Primo Compitino Sistemi Dinamici
27 - 02 - 2017

Primo esercizio

E' data una particella di massa $m = 1$ vincolata a muoversi sull'asse x e soggetta soltanto alla forza

$$\boldsymbol{F} = \frac{-4x^3}{\left(1 + x^4\right)^2}\boldsymbol{e}_x.$$

(*a*) . Determinare l'energia potenziale $V(x)$, scrivere la Lagrangiana ed individuare le eventuali configurazioni di equilibrio discutendone la stabilità.

(*b*) . Si traccino, al variare dell'energia meccanica E, le orbite sul piano delle fasi.

(*c*) . Determinare E affinché il moto sia periodico e si inverta in $x = \pm 1/\sqrt{2}$.

Secondo esercizio

Una particella di massa $m = 1$, è vincolata a muoversi sulla superficie liscia ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la funzione

$$x = e^{-z^2}$$

La particella è soggetta soltanto alla forza peso che è diretta nel verso opposto dell'asse z, e, per semplicità, si ponga $g = 1$.

(*a*) . Scrivere la funzione di Lagrange della particella.

(*b*) . Determinare l'energia potenziale efficace e dire, motivando la risposta, se possono esistere orbite circolari.

(*c*) . Date le condizioni iniziali $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = \sqrt{2}$, determinare le quote z_m e z_M per cui $z_m \leq z(t) \leq z_M$, $\forall\ t$.

SVOLGIMENTO

Primo esercizio

(a) . L'energia potenziale $V(x)$ è tale che

$$\frac{dV(x)}{dx} = -\left(\frac{-4x^3}{(1+x^4)^2}\right) = \frac{4x^3}{(1+x^4)^2}.$$

Di conseguenza

$$V(x) = -\frac{1}{1+x^4}.$$

Siccome il punto materiale è vincolato sulla retta

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{x}\boldsymbol{e}_x, \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{\dot{x}^2}{2}.$$

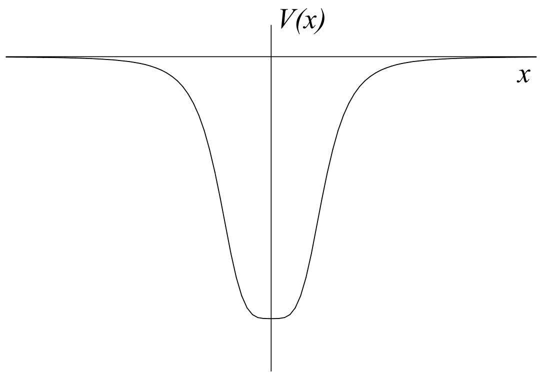
La funzione di Lagrange è dunque

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{1+x^4}.$$

Per determinare la posizioni di equilibrio applichiamo il criterio di Dirichlet, ovvero ricerchiamo i massimo/minimi dell'energia potenziale $V(x)$. Abbiamo

$$V'(x) = 0, \quad \Longrightarrow \quad \frac{4x^3}{(1+x^4)^2} = 0, \quad x = 0, \quad \text{p.to di equilibrio.}$$

Il punto di equilibrio risulta stabile perché è un minimo per $V(x)$. Infatti $V'(x) < 0$ per $x < 0$ e $V'(x) > 0$ per $x > 0$. Il grafico di $V(x)$ è riportato nella seguente figura.

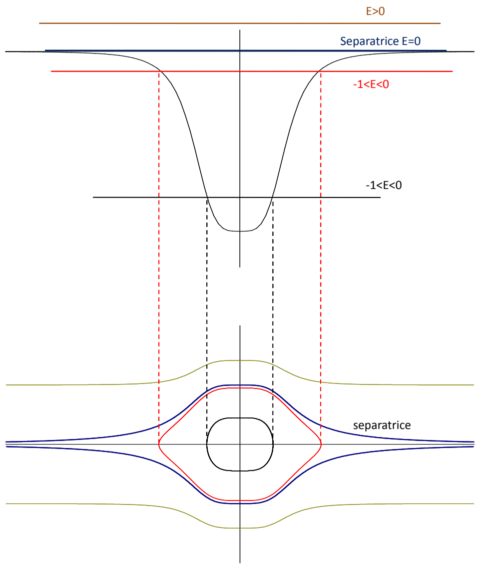


(b) . La funzione $V(x)$ è pari ed inoltre

$$-1 \leq V(x) < 0,$$

essendo, come già detto, $x = 0$ un punto di mimimo. In particolare $V(0) = -1$. Abbiamo dunque

