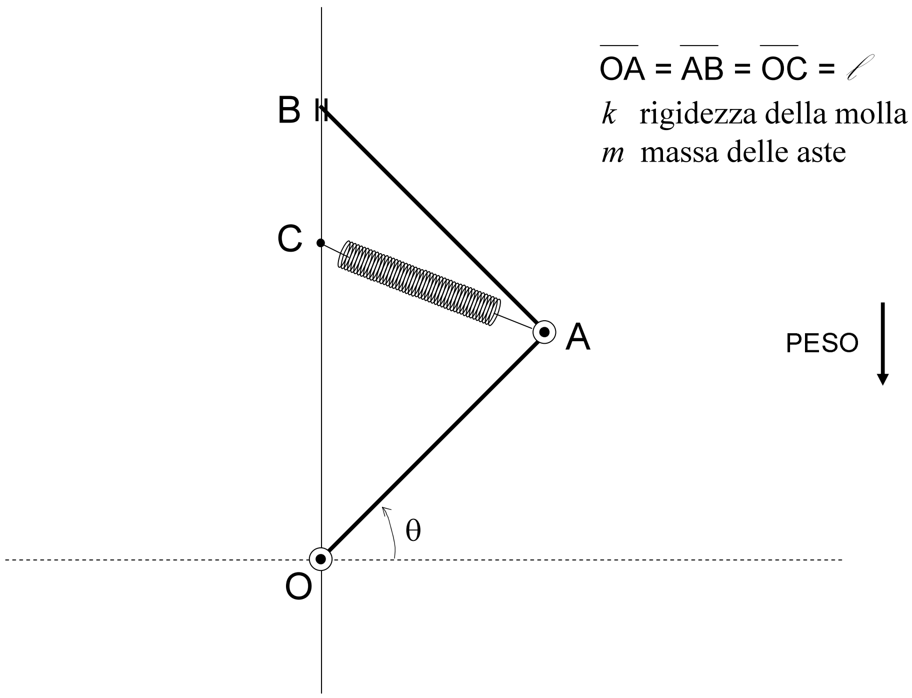
Secondo esercizio

E' dato un sistema costituito da due aste rigide OA e AB, aventi uguale massa m e uguale lunghezza ℓ. L'asta OA è vincolata a ruotare attorno all'estremo O. Le due aste sono poi incernierate nell'estremo A (v. figura). L'estremo B della seconda asta può scorrere senza attrito lungo la retta verticale passante per O (B può scendere anche sotto il punto O). Si denota con θ l'angolo che l'asta OA forma con la retta orizzontale (evidentemente $-\pi < \theta < \pi$), con la convenzione che $\theta > 0$ corrisponde a rotazioni antiorarie. L'estremo A, comune ad entrambe le aste, è collegato tramite una molla (di lunghezza a riposo e massa trascurabili) al punto fisso C, $\overline{OC} = \ell$. La costante elastica della molla è k. Tutti i vincoli sono privi di attrito e il sistema è soggetto alla forza peso.

(i). Si determinino le posizioni di equilibrio e la loro stabilità al variare del parametro $\alpha = \dfrac{2mg}{k\ell} > 0$.

(ii). Posto $\alpha = 2$, si determini la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio stabile.



SVOLGIMENTO

(i). Il sistema di riferimento che si considera è quello centrato in O, e in cui l'asse x è perpendicolare alla guida verticale e l'asse y coincide con la guida stessa. Definiamo, rispetto a tale SdR i vettori posizione di P_1, C.M. dell'asta OA, P_2 C.M. dell'asta AB, del punto A, e del punto C

$$\begin{aligned}
P_1 - O &= \frac{\ell}{2}\left(\cos\theta\ \vec{e}_x + \sin\theta\ \vec{e}_y\right), \\
P_2 - O &= \frac{\ell}{2}\cos\theta\ \vec{e}_x + \frac{3}{2}\ell\sin\theta\ \vec{e}_y, \\
A - O &= \ell\left(\cos\theta\ \vec{e}_x + \sin\theta\ \vec{e}_y\right), \\
C - O &= \ell\ \vec{e}_y\ .
\end{aligned}$$

