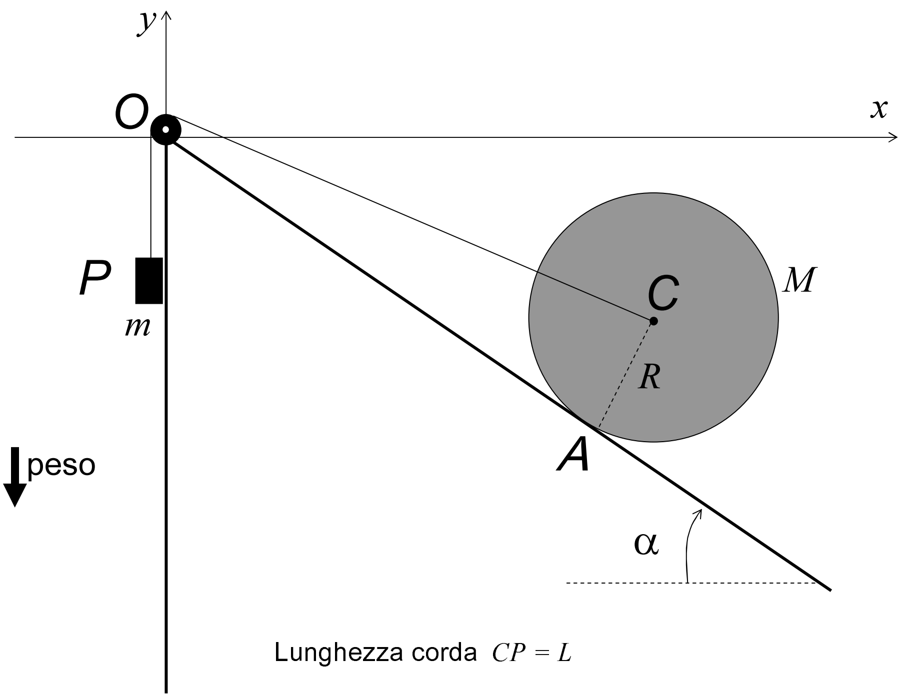
Secondo esercizio

Un disco di raggio R e massa M è vincolato a rotolare senza strisciare su una guida rettilinea che forma un angolo α con l'orizzontale. Il centro C del disco è collegato tramite una corda inestensibile, di massa trascurabile e lunghezza $L > 2R$ ad un punto materiale P di massa m (v. figura). La corda è perfettamente flessibile e passa attraverso una carrucola di massa trascurabile e priva di attrito. Si prenda come parametro lagrangiano l'angolo di rotolamento del disco θ, considerando: $\theta > 0$ per rotazioni orarie, e come configurazione di riferimento $\theta = 0$ quella per cui il punto di contatto A fra disco e guida coincide con O. Il sistema è soggetto alla forza peso, diretta nel verso opposto dell'asse y.

(i). Si determini per quali valori del parametro $\beta = \dfrac{M \sin\alpha}{m} > 0$, esistono configurazioni di equilibrio stabile.

(ii). Si scriva l'energia cinetica totale del sistema composto dal disco e.dal punto materiale

(iii). Si determini, in funzione di β, la frequenza delle piccole oscillazioni in corrispondenza dell'equilibrio stabile.



SVOLGIMENTO

(i). Il vincolo di rotolamento puro consente di scrivere $\overline{OA} = R\theta$ (si ricordi che θ è positivo per rotazione antitorarie). Riferendoci alla figura abbiamo

$$
\begin{aligned}
A - O &= R\theta \cos\alpha \ \vec{e}_x - R\theta \sin\alpha \ \vec{e}_y, \\
C - A &= R \sin\alpha \vec{e}_x + R\cos\alpha \ \vec{e}_y, \\
C - O &= (C - A) + (A - O) = (R\sin\alpha + R\theta\cos\alpha) \ \vec{e}_x + (R\cos\alpha - R\theta\sin\alpha) \ \vec{e}_y, \\
|C - O| &= R\sqrt{1+\theta^2} \ , \\
(P - O) &= -(L - |C - O|) \ \vec{e}_y = -\left(L - R\sqrt{1+\theta^2}\right) \ \vec{e}_y \ ,
\end{aligned}
$$

Evidentemente deve essere $\left(L - R\sqrt{1+\theta^2}\right) > 0$. Quindi dovremo verificare a posteriori che questa condizione sia verificata.