$$E = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{1}{1+x^4}.$$



Per quel che rigiarda il piano delle fasi, per $-1 < E < 0$, abbiamo orbite limitate, $E = -1$, corrisponde al punto di equilibrio stabile, $E = 0$ è la separatrice, mentre per $E > 0$ si hanno orbite illimitate corrispondenti ad $x(t)$ monotone. Nella sovrastante figura è schematicamente riportato l'andamento delle orbite nel piano delle fasi.

(c) . Se $x(t)$ è periodica E deve essere compresa fra -1 e 0. In corrispondenza dei punti d'inversione, le cui ascisse sono $-1/\sqrt{2}$ e $1/\sqrt{2}$, $\dot{x}$ si annulla e dunque

$$V\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = E.$$

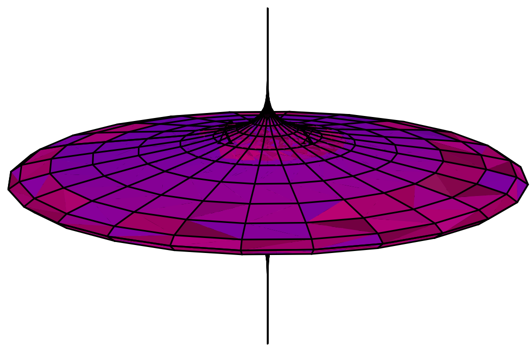
Abbiamo quindi

$$E = -\frac{1}{1+\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4} = -\frac{4}{5}.$$

Secondo esercizio

(a). La superficie di rotazione (rappresentata nella sottostante figura) può essere così parametrizzata

$$\begin{cases} x(z,\varphi) = e^{-z^2}\cos\varphi, \\ y(r,\varphi) = e^{-z^2}\sin\varphi, & \varphi \in [0, 2\pi)\,. \\ z \in \mathbb{R}, \end{cases}$$



Quindi i parametri lagrangiani sono z e φ. La base locale del piano tangente è data da

$$\boldsymbol{u}_z = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial z} = -2ze^{-z^2}\cos\varphi\boldsymbol{e}_x + -2ze^{-z^2}\sin\varphi\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z \ ,$$

$$\boldsymbol{u}_\varphi = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \varphi} = e^{-z^2}\sin\varphi\boldsymbol{e}_x + e^{-z^2}\cos\varphi\boldsymbol{e}_y \ .$$

La velocità della particella, espressa rispetto alla base locale del piano tangente, è

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{z}\boldsymbol{u}_z + \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_\varphi \ ,$$

mentre l'energia cinetica è

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dot{z} & \dot{\varphi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_z\cdot\boldsymbol{u}_z & \boldsymbol{u}_z\cdot\boldsymbol{u}_\varphi \\ \boldsymbol{u}_z\cdot\boldsymbol{u}_\varphi & \boldsymbol{u}_\varphi\cdot\boldsymbol{u}_\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(1+4z^2e^{-2z^2}\right)\dot{z}^2 + e^{-2z^2}\dot{\varphi}^2\right]. \end{aligned}$$

L'energia potenziale dovuta alla forza peso è[1] $V = z$, per cui la funzione di Lagrange è

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}\left[\left(1 + 4z^2 e^{-2z^2}\right)\dot{z}^2 + e^{-2z^2}\dot{\varphi}^2\right] - z$$

