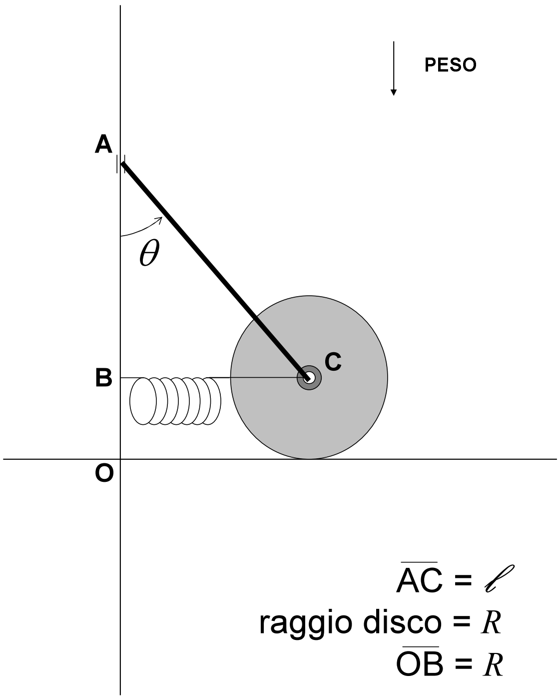
Secondo esercizio

L'estremo A di un'asta AC, di massa m e lunghezza ℓ, è vincolato a scorrere senza attrito su una retta verticale. L'altro estremo, ovvero il punto C, è invece incernierato sul centro di un disco di raggio R e massa uguale a quella dell'asta. Il disco è sua volta vincolato a rotolare senza strisciare su una retta orizzontale (v. figura). Il centro del disco è poi collegato tramite una molla (avente massa e lunghezza a riposo trascurabili) al punto $B \equiv (0, R)$. La costante elastica della molla è k, e la forza peso è diretta come in figura.

(*i*). Detto θ l'angolo che l'asta forma con la retta verticale ($\theta > 0$, per rotazioni antiorarie) e ϕ l'angolo di cui ruota il disco (al solito $\phi > 0$, per rotazioni antiorarie), determinare la relazione che lega θ e ϕ.

(*ii*). Definendo $\alpha = \dfrac{mg}{2k\ell}$, determinare le posizioni di equilibrio e la loro stabilità nel caso in cui $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

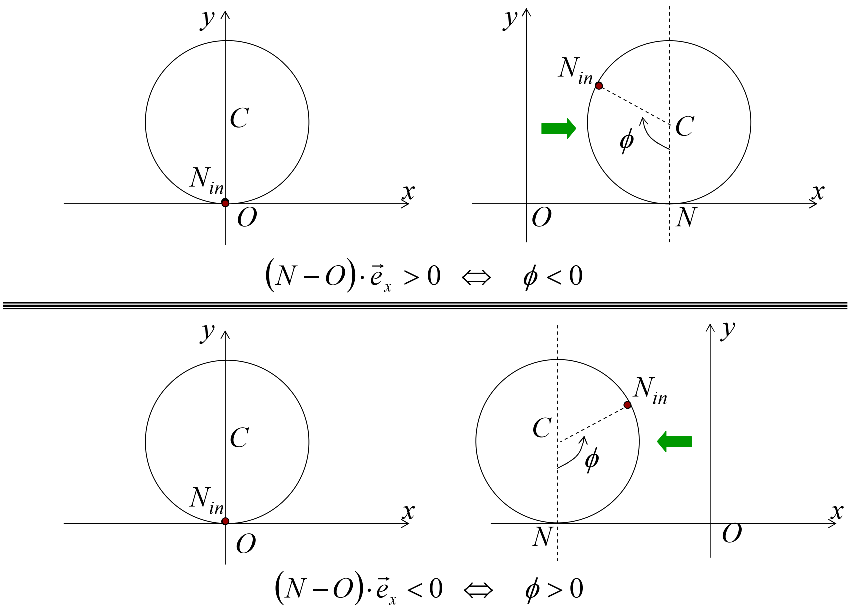
(*iii*). L'energia cinetica del sistema e l'equazione del moto.



SVOLGIMENTO

(i) . Il parametro lagrangiano che descrive le configurazioni dell'asta è l'angolo θ, con $\theta \in (-\pi, \pi)$. In particolare $\theta = 0$, corrisponde alla sbarretta verticale con A sopra C.

Definiamo adesso la configurazione di riferimento rispetto alla quale si misura il rotolamento del disco. Stipuliamo che la configurazione di riferimento per il disco è quella per cui $\theta = 0$ (asta verticale con A sopra C). In tale configurazione, se definiamo con N il punto di contatto fra il disco e la retta orizzontale, abbiamo $N \equiv O$. Ora, se definiamo N_{in} tale punto (individuato, per esempio, da una macchia di vernice), l'angolo di rotolamento ϕ è l'angolo che il raggio CN_{in} forma con la verticale (v. figura).