Possiamo quindi scrivere tutte le energie potenziali in gioco

$$
\begin{aligned}
U_P^{peso} &= mgy_P = -mg\left(L - R\sqrt{1+\theta^2}\right), \\
U_{disco}^{peso} &= Mgy_C = Mg\left(R\cos\alpha - R\theta\sin\alpha\right),
\end{aligned}
$$

e quella totale

$$
\begin{aligned}
U(\theta) &= U_P^{peso} + U_{disco}^{peso} \\
&= mg\left(R\sqrt{1+\theta^2} - L\right) + Mg\left(R\cos\alpha - R\theta\sin\alpha\right)
\end{aligned}
$$

Per determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e la loro stabilità dobbiamo individuare i massimi ed i mimimi della funzione $U(\theta)$. Si calcola allora $\frac{dU}{d\theta}$ e $\frac{d^2U}{d\theta^2}$. Abbiamo

$$
\frac{dU}{d\theta} = mgR\left[\frac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2}} - \beta\right],
$$

dove $\beta = \frac{M\sin\alpha}{m}$. Le configurazioni di equilibrio corrispondono agli zeri di $\frac{dU}{d\theta}$. Quindi, posto $\psi(\theta) = \frac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}$, dobbiamo determinare i valori di β per cui l'equzione $\psi(\theta) = \beta$, ammette soluzioni per $\theta \geq 0$. E' facile vedere che:

- $\psi(0) = 0$,
- $\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{1}{(1+\theta^2)\sqrt{1+\theta^2}} > 0$, per $\theta \geq 0$,
- $\lim_{\theta\to+\infty} \psi(\theta) = 1$.

Si conclude quindi che esiste una ed una sola posizione di equilibrio, θ_o, se $\beta < 1$. Tale posizione si determina risolvendo l'equazione

$$
\frac{\theta_o}{\sqrt{1+\theta_o^2}} = \beta, \quad \Rightarrow \quad \theta_o = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{1}
$$

Inoltre, siccome $\frac{d^2U}{d\theta^2} = mgR\frac{d\psi}{d\theta} > 0$, l'equilibrio è stabile. Ovviamente, come abbiamo osservato all'inizio, affinché la configurazione sia effettivamente realizzabile deve essere

$$
L - R\sqrt{1+\theta_o^2} > 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{\sqrt{1-\beta^2}} < L.
$$

(*ii*). Calcoliamo l'energia cinetica totale

$$
\begin{aligned}
T &= \underbrace{\frac{m}{2}|\dot{P-O}|^2}_{T_P} + \underbrace{\left[\frac{M}{2}|\dot{C-O}|^2 + \frac{1}{2}I_c\dot{\theta}^2\right]}_{T disco} \\
&= \frac{mR^2}{2}\left(\frac{\theta^2}{1+\theta^2} + \frac{3M}{2m}\right)\dot{\theta}^2 .
\end{aligned}
$$

(*iii*). Supponendo di aver fissato $\beta < 1$, consideriamo un punto di equilibrio stabile θ_o dato dalla (1). La funzione lagrangiana approssimata potrà essere scritta come

$$
\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathcal{A}(\theta_o)\dot{\xi}^2 - \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta_o}\xi^2 ,
$$

dove $\xi = (\theta - \theta_o)$, $\mathcal{A}(\theta_o) = mR^2\left(\frac{\theta_o^2}{1+\theta_o^2} + \frac{3M}{2m}\right)$, e

$$
\left.\frac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta_o} = mgR\left.\frac{d\psi}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_o} = \frac{mgR}{(1+\theta_o^2)\sqrt{1+\theta_o^2}} .
$$

La frequenza (al quadrato) delle piccole oscillazioni è dunque

$$
\omega^2 = \frac{\left.\frac{d^2U}{d\theta^2}\right|_{\theta=\theta_o}}{\mathcal{A}(\theta_o)} = \frac{g}{R}\left[\frac{\left(1-\beta^2\right)\sqrt{1-\beta^2}}{\beta^2 + \frac{3M}{2m}}\right].
$$