Secondo Compitino Sistemi Dinamici
06 - 05 - 2019

Primo esercizio

Tre sbarrette di ugual massa M ed ugual lunghezza L sono saldate fra loro come mostrato in figura 1. Si consideri un SdR cartesiano ortogobale $\{O, x, y, z\}$ centrato in O, punto di mezzo della sbarretta AC, il cui asse x è allineato parallamente alle sbarrette AB e CD, l'asse y è allineato lungo la sbarretta AC e l'asse z è ortogonale al piano delle tre sbarrette.

(a). Dimostrare che il SdR $\{O, x, y, z\}$ di figura 1 non è terna principale d'inerzia.

(b). Determinare la matrice d'inerzia rispetto al SdR $\{O, x, y, z\}$ e determinare l'angolo di cui ruotare gli assi x, y affinché la nuova terna sia principale d'inerzia.

(c). Si aggiunga al sistema delle tre sbarrette un punto materiale le cui coordinate nel SdR $\{O, x, y, z\}$ sono $(-L, L/2, 0)$. Determinare la massa m di tale punto materiale affinché la terna$\{O, x, y, z\}$ sia principale d'inerzia e calcolare la matrice d'inerzia del sistema composto dalle tre sbarrette e dal punto materiale.

Secondo esercizio

Un disco omogeneo di massa m e raggio R, è vincolato a rotolare senza strisciare sull'asse x. Una sbarretta OA di lunghezza $L > 2R$ e massa m è incernierata nel punto O che sta sull'asse x ed è vincolata a passare per una guida grevole incernierata sul centro C del disco. Il centro C è poi collegato da una molla di rigidezza k e lunghezza a riposo e massa trascurabili al punto $B \equiv (0, R)$ (v. figura 2). Si consideri come variabile lagrangiana l'angolo di rotolamento φ, con $\varphi > 0$ per rotazioni antiorarie. La misura di φ si fa prendendo come configurazione di riferimento quella in cui la sbarretta è verticale. Tutti i vincoli sono lisci ed il peso è come in figura 2.

(a). Determinare la relazione che lega θ, angolo che la sbarretta OA forma con l'asse x, all'angolo di rotolamento φ.

(b). Determinare, lavorando con la variabile lagrangina φ, le configurazioni di equilibrio al variare del parametro $\alpha = \dfrac{kR^2}{mLg}$.

(c). Dimostrare che se $\alpha = 1$, la configurazione in cui la sbarretta OA è verticale è configurazione di equilibrio stabile e calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni.

FIGURA 1

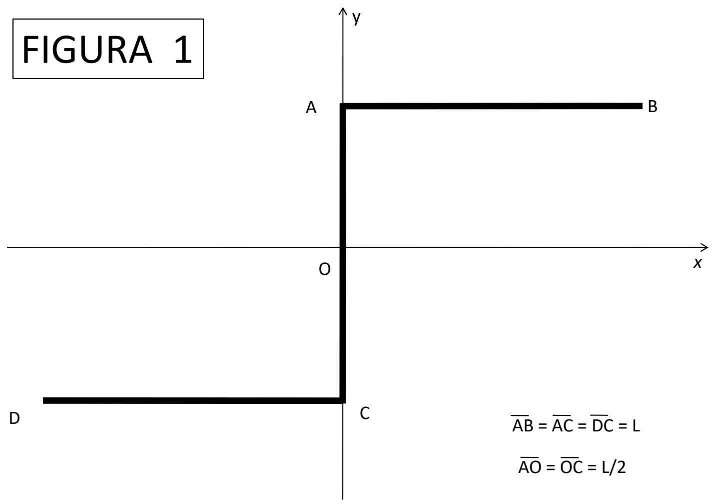
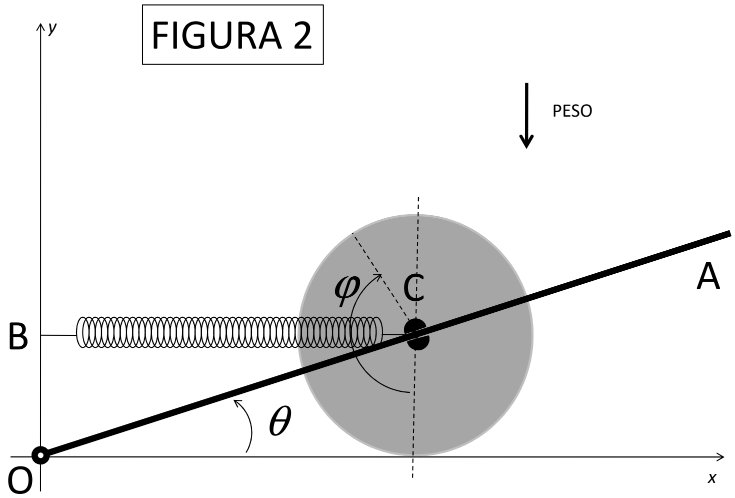


