Prova Scritta di Sistemi Dinamici
04 - 07 - 2016

Primo esercizio

Un punto P di massa m è vincolato a stare sul semicono $z^2 = x^2 + y^2$, $z > 0$. Il vincolo è liscio ed il punto è soggetto unicamente alla forza di una molla, di massa e lunghezza a riposo trascutabili, il cui estremo si trova nel punto $A \equiv (0, 0, h)$, con $h > 0$. La rigidezza della molla è k.

(a). Si scriva la funzione di Lagrange.

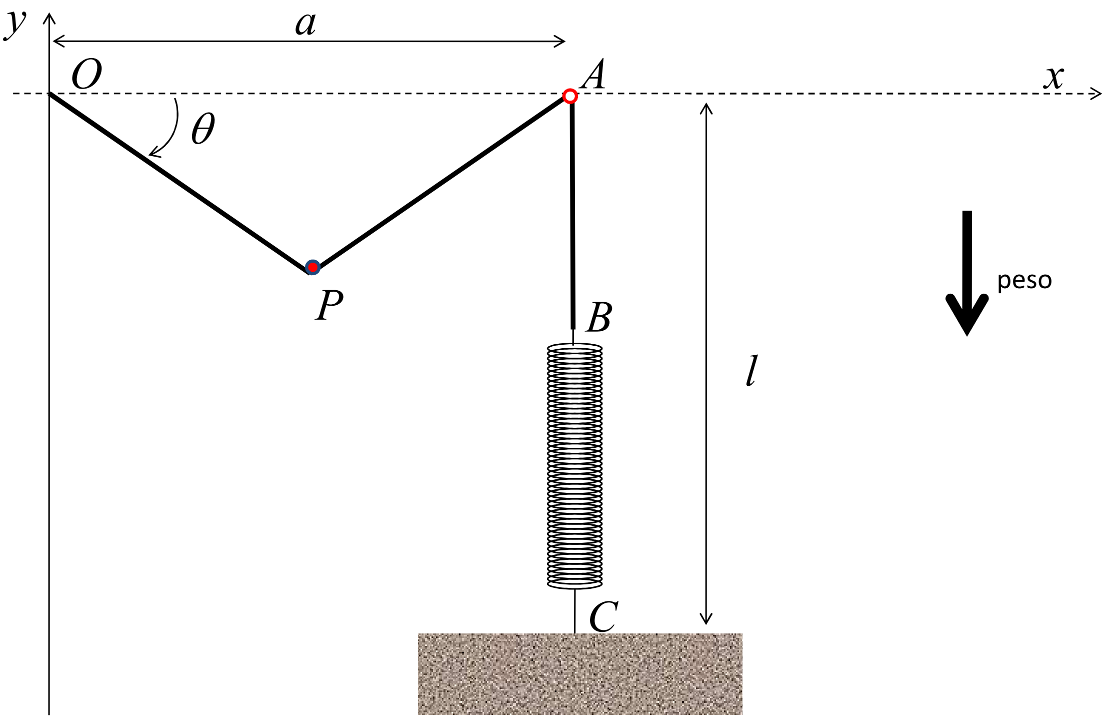
(b). Si determinino due integrali primi del moto e se ne calcoli il valore supponendo che la posizione iniziale del punto sia $\mathbf{x}(0) = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z$, e che la velocità iniziale sia $\dot{\mathbf{x}}(0) = \beta \mathbf{e}_y$.

Secondo esercizio

E' dato un filo inestensibile di lunghezza l e massa trascurabile. Un estrmo del filo è fisso in O, il filo poi passa per una carrucola prima di attrito e massa trascurabile posta nel punro A, che si trova alla stessa quota di O. La distanza di A da O è a. L'altro estremo del filo, il punto B, è collegato tramite una molla di massa trascurabile e rigidezza k, al punto C che si trova sulla verticale per A. La distanza di C da A è l. Un punto materiale di massa m è agganciato nel punto di mezzo del tratto del filo che sta fra O e la carrucola A. Si utilizzi come variabile lagrangiana l'angolo θ, $0 < \theta < \pi/2$, come mostrato in figura, considerandolo positivo per rotazione orarie.

(a). Determinare la configurazione di equilibrio.

(b). Studiare la stabilità della configurazione di equilibrio di cui al punto precedente.


y
a
O
A
x
θ
P
B
peso
l
C

SVOLGIMENTO

Primo esercizio

(a) . La parametrizzazione della superficie dove è vincolato il punto materiale è

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \ , \\ y &= r\sin\theta \ , \\ z &= r \ , \end{aligned}$$

con $r > 0$, e $\theta \in [-\pi.\pi]$. La funzione di Lagrange è

$$\mathcal{L} = T - V \ ,$$

dove

$$V = \frac{k}{2}\left(P - A\right)^2 = \frac{k}{2}\left(r^2 + \left(r-h\right)^2\right) .$$

I vettori della base locale del piano tangente sono

$$\mathbf{u}_r = \cos\theta \mathbf{e}_x + \sin\theta \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \ ,$$

$$\mathbf{u}_\theta = -r\sin\theta \mathbf{e}_x + r\cos\theta \mathbf{e}_y \ ,$$

per cui

$$\mathbf{x} = r\ \mathbf{u}_r,$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{r}\mathbf{u}_r + \dot{\theta}\mathbf{u}_\theta,$$

e

$$T = \frac{m}{2}\begin{pmatrix} \dot{r} & \dot{\theta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{u}_r\cdot\mathbf{u}_r & \mathbf{u}_r\cdot\mathbf{u}_\theta \\ \mathbf{u}_r\cdot\mathbf{u}_\theta & \mathbf{u}_\theta\cdot\mathbf{u}_\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{m}{2}\left(2\dot{r}^{\ 2} + r^2\dot{\theta}^{\ 2}\right).$$

