Prova Scritta di Sistemi Dinamici
23 - 05 - 2016

Primo esercizio

Un punto P di massa $m = 1$, è soggetto alla forza centrale $\boldsymbol{F} = -\dfrac{r}{r^2+1}\boldsymbol{e}_r$, dove $r = |(P-O)|$ con O centro della forza ed $\boldsymbol{e}_r$ versore radiale. Ponendosi direttamente nel piano in cui si svolge il moto si considerino le seguenti condizioni iniziali

$$r|_{t=0} = r_o > 0, \quad \text{e} \quad (\overset{\bullet}{P-O})\Big|_{t=0} = r_o\beta\boldsymbol{e}_\theta, \quad \text{con} \quad \beta \neq 0, \tag{1}$$

dove $\boldsymbol{e}_\theta$ è il versore ortogonale ad $\boldsymbol{e}_r$.

(*a*) . Si scriva l'energia potenziale efficace considerando le condizioni iniziali (1).

(*b*) . Si dimostri che, comunque si selezioni β, l'orbita è limitata.

(*c*) . Dato r_o, determinare β affinchè il punto descriva un'orbita circolare di raggio r_o.

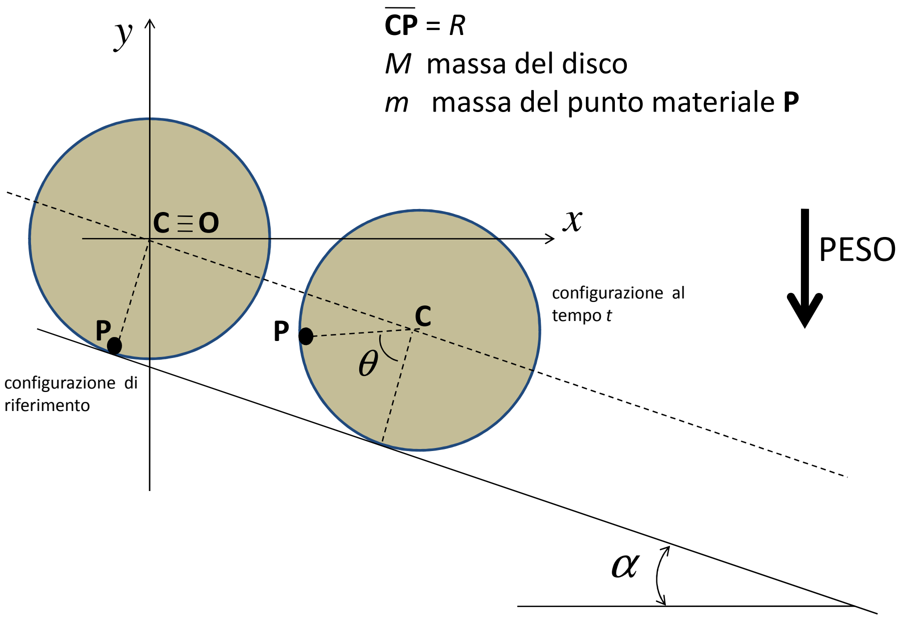
Secondo esercizio

In un piano verticale è posta una guida rettilinea inclinata di un angolo α rispetto all'orizzontale. Sulla guida è vincolato a rotolare senza strisciare un disco di massa M e raggio R, il cui centro è C. Sul bordo del disco è fissato un punto materiale P di massa m (v. figura). Si consideri come configurazione di riferimento quella in cui P è a contatto con la guida e $C \equiv O$, essendo O è il centro del SdR $\{O, x, y\}$ riportato in figura. Si denoti con θ l'angolo di rotolamento del disco, ovvero l'angolo che il segmento PO forma con la retta che passa per C ed il punto di contatto. Si utilizzi θ come variabile lagrangiana considerando $\theta > 0$ in corrispondenza di rotazione antiorarie. Il sistema è soggetto alla sola forza peso diretta come in figura.

(*a*) . Scrivere la funzione di Lagrange del sistema.

(*b*) . Supponendo $\alpha = 30°$, determinare i valori del paramatro $\mu = \dfrac{M}{m}$ per i quali esistono due configurazioni di equilibrio.

(*c*) . Riferendosi al punto precedente, dire, motivando la risposta, quali configurazioni di equilibrio sono stabili e quali instabili.


$\overline{\mathbf{CP}} = R$
M massa del disco
m massa del punto materiale **P**
y
x
C ≡ O
P
configurazione di riferimento
P
C
θ
configurazione al tempo t
PESO
α

SVOLGIMENTO

Primo esercizio

(a). Se consideriamo coordinate polari

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases} \qquad r \in (0, +\infty)\,, \quad \theta \in [0, 2\pi)\,,$$

la base locale normalizzata è

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial r} / \left| \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial r} \right| = \frac{\boldsymbol{u}_r}{|\boldsymbol{u}_r|} = \cos\theta \boldsymbol{e}_x + \sin\theta \boldsymbol{e}_y \;,$$

$$\boldsymbol{e}_\theta = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} / \left| \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \theta} \right| = \frac{\boldsymbol{u}_\theta}{|\boldsymbol{u}_\theta|} = -\sin\theta \boldsymbol{e}_x + \cos\theta \boldsymbol{e}_y \;,$$

per cui

$$\dot{(P - O)} = \dot{r}\; \boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\; \boldsymbol{e}_\theta \;.$$

In particolare, confrontando con la (1) abbiamo $\dot{\theta}\Big|_{t=0} = \beta$.