FIGURA 2



SVOLGIMENTO

Primo esercizio

(a). L'asse z è principale d'inerzia (poiché il sistema è piano) ma gli assi x e y non lo sono. Infatti se consideriamo il momento $I_{xy}(O)$ abbiamo

$$I_{xy}(O) = I_{xy}^{AB}(O) + \underbrace{I_{xy}^{AC}(O)}_{=0} + I_{xy}^{CD}(O) = -\sum_{i \in CD} m_i x_i y_i - \sum_{i \in AB} m_i x_i y_i.$$

Ora le particelle che costituiscono l'asta CD appartengono al terzo, per cui $x_i y_i > 0$, mentre quelle dell'asta AB appartengono al primo quadrante ed ancora $x_i y_i > 0$. Di conseguenza $\sum_{i \in AB} m_i x_i y_i$ e $\sum_{i \in CD} m_i x_i y_i$ sono entrambe positive e quindi $I_{xy}(O) < 0$. Ne consegue che il SdR $\{O, x, y, z\}$ non è pricipale d'inerzia.

(b). Calcoliamo la matrice d'inerzia rispetto al SdR $\{O, x, y, z\}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} I_{xx}(O) &= I_{xx}^{AC}(O) + I_{xx}^{AB}(O) + I_{xx}^{DC}(O) \\ &= \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = ML^2\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{7}{12}ML^2. \end{aligned}$$

Il momento rispetto all'asse y è

$$\begin{aligned} I_{yy}(O) &= \underbrace{I_{yy}^{AC}(O)}_{=0} + I_{yy}^{AB}(O) + I_{yy}^{DC}(O) \\ &= 2\left[\frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2\right] = \frac{2}{3}ML^2 \end{aligned}$$

Infine, essendo il sistema piano,

$$\begin{aligned} I_{zz}(O) &= I_{xx}(O) + I_{yy}(O) = ML^2\left[\frac{1}{12} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right] \\ &= \frac{15}{12}ML^2 = \frac{5}{4}ML^2. \end{aligned}$$

Calcoliamo adesso il momento deviatore sapendo che la densità lineare di massa è $\lambda = M/L$

$$\begin{aligned} I_{xy}(O) &= I_{xy}^{AB}(O) + \underbrace{I_{xy}^{AC}(O)}_{=0} + I_{xy}^{CD}(O) \\ &= -\frac{L}{2}\int_0^L x\lambda dx - \left(-\frac{L}{2}\right)\int_{-L}^0 x\lambda dx \\ &= -\frac{2L^3\lambda}{4} = -\frac{ML^2}{2} \end{aligned}$$

