni di equilibrio e la loro stabilità.

(b). Calcolare l'energia cinetica del sistema.



$0A' = \frac{3}{4}\, a$

$OA = \frac{1}{4}\, a$

$AB = b$

SVOLGIMENTO

Primo esercizio

(a). Per prima cosa è necessario determinare l'energia potenziale V associata alla forza $\boldsymbol{F}$. Se consideriamo il punto materiale libero ed un sistema di coordinate sferiche in cui $\boldsymbol{\kappa}_r$ è il versore radiale abbiamo

$$\boldsymbol{F} = -\frac{2a}{\rho^3}\boldsymbol{\kappa}_r + \frac{b}{\sqrt{2}}\boldsymbol{\kappa}_r \ ,$$

essendo $\rho = |P - O|$ e $(P - O) = \rho\boldsymbol{\kappa}_r$. Dobbiamo, lavorando in coordinate sferiche, determinare una funzione $V(\rho)$ tale che

$$\nabla V = -\boldsymbol{F} = \frac{2a}{\rho^3}\boldsymbol{\kappa}_r - \frac{b}{\sqrt{2}}\boldsymbol{\kappa}_r \ .$$

Siccome in coordinate sferiche

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\boldsymbol{\kappa}_r + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta}\boldsymbol{\kappa}_\theta + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\boldsymbol{\kappa}_\varphi,$$

dal confronto si deduce immediatamente $V = V(\rho)$ e

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{2a}{\rho^3} - \frac{b}{\sqrt{2}}, \quad \Rightarrow \quad V(\rho) = -\frac{a}{\rho^2} - \frac{b}{\sqrt{2}}\rho.$$

Se esprimiamo adesso il cono in termini dell'usuale parametrizzazione

$$\begin{cases} x = r\cos\phi, \\ y = r\sin\phi, \qquad \phi \in (0, 2\pi], \quad r > 0, \\ z = r, \end{cases}$$

abbiamo

$$|P - O| = \rho = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2},$$

per cui

$$\hat{V}(r) = -\frac{a}{2r^2} - br.$$

Passando all'energia cinetica abbiamo

$$T = \frac{1}{2}\left(2\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right),$$

per cui la funzione di Lagrange è

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(2\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right)\underbrace{+\frac{a}{2r^2} + br}_{-\hat{V}(r)} \ .$$

Al solito la variabile ϕ è ciclica per cui

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = A_o, \quad \Rightarrow \quad r^2\dot{\phi} = A_o, \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{A_o}{r^2}.$$

Per determinare V_{eff} conviene passare dall'Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \dot{r}^2 + \frac{r^2}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{a}{2r^2} - br,$$

per cui

$$\mathcal{H} = \dot{r}^2 + \frac{r^2}{2}\left(\frac{A_o}{r^2}\right)^2 - \frac{a}{2r^2} - br,$$

e dunque

$$V_{eff}(r) = \frac{A_o^2}{2r^2} - \frac{a}{2r^2} - br = \frac{1}{2r^2}\left(A_o^2 - a\right) - br.$$

(b) . Considerando $a = b = 1$, si ha

$$V_{eff}(r) = \frac{A_o^2}{2r^2} - \frac{a}{2r^2} - br = -\frac{1}{2r^2}\left(1 - A_o^2\right) - r,$$

$$V'_{eff}(r) = \frac{1}{r^3}\left(1 - A_o^2\right) - 1.$$

Quindi $V'_{eff}(r) = 0$ produrrà una ed una sola soluzione accettabile soltanto se $A_o^2 < 1$, ovvero se $\dot{\phi}^2(0)\, r^4 < 1$, cioè

$$\left|\dot{\phi}(0)\right| < \frac{1}{r^2}. \tag{1}$$

Osserviamo tuttavia che la (1) è una condizione necessaria per l'esistenza di orbite circolari ma non è sufficiente. Infatti,

$$\frac{1}{r^3}\left(1 - A_o^2\right) = 1, \quad \Rightarrow \quad r^3 = 1 - A_o^2, \quad \Leftrightarrow \quad A_o^2 = 1 - r^3,$$

da cui deriviamo la seguente condizione di compatibilità: si possono avere orbite circolari soltanto se il loro raggio r è minore di 1. Quindi se la particella si muove su un'orbita circolare di raggio[1] $r(0)$ (con $r(0) < 1$) $\dot{\phi}(0)$ deve necessariamente soddisfare la seguente relazione

$$\dot{\phi}^2(0)\, r^4(0) = 1 - r^3(0),$$

cioè

$$\dot{\phi}(0) = \pm\frac{\sqrt{1 - r^3(0)}}{r^2(0)},$$

che banalmente soddisfa la condizione (1). Se dunque vogliamo che la particella percorra un'orbita circolare di raggio $r(0) < 1$, deve essere