Scriviamo dunque l'energia cinetica di P

$$T = \frac{1}{2}\dot{(P - O)}^2 = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \right) \;.$$

Calcoliamo adesso l'energia potenziale. Abbiamo

$$-\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{r}{r^2+1}, \quad \Longrightarrow \quad V(r) = \frac{1}{2}\ln\left(r^2+1\right) \;.$$

La Lagrangiana è del punto materiale è

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \right) - \frac{1}{2}\ln\left(r^2+1\right) \;.$$

La variabile θ è ciclica e di conseguenza

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = A_o,$$

con A_o costante determinata dalle condizioni iniziali (1). Siccome $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = r^2\dot{\theta}$, abbiamo

$$A_o = r^2\dot{\theta}\Big|_{t=0} = r_o^2\,\beta \;,$$

da cui

$$\dot{\theta} = \frac{r_o^2\,\beta}{r^2} \;.$$

Per determinare l'energia potenziale efficace conviene passare dalla funzione Hamiltoniana, ovvero

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= T + V = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\ln\left(r^2+1\right) \\ &= \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{r_o^4\beta^2}{2}\frac{1}{r^2} + \frac{1}{2}\ln\left(r^2+1\right) \;, \end{aligned}$$

da cui ricaviamo facilmente l'energia potenziale efficace, cioè

$$V_{eff}(r) = \frac{r_o^4\beta^2}{2}\frac{1}{r^2} + \frac{1}{2}\ln\left(r^2+1\right) \ .$$

(b) . Per dimostrare che le orbite sono limitate bisogna tracciare il grafico di $V_{eff}(r)$, per $r \in (0, +\infty)$. Posto

$$\alpha^2 = r_o^4\beta^2 = \left(r_o^2\beta\right)^2, \tag{2}$$

dobbiamo rappresentare il grafico di

$$V_{eff}(r) = \frac{\alpha^2}{2r^2} + \frac{1}{2}\ln\left(r^2+1\right) \ ,$$

con $\alpha^2 \neq 0$. E' semplice vedere che $V_{eff}(r) > 0$, $\forall\ r \in (0, +\infty)$ e che

$$\lim_{r\to 0^+} V_{eff}(r) = +\infty, \quad \text{e} \quad \lim_{r\to +\infty} V_{eff}(r) = +\infty.$$

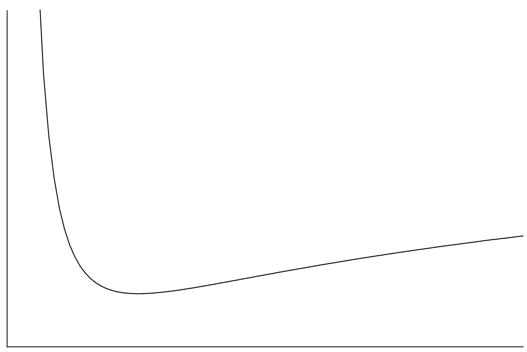
Calcolando la derivata prima otteniamo

$$V'_{eff}(r) = -\frac{\alpha^2}{r^3} + \frac{r}{r^2+1} \ ,$$

che si annulla in $r = \hat{r}$, dove

$$\hat{r} = \alpha\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+\frac{4}{\alpha^2}}}{2}} \ . \tag{3}$$

E' facile provare che $V_{eff}(r)$ ha minimo in $\hat{r}$, poiché $V'_{eff}(r) < 0$ per $0 < r < \hat{r}$. Il grafico di $V_{eff}(r)$ è riportato in figura.



Dunque, per qualsiasi scelta dell'energia meccanica E maggiore o uguale del minimo di $V_{eff}(r)$, la retta orizzontale E e $V_{eff}(r)$ hanno solo due intersezioni, $r_m > 0$ e r_M, con $r_m < r_M < +\infty$. Quindi la soluzione $r(t)$, è tale che $r_m \leq r(t) \leq r_M$: abbiamo soltanto orbite limitate.