Abbiamo poi $(A-C) = \ell\cos\theta\ \vec{e}_x + \ell\left(\sin\theta - 1\right)\ \vec{e}_y$,

$$|A-C|^2 = 2\ell^2\left(1-\sin\theta\right).$$

Possiamo quindi scrivere tutte le energie potenziali in gioco

$$\begin{aligned}
U^{peso}_{asta\ OA} &= mg\frac{\ell}{2}\sin\theta, \\
U^{peso}_{asta\ AB} &= mg\frac{3\ell}{2}\sin\theta, \\
U^{\ molla} &= \frac{k}{2}|A-C|^2 = k\ell^2\left(1-\sin\theta\right),
\end{aligned}$$

ed il potenziale totale

$$\begin{aligned}
U &= U^{peso}_{asta\ OA} + U^{peso}_{asta\ AB} + U^{\ molla} \\
&= 2mg\ell\sin\theta + k\ell^2\left(1-\sin\theta\right) \\
&= k\ell^2\left[(\alpha-1)\sin\theta + 1\right],
\end{aligned}$$

essendo $\alpha = \dfrac{2mg}{k\ell}$.

Per determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e la loro stabilità dobbiamo individuare i massimi ed i mimimi della funzione (dipendente dal parametro α)

$$f(\theta) = (\alpha-1)\sin\theta + 1,$$

per $\theta \in (-\pi, \pi)$. Siccome $f\,'(\theta) = (\alpha-1)\cos\theta$, e $f\,''(\theta) = -(\alpha-1)\sin\theta$, abbiamo:

- $\alpha > 1$,

$$\begin{aligned}
\theta &= \frac{\pi}{2},\ \text{ equilibrio instabile,} \\
\theta &= -\frac{\pi}{2},\ \text{ equilibrio stabile.}
\end{aligned}$$

- $\alpha = 1$, equilibrio indifferente per ogni θ.
- $0 < \alpha < 1$,

$$\begin{aligned}
\theta &= \frac{\pi}{2},\ \text{ equilibrio stabile,} \\
\theta &= -\frac{\pi}{2},\ \text{ equilibrio instabile.}
\end{aligned}$$

(*ii*). Se $\alpha = 2$ (che comporta $\dfrac{mg}{k\ell} = 1$) la configurazione di equilibrio stabile corrisponde a $\theta = -\pi/2$. Calcoliamo quindi l'energia cinetica totale

$$\begin{aligned} T &= \underbrace{\left[\frac{m}{2}|\dot{P_1 - O}|^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m\ell^2}{12}\right)\dot{\theta}^2\right]}_{T_{asta\ OA}} + \underbrace{\left[\frac{m}{2}|\dot{P_2 - O}|^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m\ell^2}{12}\right)\dot{\theta}^2\right]}_{T_{asta\ AB}} \\ &= \frac{m\ell^2}{2}\left[\frac{2}{3} + 2\cos^2\theta\right]\dot{\theta}^2, \end{aligned}$$

ovvero $T = \dfrac{1}{2}\mathcal{A}(\theta)\,\dot{\theta}^2$, con $\mathcal{A}(\theta) = 2m\ell^2\left(\dfrac{1}{3} + \cos^2\theta\right)$. Per quanto riguarda U abbiamo

$$U(\theta) = k\ell^2(\sin\theta + 1),$$

dal momento che, come già detto, $\alpha = 2$. La frequenza delle piccole oscillazioni in corrispondenza di $\theta = -\pi/2$, è data da

$$\omega^2 = \frac{U''(-\pi/2)}{\mathcal{A}(-\pi/2)} = \frac{3}{2}\frac{k}{m} = \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}.$$