Primo Compitino Sistemi Dinamici
29 - 02 - 2016

Primo esercizio

E' data una particella di massa $m = 1$ vincolata a muoversi sull'asse x e soggetta soltanto ad una forza la cui energia potenziale è

$$V(x) = \frac{e^{-x}}{\frac{1}{2} + x^2}.$$

(*a*). Si stabilisca per quali valori dell'energia meccanica E si possono avere moti $x(t)$ limitati.

(*b*). Si traccino, al variare dell'energia meccanica E, le orbite le piano delle fasi.

(*c*). Considerando le condizioni iniziali $x(0) = -4$, e $\dot{x}(0) = 0$, si determini la velocità $\dot{x}(t)$ per $t \to +\infty$.

Secondo esercizio

Una particella di massa $m = 1$, è vincolata a muoversi sulla superficie liscia ottenuta facendo ruotare attorno all'asse z la funzione $z = \ln x$. La particella è soggetta soltanto alla forza peso che è diretta nel verso opposto dell'asse z, e, per semplicità, si ponga $g = 1$.

(*a*). Si individui la base locale del piano tangente e si esprima la velocità della particella rispetto a tale base.

(*b*). Scrivere la funzione di Lagrange della particella, determinare l'energia potenziale efficace e tracciarne approssimativamente il grafico.

(*c*). Si dica come deve essere scelta la velocità iniziale affinche' la particella percorra un'orbita circolare di raggio $r = 1$.

SVOLGIMENTO

Primo esercizio

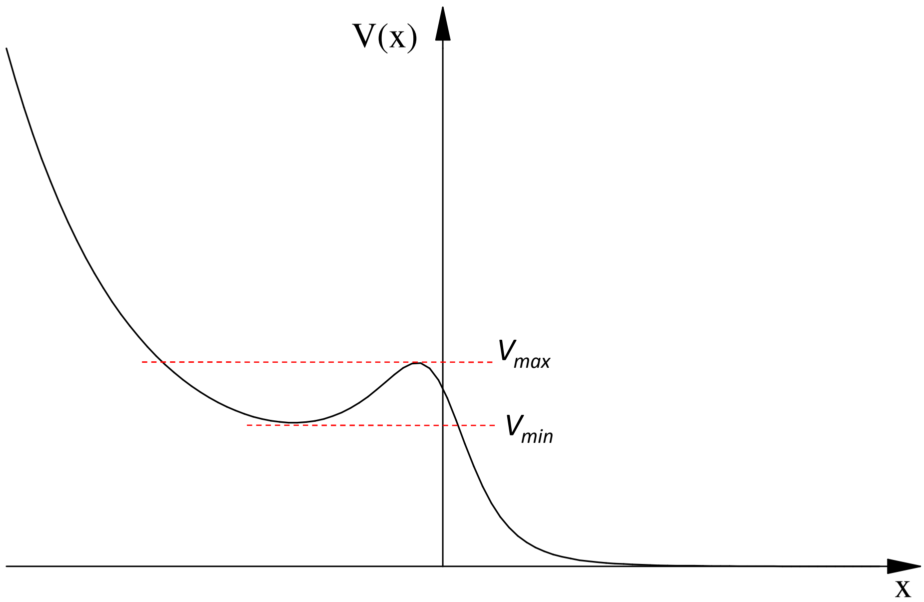
(a) . Per rispondere alla domanda è necessario tracciare il grafico di $V(x)$. Si nota subito che la funzione $V(x)$ è definita $\forall\, x \in \mathbb{R}$, e che $V(x) > 0$, $\forall\, x$. Inoltre $\lim_{x\to-\infty} V(x) = +\infty$, mentre $\lim_{x\to+\infty} V(x) = 0$. Facendo la derivata otteniamo

$$V'(x) = \frac{-e^{-x}\left(\frac{1}{2}+x^2\right) - 2xe^{-x}}{\left(\frac{1}{2}+x^2\right)^2} = \left(-e^{-x}\right)\frac{2x^2+4x+1}{2\left(\frac{1}{2}+x^2\right)^2}.$$

Quindi $V'(x) \geq 0$, per $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$, dove

$$x_{\min} = \frac{-2-\sqrt{2}}{2} \approx -1.7, \qquad x_{\max} = \frac{-2+\sqrt{2}}{2} \approx -0.3\ .$$