(c) . L'orbita $r(t)$ è circolare con raggio pari ad r_o soltanto se $\hat{r} = r_o$, ovvero, ricordando la (3), se

$$2r_o^2 = \alpha^2\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{\alpha^2}}\right).$$

Pertanto, tenendo presente la (2), l'equazione che deve essere soddisfatta è la seguente

$$\frac{2}{\beta^2 r_o^2} = 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{r_o^4 \beta^2}} = 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2}{r_o^2 \beta^2}\right)^2 \beta^2} \ .$$

Ponendo $z = \dfrac{2}{\beta^2 r_o^2}$, si tratta di risolvere

$$z - 1 = \sqrt{1 + \beta^2 z^2} \ , \quad \Longrightarrow \quad -2z = \left(\beta^2 - 1\right) z^2$$

ovvero

$$z\left(1 - \beta^2\right) = 2, \quad \Longrightarrow \quad 1 - \beta^2 = \beta^2 r_o^2 \ ,$$

da cui otteniamo

$$\beta = \pm\sqrt{\frac{1}{r_o^2 + 1}} \ .$$

Secondo esercizio

(a). Se denotiamo con s l'ascissa del centro C del disco lungo la linea tratteggiata della figura, abbiamo

$$C - O = s \cos\alpha \boldsymbol{e}_x - s \sin\alpha \boldsymbol{e}_y \ .$$

Il vincolo di rotolamento puro impone

$$s = -R\theta \ ,$$

per cui

$$C - O = -R\theta \cos\alpha \boldsymbol{e}_x + R\theta \sin\alpha \boldsymbol{e}_y \ ,$$

$$\dot{(C - O)} = -R\dot{\theta} \cos\alpha \boldsymbol{e}_x + R\dot{\theta} \sin\alpha \boldsymbol{e}_y \ .$$

Per quanto riguarda il punto P abbiamo

$$P - O = (P - C) + (C - O) \, ,$$

dove, ricordando la convenzione che $\theta > 0$ per rotazioni antiorarie, abbiamo

$$P - C = -R \sin(\alpha - \theta) \boldsymbol{e}_x - R \cos(\alpha - \theta) \boldsymbol{e}_y \ .$$

In conclusione

$$(P - C) = \left[-R\theta \cos\alpha - R \sin(\alpha - \theta)\right] \boldsymbol{e}_x + \left[R\theta \sin\alpha - R \cos(\alpha - \theta)\right] \boldsymbol{e}_y \ ,$$

$$\dot{(P - C)} = \left[-R \cos\alpha + R \cos(\alpha - \theta)\right] \dot{\theta} \boldsymbol{e}_x + \left[R \sin\alpha - R \sin(\alpha - \theta)\right] \dot{\theta} \boldsymbol{e}_y$$

L'energia cinetica è $T = T_{disco} + T_P$. Abbiamo così

$$T_P = \frac{m}{2} \dot{(P - C)}^2 = m R^2 (1 - \cos\theta) \dot{\theta}^2 ,$$

e

$$T_{disco} = \frac{M}{2} \dot{(C - O)}^2 + \frac{1}{2} I(C) \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} M R^2 \dot{\theta}^2 \ .$$

Dunque, l'energia cinetica totale è

$$T = \left[\frac{3}{4} M + m(1 - \cos\theta)\right] R^2 \dot{\theta}^2 \ .$$

Per quel che riguarda l'energia potenziale abbiamo

$$\begin{aligned} V &= V_{disco} + V_P = Mgy_C + mgy_P \\ &= MgR\theta \sin\alpha + mg\left[R\theta\sin\alpha - R\cos(\alpha-\theta)\right]. \end{aligned}$$

La funzione di Lagrange è

$$\mathcal{L} = \left[\frac{3}{4}M + m(1-\cos\theta)\right]R^2\dot{\theta}^2 - mgR\left[(\mu+1)\theta\sin\alpha - \cos(\alpha-\theta)\right],$$

dove $\mu = M/m$.

(b) . Se $\alpha = 30°$, cioè $\alpha = \pi/6$, abbiamo

$$V(\theta) = mgR\left[\frac{1}{2}(\mu+1)\theta - \cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\right].$$

Se introduciamo

$$U(\theta) = \frac{V(\theta)}{mgR} = \frac{(\mu+1)}{2}\theta - \cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right),$$

avremo posizioni di equilibrio soltanto se esistono angoli θ che soddisfano $U'(\theta) = 0$, cioè $V'(\theta) = 0$. Calcolando la derivata prima otteniamo

$$U'(\theta) = \frac{\mu+1}{2} - \sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right),$$

per cui avremo due configurazioni di equilibrio solatanto se

$$\frac{\mu+1}{2} < 1, \quad \Longrightarrow \quad \mu < 1 .$$

Queste si determinano risolvendo

$$\sin\varphi = \frac{\mu+1}{2},$$

dove $\varphi = \frac{\pi}{6} - \theta$. Si hanno quindi due soluzioni: φ_1, con $0 < \varphi_1 < \pi/2$, e φ_2, con $\pi/2 < \varphi_2 < \pi$. Otteniamo così due famiglie di soluzioni, o meglio di configurazioni di equilibrio,

$$\theta_1 = \frac{\pi}{6} - \varphi_1 + 2k\pi , \tag{4}$$

$$\theta_2 = \frac{\pi}{6} - \varphi_2 + 2k\pi , \tag{5}$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

(c) . Per determinare la stabilità delle posizioni di equilibrio (4) e (5), calcoliamo la derivata seconda di U

$$U''(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right).$$

Quindi

$$U''(\theta_1) = \cos(\varphi_1 - 2k\pi) > 0,$$

e

$$U''(\theta_2) = \cos(\varphi_2 - 2k\pi) < 0.$$

La famiglia θ_1 è stabile mentre la famiglia θ_2 è instabile.