$$\dot{r}(0) = 0, \qquad \dot{\phi}(0) = \pm\frac{\sqrt{1 - r^3(0)}}{r^2(0)}.$$

Secondo esercizio

(a) . Indichiamo con P_A il centro di massa dell'asta AA' e con P_B quello dell'asta AB. Sia inoltre θ l'angolo (positivo per rotazioni antiorarie) che l'asta AB forma con l'asse x. Valgono le seguenti relazioni geometriche e cinematiche

$$\sin(-\theta) = \mu \sin\varphi, \quad \Rightarrow \quad -\cos\theta\dot{\theta} = \mu\cos\varphi\dot{\varphi},$$

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2\varphi}\ ,$$

dove

$$\mu = \frac{a/4}{b}.$$

[1] Ovviamente $r(0) = r_o/\sqrt{2}$

Abbiamo quindi

$$P_A - O = \frac{a}{4}\left(-\cos\varphi \boldsymbol{e}_x - \sin\varphi \boldsymbol{e}_y\right),$$

$$P_B - O = \left(\frac{a}{4}\cos\varphi + \frac{b}{2}\sqrt{1-\mu^2\sin^2\varphi}\right)\boldsymbol{e}_x + \frac{a}{8}\sin\varphi \boldsymbol{e}_y\ .$$

L'energia potenziale è soltanto quella dovuta alla forza peso, cioè

$$\begin{aligned} V &= mgy_{P_A} + mgy_{P_B} = mg\left(-\frac{a}{4}\sin\varphi + \frac{a}{8}\sin\varphi\right) \\ &= -mg\frac{a}{8}\sin\varphi. \end{aligned}$$

Le configurazioni di equilibrio si ottengono facilmente risolvendo

$$V'(\varphi) = 0, \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = 0, \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Per quel che riguarda la stabilità si ha

$$\boldsymbol{V}''(\varphi) = mg\frac{a}{8}\sin\varphi,$$

per cui

$$V''(\pi/2) = mg\frac{a}{8}, \quad \Rightarrow \quad \text{eq. stabile},$$

$$V''(-\pi/2) = -mg\frac{a}{8}, \quad \Rightarrow \quad \text{eq. instabile}.$$

La configurazione di equilibrio stabile corrisponde a quella in cui il punto P_A si trova sull'asse y al di sotto di O.

(b). L'energia cinetica totale T è data dalla somma dell'energia cinetica dell'asta AA', cioè $T_{AA'}$, e di quella dell'asta AB, cioè T_{AB}. Abbiamo dunque

$$T_{AA'} = \frac{1}{2}I_O\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{12}a^2 + m\left(\frac{a}{4}\right)^2\right)\dot{\varphi}^2 = \frac{7}{96}ma^2\dot{\varphi}^2.$$

L'asta AB non ha punti fissi per cui

$$\begin{aligned} T_{AB} &= \frac{m}{2}\left(P_B \dot{-} O\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mb^2}{12}\right)\dot{\theta}^2, \\ &= \frac{m}{2}\left(P_B \dot{-} O\right)^2 + \frac{mb^2\mu^2}{24}\frac{\cos^2\varphi}{1-\mu^2\sin^2\varphi}\dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \left(P_B \dot{-} O\right) &= \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{a}{4}\cos\varphi + \frac{b}{2}\cos\theta\right)\boldsymbol{e}_x + \frac{a}{8}\sin\varphi \boldsymbol{e}_y\right] \\ &= -\left(\frac{a}{4}\sin\varphi\dot{\varphi} + \frac{b}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}\right)\boldsymbol{e}_x + \frac{a}{8}\cos\varphi\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_y \\ &= \left[-\left(\frac{a}{4}\sin\varphi - \frac{b}{2}\mu\sin\theta\,\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\right)\boldsymbol{e}_x + \frac{a}{8}\cos\varphi \boldsymbol{e}_y\right]\dot{\varphi} \\ &= \left[-\left(\frac{a}{4}\sin\varphi + \frac{b}{2}\frac{\mu^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-\mu^2\sin^2\varphi}}\right)\boldsymbol{e}_x + \frac{a}{8}\cos\varphi \boldsymbol{e}_y\right]\dot{\varphi}\ . \end{aligned}$$

Quindi

$$\left(P_B \dot{-} O\right)^2 = \left[\left(\frac{a}{4}\sin\varphi + \frac{b}{2}\frac{\mu^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-\mu^2\sin^2\varphi}}\right)^2 + \left(\frac{a}{8}\cos\varphi\right)^2\right]\dot{\varphi}^2,$$

da cui, "assemblando" i vari termini, si determina l'espressione per l'energia cinetica totale.