Il vincolo di rotolamento puro impone

$$\underbrace{|(N-O)|}_{|\ell \sin\theta|} = \underbrace{\text{lunghezza dell'arco } (NN_{in})}_{|\;R\phi\;|},$$

che però coinvolgendo solo lunghezze non porta alcuna informazione sul segno. Quest'ultimo si ottiene notando che a rotazioni antiorarie dell'asta ($\theta > 0$) corrispondono rotolamenti negativi ($\phi < 0$) del disco, e viceversa. Si ha quindi

$$\ell \sin\theta = -R\phi, \quad \Leftrightarrow \quad \phi = -\frac{\ell}{R}\sin\theta, \tag{1}$$

per cui: $-\dfrac{\ell}{R} \le \phi \le \dfrac{\ell}{R}$.

(ii) . Indicando con U l'energia potenziale totale si ha

$$\begin{aligned} U &= U_{peso\ asta} + U_{molla} \\ &= mg\,(\text{quota CM asta}) + \frac{1}{2}k\,\overline{BC}^{\,2}. \end{aligned}$$

Se P_o indica il CM dell'asta, abbiamo

$$P_o - O = \frac{\ell}{2}\sin\theta\;\vec{e}_x + \left(R + \frac{\ell}{2}\cos\theta\right)\vec{e}_y\;,$$

mentre $\overline{BC}^{\,2} = \ell^2 \sin^2\theta$. Si ottiene dunque

$$U = mg\left(R + \frac{\ell}{2}\cos\theta\right) + \frac{1}{2}k\ell^2\sin^2\theta.$$

Gli eventuali punti di equilibrio sono i massimi e minimi della funzione $U(\theta)$. Si studia quindi il segno della derivat, ovvero

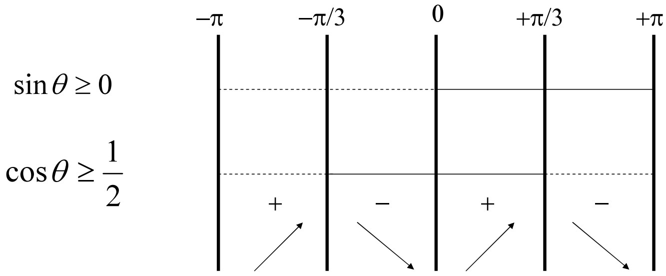
$$\frac{dU}{d\theta} = -mg\frac{\ell}{2}\sin\theta + k\ell^2\sin\theta\cos\theta = k\ell^2\sin\theta\left(\cos\theta - \frac{mg}{2k\ell}\right).$$

Siccome $\alpha = \dfrac{mg}{2k\ell} = \dfrac{1}{2}$, dobbiamo studiare la seguente disequazione

$$\sin\theta\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\right) \geq 0,$$

per $-\pi < \theta < \pi$.

$$\begin{cases} \sin\theta \geq 0, & 0 \leq \theta \leq \pi \\ \cos\theta \geq \dfrac{1}{2}, & -\dfrac{\pi}{3} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$



Quindi i punti di equilibrio stabile si hanno per $\theta = 0$, e $\theta = \pi$ (o $-\pi$), che corrsipondono alla sbarretta verticale e zero allungamento della molla. I punti di equilibrio instabile si hanno per $\theta = \pm\,\pi/3$.

(*iii*) . Se con T si denota l'energia cinetica totale abbiamo

$$T = T_{asta} + T_{disco}.$$

In particolare,

$$T_{asta} = \frac{1}{2}m\left[\dot{(P_o - O)}\right]^2 + \frac{1}{2}I_{zz}(P_o)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{6}m\ell^2\dot{\theta}^2,$$

mentre

$$T_{disco} = \frac{1}{2}m\left[\dot{(C - O)}\right]^2 + \frac{1}{2}I_{zz}(C)\dot{\phi}^2.$$

Dobbiamo quindi determinare $\dot{(C - O)}$ e $\dot{\phi}$. Per quanto riguarda il primo

$$(C - O) = \ell\sin\theta\;\vec{e}_x + R\;\vec{e}_y, \quad \Rightarrow \quad \dot{(C - O)} = \ell\cos\theta\dot{\theta}\vec{e}_x.$$

In merito a $\dot{\phi}$, ricordando la (1), si ha

$$\dot{\phi} = -\frac{\ell}{R}\cos\theta\dot{\theta}.$$

Quindi, siccome $I_{zz}\left(C\right) = \frac{1}{2}mR^2$, abbiamo

$$T_{disco} = \frac{3}{4}m\ell^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2,$$

così che l'energia cinetica totale è

$$T = \frac{1}{2}m\ell^2\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2}\cos^2\theta\right)\dot{\theta}^2.$$

L'equazione di moto si ottiene dall'equazione di Lagrange, in cui la Lagrangiana $\mathcal{L}$ è data da

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\ell^2\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2}\cos^2\theta\right)\dot{\theta}^2 - \left[mg\left(R + \frac{\ell}{2}\cos\theta\right) + \frac{1}{2}k\ell^2\sin^2\theta\right].$$

Otteniamo così

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2}\cos^2\theta\right)\ddot{\theta} - \frac{3}{2}\cos\theta\sin\theta\dot{\theta}^2 = -\frac{k}{m}\sin\theta\left(\cos\theta - \frac{mg}{2k\ell}\right).$$