La matrice d'inerzia rispetto al SdR $\{O,x,y,z\}$ è dunque

$$
\begin{aligned}
\mathbb{I}_{\{x,y,z\}}(O) &= ML^2 \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \qquad (1) \\
&= .\frac{ML^2}{12} \begin{pmatrix} 7 & -6 & 0 \\ -6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Consideriamo adesso un SdR cartesiano ortogonale $\{O,X,Y,z\}$ centrato in O in cui gli assi asse X,Y sono ruotati rispetto agli assi x,y di un angolo θ. Considerando solo le sottomatrici 2×2 relative agli assi del piano abbiamo

$$
\mathbb{I}_{\{X,Y\}}(O) = \mathbb{A}^T \, \mathbb{I}_{\{x,y\}}(O) \, \mathbb{A},
$$

dove $\mathbb{A}$ è

$$
\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.
$$

Quindi il SdR ruotate, ovvero il SdR $\{O,X,Y,z\}$, sarà principale d'inerzia se

$$
\tan 2\theta = -\frac{2I_{xy}(O)}{I_{yy}(O) - I_{xx}(O)} = \frac{12}{8-7}.
$$

L'angolo di cui ruotare gli assi è dunque

$$
\theta = \frac{\arctan 12}{2} \approx 0.74 \;\; rad.
$$

(c) . Sfruttando l'additività dei momenti d'inerzia si ha

$$
\mathbb{I}_{\{x,y,z\}}(O) = \mathbb{I}^{sbarrette}_{\{x,y,z\}}(O) + \mathbb{I}^{p.to\ materiale}_{\{x,y,z\}}(O). \qquad (2)
$$

La matrice $\mathbb{I}^{sbarrette}_{\{x,y,z\}}(O)$ si è già determinata. Calcoliamo $\mathbb{I}^{p.to\ materiale}_{\{x,y,z\}}(O)$ sapendo che le coordinate del punto sono $(-L, L/2, 0)$. Posto m la massa (incognita al momento) del punto materiale si ha

$$
\begin{aligned}
\mathbb{I}^{p.to\ materiale}_{\{x,y,z\}}(O) &= \begin{pmatrix} m\left(\frac{L}{2}\right)^2 & m\frac{L^2}{2} & 0 \\ m\frac{L^2}{2} & mL^2 & 0 \\ 0 & 0 & m\left[L^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right] \end{pmatrix} \qquad (3) \\
&= mL^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Sommando fra loro (1) e (3) si ha

$$
I_{xy}(O) = I^{sbarrette}_{xy}(O) + I^{p.to\ materiale}_{xy}(O) = -\frac{ML^2}{2} + \frac{mL^2}{2}.
$$

Imponendo $I_{xy}(O) = 0$ si ottiene $M = m$. Infine, per quel che riguarda la matrice d'inerzia dell'intero sistema avremo

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_{\{x,y,z\}}(O) &= ML^2 \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix} + ML^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \\
&= ML^2 \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Secondo esercizio

(a). Si comincia col determinare le componenti, rispetto al SdR $\{O, x, y\}$, dei vettori posizione dei principali punti coinvolti nell'esercizio. Avremo

$$\begin{aligned} C - O &= -R\varphi \boldsymbol{e}_x + R\boldsymbol{e}_y, \\ C - B &= -R\varphi \boldsymbol{e}_x \\ P_o - O &= \frac{L}{2}\cos\theta \boldsymbol{e}_x + \frac{L}{2}\sin\theta \boldsymbol{e}_y, \end{aligned}$$

dove P_o è il CM della sbarretta OA. Se adesso poniamo $i = \|C - O\| = R\sqrt{1+\varphi^2}$, abbiamo

$$C - O = i\cos\theta \boldsymbol{e}_x + i\sin\theta \boldsymbol{e}_y,$$

da cui otteniamo la relazione cercata

$$\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}, \\ \\ \cos\theta = -\dfrac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \tan\theta = -\frac{1}{\varphi}. \tag{4}$$

