Prova Scritta di Sistemi Dinamici
04 - 02 - 2016

Primo esercizio

Si consideri, sul piano verticale x, y, la circonferenza $\mathcal{C}$ di raggio 1 e centro $O \equiv (0,1)$. Su $\mathcal{C}$ può muoversi, senza attrito un punto materiale P di massa m. Il punto P è collegato al punto $A \equiv (1,1)$ da una molla di costante elastica k, avente massa e lunghezza a riposo trascurabili. Il peso è diretto nel verso opposto dell'asse y. Si usi come variabile lagrangiana l'angolo $\theta \in [-\pi, \pi]$, che il vettore $(P - O)$ forma con l'asse y, con $\theta > 0$ per rotazione antiorarie.

(*a*). Si determinino le posizioni di equilibrio discutendone la stabilità.

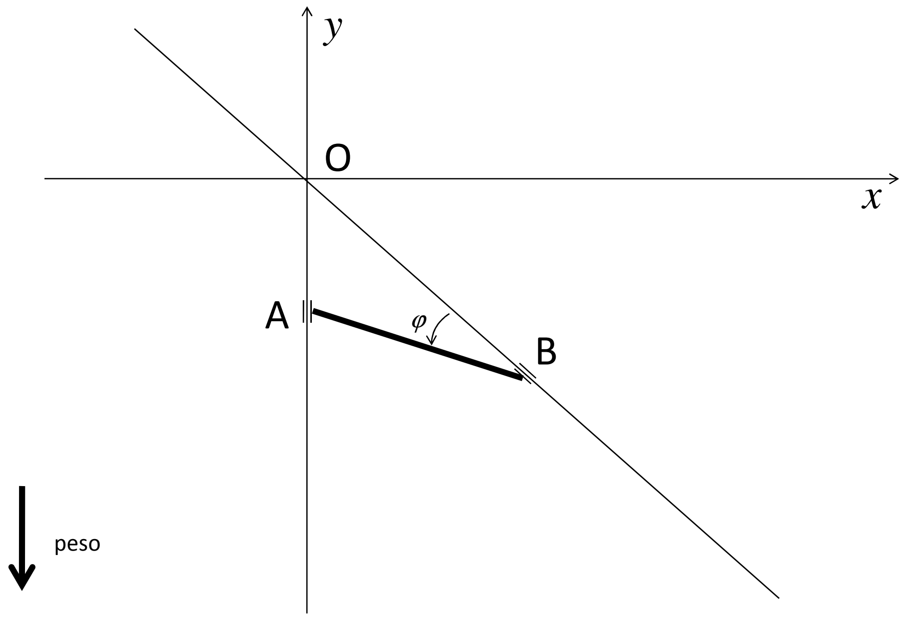
(*b*). Si trascuri adesso la forza peso e si supponga che la circonferenza, e con essa solidalmente anche il punto A, ruoti con velocità angolare costante ω attorno all'asse x. Si determini l'energia potenziale efficace e si individuino le configurazioni di equilibrio stabile.

Secondo esercizio

Un'asta omogenea AB di massa m e lunghezza $2l$ si muove sul piano verticale xy. L'estremo A è vincolato a scorrere sull'asse y, mentre l'estremo B scorre sulla retta $y = -x$ (v. figura). I vincoli sono privi di attrito e il peso è diretto come in figura. Si consideri il SdR della figura e si utilizzi come variabile lagrangiana l'angolo φ, $\varphi \in [-\pi, \pi]$, positivo per rotazioni antiorarie.

(*a*). Si individuino le configurazioni di equilibrio dell'asta e se ne discuta la stabilità.