La funzione di Lagrange è dunque

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(2\dot{r}^{\ 2} + r^2\dot{\theta}^{\ 2}\right) - \frac{k}{2}\left(r^2 + \left(r-h\right)^2\right) \ .$$

(b) . Un integrale primo si determina osservando che la θ è ciclica. Quindicostante

$$p_\theta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = costante \ .$$

La posizione iniziale del punto implica che

$$r\left(0\right) = 1, \quad e \quad \theta\left(0\right) = 0.$$

Per quel che rigurada la velocità iniziale si ha

$$\underbrace{\dot{x}\left(0\right)}_{=0} = \dot{r}\left(0\right)\ \underbrace{\cos\underbrace{\theta\left(0\right)}_{=0}}_{=1} - \underbrace{r\left(0\right)}_{=1}\ \dot{\theta}\left(0\right)\ \underbrace{\sin\underbrace{\theta\left(0\right)}_{=0}}_{=0},$$

da cui deduciamo $\dot{r}\left(0\right) = 0$, e

$$\underbrace{\dot{y}\left(0\right)}_{=\beta} = \underbrace{\dot{r}\left(0\right)}_{=0}\underbrace{\sin\theta\left(0\right)}_{=0} + \underbrace{r\left(0\right)}_{=1}\dot{\theta}\left(0\right)\ \underbrace{\cos\underbrace{\theta\left(0\right)}_{=0}}_{=1},$$

che implica $\dot{\theta}(0) = \beta$. Otteniamo dunque

$$p_\theta = m\beta \ .$$

Il secondo integrale primo è l'energia meccanica

$$\mathcal{H} = T + V = \frac{m}{2}\left(2\dot{r}^{\,2} + r^2\dot{\theta}^{\,2}\right) + \frac{k}{2}\left(r^2 + (r-h)^2\right),$$

il cui valore è

$$\mathcal{H} = \frac{m}{2}\beta^2 + \frac{k}{2}\left(2 - 2h + h^2\right).$$

Secondo esercizio

(a) . Cominciamo col determinare la posizione dei punti d'interesse

$$P - O = \frac{a}{2}\mathbf{e}_x - \frac{a}{2}\tan\theta\mathbf{e}_y \ ,$$

$$C - O = a\mathbf{e}_x - l\mathbf{e}_y \ ,$$

$$B - O = a\mathbf{e}_x - \overline{AB}\mathbf{e}_y \ ,$$

$$B - C = (B - O) - (C - O) = \left(l - \overline{AB}\right)\ \mathbf{e}_y \ .$$

Bisogna quindi determinare la lungezza del tratto di filo $\overline{AB}$. Evidentemente

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= l - 2\,|P - O| = l - 2\left(\frac{a}{2}\sqrt{1 + \tan^2\theta}\right) \\ &= l - \frac{a}{\cos\theta}, \end{aligned}$$

per cui

$$B - C = \frac{a}{\cos\theta}\mathbf{e}_y \ .$$

L'energia potenziale è

$$\begin{aligned} V &= V_{peso} + V_{el} = mgy_P + \frac{k}{2}\left|B - C\right|^2 \\ &= -mg\frac{a}{2}\tan\theta + \frac{k}{2}\frac{a^2}{\cos^2\theta}. \end{aligned}$$

La configurazione di equilibrio θ_o si ottiene risolvendo $\dfrac{dV}{d\theta} = 0$, cioè

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\theta} &= -mg\frac{a}{2\cos^2\theta} + ka^2\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta} \\ &= \frac{-mga\cos\theta + 2ka^2\sin\theta}{2\cos^3\theta}, \end{aligned}$$

da cui ricaviamo θ_o

$$\tan\theta_o = \frac{mg}{2ka}.$$

Ovviamente θ_o sarà compatibile con il sistema se minore dell'angolo massimo di inclinazione, $\theta_{\max}$, del tratto di filo PO. Tale angolo massimo si realizza quando $|P - O| = l/2$, da cui si ottiene $\cos\theta_{\max} = a/l$. Evidentemente $\theta_{\max} \approx \pi/2$ se $l \gg a$.

(b) . La stabilità si determina calcolando $\dfrac{d^2V}{d\theta^2}$. Abbiamo

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2V}{d\theta^2} &= -mga\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta} + ka^2\frac{\cos^2\theta + 3\sin^2\theta}{\cos^4\theta} \\
&= \frac{1}{\cos^2\theta}\left(-mga\tan\theta + ka^2 + 3ka^2\tan^2\theta\right).
\end{aligned}
$$

Pertanto

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{d^2V}{d\theta^2}\right|_{\theta_o} &= \frac{1}{\cos^2\theta_o}\left(-mga\tan\theta_o + ka^2 + 3ka^2\tan^2\theta_o\right) \\
&= \frac{1}{\cos^2\theta_o}\left(-mga\tan\theta_o + ka^2 + 3ka^2\tan^2\theta_o\right) \\
&= \frac{1}{\cos^2\theta_o}\left(\frac{(mg)^2}{4k} + ka^2\right) > 0,
\end{aligned}
$$

e quindi θ_o è configurazione di equilibrio stabile.