Il grafico di $V(x)$ è riportato nella seguente figura



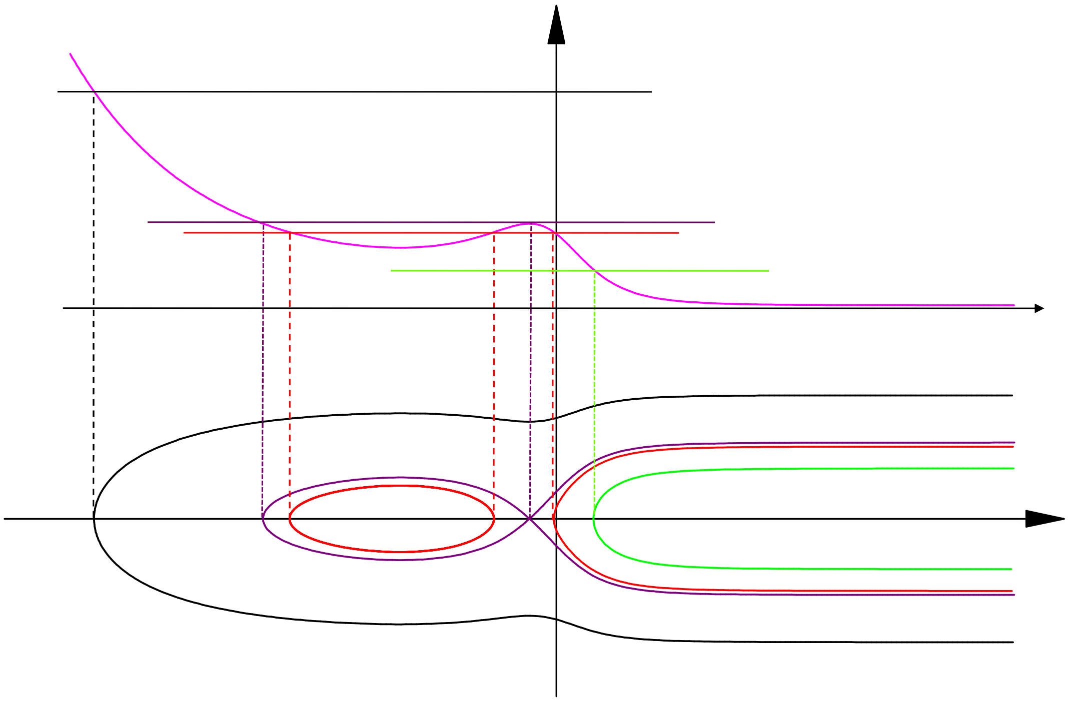
Quindi, ponendo

$$V_{\min} = V(x_{\min}) = \frac{e^{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}}{\frac{1}{2}+\left(\frac{-2-\sqrt{2}}{2}\right)^2} \approx 1.6,$$

$$V_{\max} = V(x_{\max}) = \frac{e^{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}}{\frac{1}{2}+\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right)^2} \approx 2.3,$$

dall'analisi del grafico deduciamo che possiamo avere orbite limitate soltanto se $V_{\min} \leq E \leq V_{\max}$.

(b) . Nella sovrastante figura è schematicamente riportato l'andamento delle orbite nel piano delle fasi. Notiamo subito l'energia meccanica E deve essere positiva. Per $E > V_{\max}$ si hanno orbirte illimitate, per $V_{\min} \leq E < V_{\max}$, si hanno sia orbite limitate che illimitate. $E = V_{\max}$, corrisponde alla separatrice, mentre se $0 < E < V_{\min}$ abbiamo orbite illimitate.



(c) . In base alla conservazione dell'energia abbiamo

$$V(x) + \frac{1}{2}\dot{x}^2 = E, \tag{1}$$

dove

$$E = \underbrace{V(x(0))}_{V(-4)} + \underbrace{\frac{1}{2}\dot{x}^2(0)}_{0} = \frac{2e^4}{33} \approx 3.3\ .$$

E' facile mostrare che $E > V_{\max}$, e, di conseguenza, la soluzione $x(t)$ è illimitata, cioè per $t \to \infty$, si ha $x(t) \to +\infty$. Siccome $V(x) \to 0$ quando $x \to +\infty$, sfruttando la (1), abbiamo che

$$\lim_{t\to+\infty}\left(V(x) + \frac{1}{2}\dot{x}^2\right) = \underbrace{\lim_{t\to+\infty} V(x)}_{=0} + \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\dot{x}^2 = E = \frac{2e^4}{33},$$

e quindi $\lim_{t\to+\infty}\dot{x} = \sqrt{\frac{4e^4}{33}} \approx 2.6$.