(b). E' evidente che φ è variabile ciclica. Di conseguenza

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = A_o ,$$

dove A_o è una costante. Abbiamo dunque

$$e^{-2z^2}\dot{\varphi} = A_o , \quad \Longrightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{A_o}{e^{-2z^2}} = A_o e^{2z^2} . \tag{1}$$

Per determinare l'energia potenziale efficace sfruttiamo la funzione di Hamilton $\mathcal{H} = T + V$, cioè

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left(1 + 4z^2 e^{-2z^2}\right)\dot{z}^2 + \frac{1}{2}e^{-2z^2}\underbrace{\left(\dot{\varphi}\right)^2}_{\left(A_o e^{2z^2}\right)^2} + z. \tag{2}$$

Si ottiene quindi

$$V_{eff}(z) = \frac{A_o^2}{2}e^{2z^2} + z . \tag{3}$$

Le orbite circolari, ovvero moti che avvengono sui parlleli della superficie, si hanno in corrispondenza dei massimi/minimi di $V_{eff}(z)$. Si suppone innanzitutto che $A_o \neq 0$ e si osserva che

$$V'_{eff}(z) = 2A_o^2 z e^{2z^2} + 1.$$

Quindi $V'_{eff}(z) = 0$ se la seguente equazione algebrica

$$2A_o^2 z e^{2z^2} = -1 \tag{4}$$

ammette soluzioni. Ora, posto $f(z) = 2A_o^2 z e^{2z^2}$, è facile mostrare che la funzione è dispari e che $\lim_{z\to\infty} f(z) = +\infty$. Inoltre

$$f'(z) = 2A_o^2\left(1 + 4z^2\right)e^{2z^2} > 0, \qquad \forall z \in \mathbb{R}.$$

L'equazione (4) ammette una ed una sola soluzione. Dunque esiste una ed una sola orbita circolare e questa avviene in corrispondenza di un valore z negativo.

Nel caso in cui $A_o = 0$, allora $V_{eff}(z)$ coincide con l'energia potenziale dovuta alla forza peso, cioè $V_{eff}(r) = z$, ed evidentemente non si avranno orbite circolari.

(c). Ricordando lo (1) abbiamo

$$\dot{\varphi}(0) = A_o e^{2z(0)^2}, \qquad \Longrightarrow \qquad A_o = \sqrt{2}.$$

Sfruttiamo la (2) per calcolare l'energia meccanica

$$E = \frac{1}{2}\left(1 + 4z(0)^2 e^{-2z(0)^2}\right)\left(\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0}\right)^2 + \frac{1}{2}e^{-2z(0)^2}\left(\left.\frac{d\varphi}{dt}\right|_{t=0}\right)^2 + z(0) = 1.$$

Per determinare gli estremi z_m e z_M fra cui è limitata $z(t)$ è necessario risolvere $V_{eff}(z) = 1$, dove $V_{eff}(z)$, data dalla (3), si calcola con $A_o = \sqrt{2}$. Abbiamo così

$$V_{eff}(z) = e^{2z^2} + z = 1. \tag{5}$$

[1] Si ricordi che $m = 1$ e $g = 1$.

Una soluzione di (5) è $z = 0$, e l'altra si determina per via grafica. Abbiamo $\lim_{z\to\pm\infty} V_{eff}(z) = +\infty$. Per quanto detto al precedente punto (b),

$$V'_{eff}(z) = 2ze^{2z^2} + \ 1 = 0,$$

ammette una ed una sola soluzione in corrispondenza di $\bar{z} < 0$. Siccome poi

$$V''_{eff}(z) = \left(2 + 4z^2\right) e^{2z^2} > 0, \quad \forall \ z,$$

abbiamo che $\bar{z}$ è punto di minimo. In particolare, $V_{eff}(z)$ è crescente per $z > \bar{z}$. Dunque

$$V_{eff}(\bar{z}) < V_{eff}(0) = 1.$$

In conclusione, mentre $z_M = 0$, la seconda soluzione di (5), cioè z_m, si trova a sinistra di $\bar{z}$, come mostrato nel sottostante grafico.