(*b*). Si determini l'energia cinetica dell'asta AB.


y
O
x
A
φ
B
peso

SVOLGIMENTO

Primo esercizio

(a) . Lavorando sul piano, la posizione del punto materiale P è

$$P - O = \sin\theta \boldsymbol{e}_x + (1 - \cos\theta)\, \boldsymbol{e}_y \ ,$$

mentre

$$\overline{PA}^{\ 2} = \cos^2\theta + (1 - \sin\theta)^2 = 2\,(1 - \sin\theta)\,.$$

L'energia potenziale totale è

$$V(\theta) = \underbrace{mg\,(1 - \cos\theta)}_{\substack{\text{en. potenziale}\\ \text{peso}}} + \underbrace{k\,(1 - \sin\theta)}_{\substack{\text{en. potenziale}\\ \text{elastica}}}\ .$$

Le configurazioni di equilibrio si determinano imponendo $V' = 0$, ovvero

$$V' = k\sin\theta \left[-\frac{k}{mg} + \tan\theta\right] = 0.$$

Quindi, abbiamo due configurazioni di equilibrio corrispondenti a

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{k}{mg}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\theta_2 = -\pi + \theta_1 \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right].$$

Per quel che riguarda la stabilità abbiamo

$$V''(\theta) = mg\cos\theta\left(1 + \frac{k}{mg}\tan\theta\right)\ ,$$

per cui

$$V''(\theta_1) = mg\left(1 + \left(\frac{k}{mg}\right)^2\right)\cos\theta_1 > 0, \quad \Longrightarrow \quad \theta_1 \text{ stabile,}$$

$$V''(\theta_2) = mg\left(1 + \left(\frac{k}{mg}\right)^2\right)\cos\theta_2 < 0, \quad \Longrightarrow \quad \theta_2 \text{ instabile.}$$

(b) . Se consideriamo l'asse z ortogonale al piano x, y, abbiamo

$$(P - O) = \sin\theta \boldsymbol{e}_x + (1 - \cos\theta)\left[\cos(\omega t)\, \boldsymbol{e}_y + \sin(\omega t)\, \boldsymbol{e}_z\right]\ ,$$

per cui

$$\left(P \dot{-} O\right)^2 = \dot{\theta}^2 + 2\omega^2\,(1 - \cos\theta)\ .$$

La funzione di Lagrange è

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{m}{2}\dot{\theta}^2}_{T_2} + \underbrace{m\omega^2\,(1 - \cos\theta)}_{T_0} - \underbrace{k\,(1 - \sin\theta)}_{V}\ ,$$

da cui otteniamo l'energia potenziale efficace

$$V_{eff} = V - T_o = k\,(1 - \sin\theta) - m\omega^2\,(1 - \cos\theta)\ .$$

Le configurazione di equilibrio si ottengono risolvendo $V_{eff}^{'} = 0$, cioè

$$V_{eff}^{'} = -m\omega^2 \cos\theta \left[\tan\theta + \frac{k}{m\omega^2}\right] = 0.$$

I punti di equilibrio sono dunque

$$\theta_1 = \arctan\left(-\frac{k}{m\omega^2}\right) \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right],$$

$$\theta_2 = -\pi + \theta_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right],$$

Le condizioni per la stabilità danno

$$V_{eff}^{''}(\theta) = m\omega^2 \cos\theta \left[\frac{k}{m\omega^2}\tan\theta - 1\right] ,$$

ovvero

$$V''(\theta_1) = -m\omega^2 \cos\theta_1 \left[\left(\frac{k}{m\omega^2}\right)^2 + 1\right] > 0, \quad \Longrightarrow \quad \theta_1 \text{ stabile,}$$

$$V''(\theta_2) = -m\omega^2 \cos\theta_2 \left[\left(\frac{k}{m\omega^2}\right)^2 + 1\right] < 0, \quad \Longrightarrow \quad \theta_2 \text{ instabile.}$$