Secondo esercizio

(a) . La superficie di rotazione (rappresentata nella sottostante figura) può essere così parametrizzata

$$\begin{cases} x(r,\varphi) = r\cos\varphi, \\ y(r,\varphi) = r\sin\varphi, \qquad r\in(0,+\infty)\,, \quad \varphi\in[0,2\pi)\,. \\ z(r,\varphi) = \ln r, \end{cases}$$

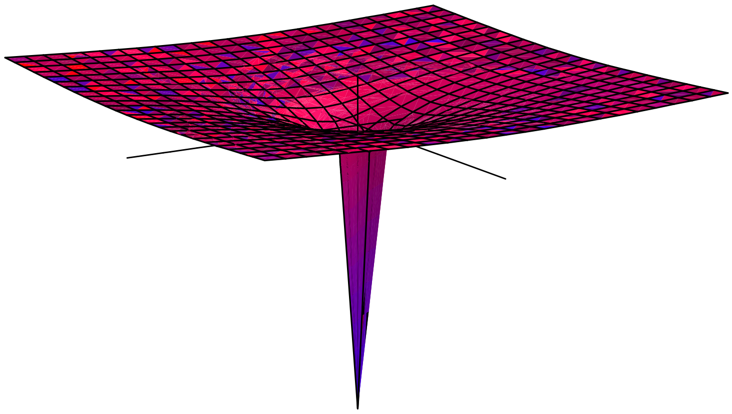
Quindi i parametri lagrangiani sono r e φ. La base locale del piano tangente è data da

$$\boldsymbol{u}_r = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial r} = \cos\varphi\boldsymbol{e}_x + \sin\varphi\boldsymbol{e}_y + \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_z \ ,$$

$$\boldsymbol{u}_\varphi = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\boldsymbol{e}_x + r\cos\varphi\boldsymbol{e}_y \ .$$

La velocità della particella, espressa rispetto alla base locale del piano tangente, è

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{r}\boldsymbol{u}_r + \dot{\varphi}\boldsymbol{u}_\varphi \quad . \tag{2}$$



(b) . La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - \hat{V}_{peso}$, dove[1] $\hat{V}_{peso} = z(r,\varphi) = \ln r$. Per quanto riguarda l'energia cinetica

[1]Si ricordi che $mg = 1$.

abbiamo

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dot{r} & \dot{\varphi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_r\cdot\boldsymbol{u}_r & \boldsymbol{u}_r\cdot\boldsymbol{u}_\varphi \\ \boldsymbol{u}_r\cdot\boldsymbol{u}_\varphi & \boldsymbol{u}_\varphi\cdot\boldsymbol{u}_\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dot{r} & \dot{\varphi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\dfrac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{1}{r^2}\right)\dot{r}^{\,2}+r^2\dot{\varphi}^{\,2}\right]. \end{aligned}$$

Quindi

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{1}{r^2}\right)\dot{r}^{\,2}+r^2\dot{\varphi}^{\,2}\right]-\ln r\ .$$

E' facile mostrare che φ è variabile ciclica. Di conseguenza

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}=A_o\ ,$$

dove A_o è una costante. Abbiamo dunque

$$r^2\dot{\varphi}\ =A_o\ ,\quad\Longrightarrow\quad\dot{\varphi}\ =\frac{A_o}{r^2}\ . \tag{3}$$

Per determinare l'energia potenziale efficace sfruttiamo la funzione di Hamilton $\mathcal{H}=T+V$, cioè

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{r^2}\right)\dot{r}^{\,2}+\frac{1}{2}r^2\underbrace{\left(\dot{\varphi}\right)^2}_{\frac{A_o^2}{r^4}}+\ \ln r\ .$$