(b). L'energia potenziale è

$$\begin{aligned} V &= mg\frac{L}{2}\sin\theta + \frac{k}{2}\|C - B\|^2 \\ &= mg\frac{L}{2}\sin\theta + \frac{kR^2}{2}\varphi^2 \\ &= mg\frac{L}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \frac{kR^2}{2}\varphi^2 \\ &= \frac{mgL}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \frac{KR^2}{mgL}\varphi^2\right) \\ &= \frac{mgL}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \alpha\varphi^2\right), \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che $\frac{KR^2}{mgL} = \alpha$. Per determinare le configurazioni di equilibrio si devono individuare le soluzioni di $V'(\varphi) = 0$. Quindi, a parte il fattore $\frac{mgL}{2}$, abbiamomR

$$V'(\varphi) = 2\alpha\varphi - \varphi\left(1+\varphi^2\right)^{-3/2} = 0,$$

cioè

$$\varphi = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2},$$

e poi

$$2\alpha\left(1+\varphi^2\right)^{3/2} = 1, \quad \Rightarrow \quad \varphi^2 = \frac{1}{(2\alpha)^{2/3}} - 1.$$

Quindi se

$$\frac{1}{(2\alpha)^{2/3}} > 1, \quad \Longrightarrow \quad (2\alpha)^{2/3} < 1, \quad \Longrightarrow \quad \alpha < \frac{1}{2}$$

allora si hanno altre due posizioni di equilibrio, cioè

$$\varphi = \pm\sqrt{\frac{1}{(2\alpha)^{2/3}} - 1}.$$

(c) . La configurazione in cui la sbarretta è verticale corrisponde a $\varphi = 0$. In questo caso, se $\alpha = 1$, abbiamo

$$V'(\varphi) = \frac{mgL}{2}\left[2\varphi - \varphi\left(1+\varphi^2\right)^{-3/2}\right],$$

per cui

$$V''(\varphi) = \frac{mgL}{2}\left[2 - \left(1+\varphi^2\right)^{-3/2} + 3\varphi^2\left(1+\varphi^2\right)^{-5/2}\right],$$

e quindi

$$V''(0) = \frac{mgL}{2}(2-1) = \frac{mgL}{2}.$$

Abbiamo quindi provato che $\varphi = 0$ (ovvero la configurazione in cui la sbarretta OA è verticale) è stabile.

Calcoliamo adesso l'energia cinetica

$$T = T_{OA} + T_{disco} = \frac{1}{2}I_{OA}(O)\,\dot{\theta}^2 + T_{disco}.$$

Applicando il teorema di Hygens otteniamo

$$I_{OA}(O) = \frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}mL^2,$$

e quindi

$$T_{OA} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}mL^2\right)\dot{\theta}^2. \tag{5}$$

Derivando rispetto al tempo la (4)

$$\frac{\dot{\theta}}{\cos^2\theta} = \frac{\dot{\varphi}}{\varphi^2}, \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{\dot{\varphi}}{\varphi^2}\frac{\varphi^2}{(1+\varphi^2)} = \frac{\dot{\varphi}}{1+\varphi^2},$$

si ha

$$T_{OA} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\frac{mL^2}{(1+\varphi^2)^2}\right]\dot{\varphi}^2.$$

Per quel che riguarda T_{disco} si ha

$$\begin{aligned} T_{disco} &= \frac{1}{2}m\left\|\frac{d(C-O)}{dt}\right\|^2 + \frac{1}{2}I(C)\,\dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{1}{2}\left[mR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{mR^2}{2}\dot{\varphi}^2\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}mR^2\right)\dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

L'energia cinetica totale è dunque

$$T = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\frac{mL^2}{(1+\varphi^2)^2} + \frac{3}{2}mR^2\right]\dot{\varphi}^2,$$

per cui la frequenza (o meglio la pulsazione) in corrispondenza di $\varphi = 0$ (ovvero $\theta = \pi/2$) è

$$\omega^2 = \frac{V''(0)}{\left[\frac{1}{3}\frac{mL^2}{(1+\varphi^2)^2} + \frac{3}{2}mR^2\right]_{\varphi=0}} = \frac{mgL}{2\left[\frac{mL^2}{3} + \frac{3}{2}mR^2\right]} = \frac{g}{\frac{2L}{3} + 3\frac{R^2}{L}}.$$