Secondo esercizio

(a). Cominciamo col determinare i vettori posizione dei punti di interesse

$$\begin{aligned}
A - O &= y_A \, \boldsymbol{e}_y \, , \\
P_o - O &= l\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) \, \boldsymbol{e}_x + \left[y_A - l\sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)\right] \, \boldsymbol{e}_y \\
&= \frac{l}{2}\sqrt{2}\,(\cos\varphi + \sin\varphi)\,\boldsymbol{e}_x + \left[\left(y_A - \frac{l\sqrt{2}}{2}(\cos\varphi - \sin\varphi)\right)\right]\boldsymbol{e}_y \, ,
\end{aligned}$$

dove P_o è il CM dell'asta AB. Ora, considerando i triangoli AOC e ABC della sottostante figura, abbiamo

$$\overline{OA}\ \sin\frac{\pi}{4} = 2l\sin\varphi$$

da cui

$$y_A = -2l\frac{\sin\varphi}{\sin\pi/4} = -2\sqrt{2}l\sin\varphi \, .$$

Abbiamo quindi

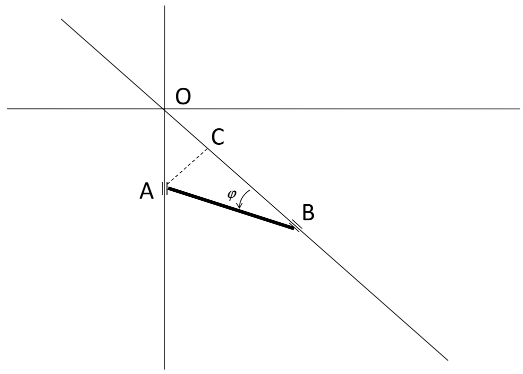
$$P_o - O = \frac{l\sqrt{2}}{2}\left[(\cos\varphi + \sin\varphi)\,\boldsymbol{e}_x - (3\sin\varphi + \cos\varphi)\,\boldsymbol{e}_y\right] \, .$$

L'energia potenziale dovuta alla forza peso è dunque

$$V = -mg\frac{l\sqrt{2}}{2}(3\sin\varphi + \cos\varphi)\, .$$

All'equilibrio si ha

$$\frac{dV}{d\varphi} = 0, \quad \Rightarrow \quad -mg\frac{l\sqrt{2}}{2}(3\cos\varphi - \sin\varphi) = 0,$$



per cui, considerando $\varphi \in [-\pi, \pi]$, abbiamo

$$\tan\varphi = 3, \quad \text{soluzioni :} \quad \begin{cases} \varphi_1 = \arctan 3 \approx 1.25\ . \\ \\ \varphi_2 = -\pi + \varphi_1 \approx -1.89\ . \end{cases}$$

E' evidente che $\varphi_1 \in [0, \pi/2]$, mentre $\varphi_2 \in [-\pi, -\pi/2]$.

Calcolando la derivata seconda

$$V'' = mg\frac{l\sqrt{2}}{2}\left(3\sin\varphi + \cos\varphi\right) = mg\frac{l\sqrt{2}}{2}\cos\varphi\left(3\tan\varphi + 1\right),$$

abbiamo

$$V''\left(\varphi_1\right) = mg\frac{l\sqrt{2}}{2}10\cos\varphi_1 > 0,$$
$$V''\left(\varphi_2\right) = mg\frac{l\sqrt{2}}{2}10\cos\varphi_2 < 0,$$

quindi:

- φ_1, è configurazione di equilibrio stabile.
- φ_2, è configurazione di equilibrio instabile.

(b) . Calcoliamo la velocità di P_o

$$(P_o \dot{-} O) = \frac{l\sqrt{2}}{2}\dot{\varphi}\left[\left(-\sin\varphi + \cos\varphi\right)\boldsymbol{e}_x - \left(3\cos\varphi - \sin\varphi\right)\boldsymbol{e}_y\right],$$

per cui

$$(P_o \dot{-} O)^2 = \frac{l^2}{2}\dot{\varphi}^2\left(1 - 8\sin\varphi\cos\varphi + 8\cos^2\varphi\right).$$

L'energia cinetica dell'asta AB è

$$\begin{aligned} T_{AB} &= \frac{1}{2}m(P_o \dot{-} O)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{12}\right)(2l)^2\dot{\varphi}^2 \\ &= ml^2\dot{\varphi}^2\left(\frac{5}{6} - 4\sin\varphi\cos\varphi + 4\cos^2\varphi\right). \end{aligned}$$