Si ottiene quindi

$$V_{eff}\left(r\right)=\frac{A_o^2}{2}\frac{1}{r^2}+\ \ln r\ .$$

Per disegnare approssimativamente il grafico di $V_{eff}\left(r\right)$ si suppone innanzitutto che $A_o\neq 0$. Si osserva poi che $\lim_{r\to0^+}V_{eff}\left(r\right)=+\infty$, e che $\lim_{r\to\infty}V_{eff}\left(r\right)=+\infty$. Inoltre

$$V'_{eff}\left(r\right)=-A_o^2\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r}=\frac{r^2-A_o^2}{r^3}\ .$$

Quindi $V_{eff}\left(r\right)$ presenta un minimo in $r=r_{\min}$, dove $r_{\min}=|A_o|$. Il grafico di $V_{eff}\left(r\right)$ è riportato nell'ultima figura.

Nel caso in cui $A_o=0$, allora $V_{eff}\left(r\right)$ coincide con l'energia potenziale dovuta alla forza peso, cioè $V_{eff}\left(r\right)=\ln r$.

(c). Se la particella percorre un'orbita circolare di raggio 1 allora $r\left(t\right)=1$, $\forall\ t$, e quindi $\dot{r}\left(t\right)=0$. Ciò potrà accadere se il minimo dell'energia potenziale efficace cade in corrispondenza di $r=1$, cioè se

$$r_{\min}=1,\quad\Longrightarrow\quad|A_o|=1,\quad\Longrightarrow\quad A_o=\pm1.$$

Sfruttando la (2) si ha

$$\dot{\boldsymbol{x}}\left(t\right)\ =\underbrace{\dot{r}\left(t\right)}_{=0}\boldsymbol{u}_r+\dot{\varphi}\left(t\right)\boldsymbol{u}_\varphi=\dot{\varphi}\left(t\right)\boldsymbol{u}_\varphi,$$

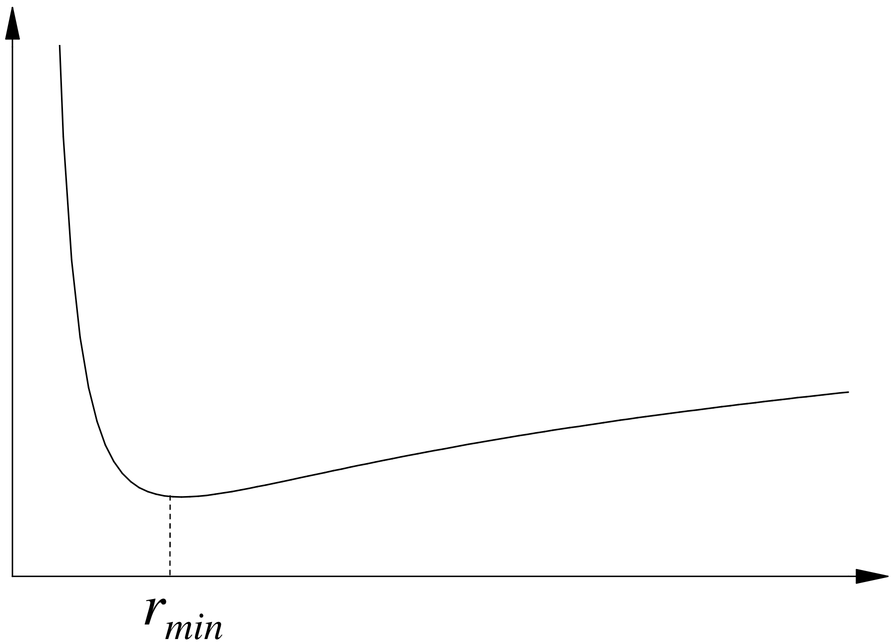
ovvero, sfruttando la (3)

$$\dot{\boldsymbol{x}}\left(t\right)=A_o\boldsymbol{u}_\varphi=\pm\boldsymbol{u}_\varphi,\quad\forall\ \ t\ .$$

La velocità iniziale della particella deve essere quindi

$$\dot{\boldsymbol{x}}\left(0\right)=\pm\boldsymbol{u}_\varphi,$$

dove $\boldsymbol{u}_\varphi=-\sin\varphi_o\boldsymbol{e}_x+\cos\varphi_o\boldsymbol{e}_y$, essendo φ_o il generico angolo iniziale.


r_{min}