

**Prova Scritta di Sistemi Dinamici**  
**22 - 05 - 2017**

*Primo esercizio*

E' dato un punto materiale  $P$  di massa  $m$ , soggetto ad forza centrale del tipo

$$\mathbf{F} = -3a \, |P - O| (P - O) \, ,$$

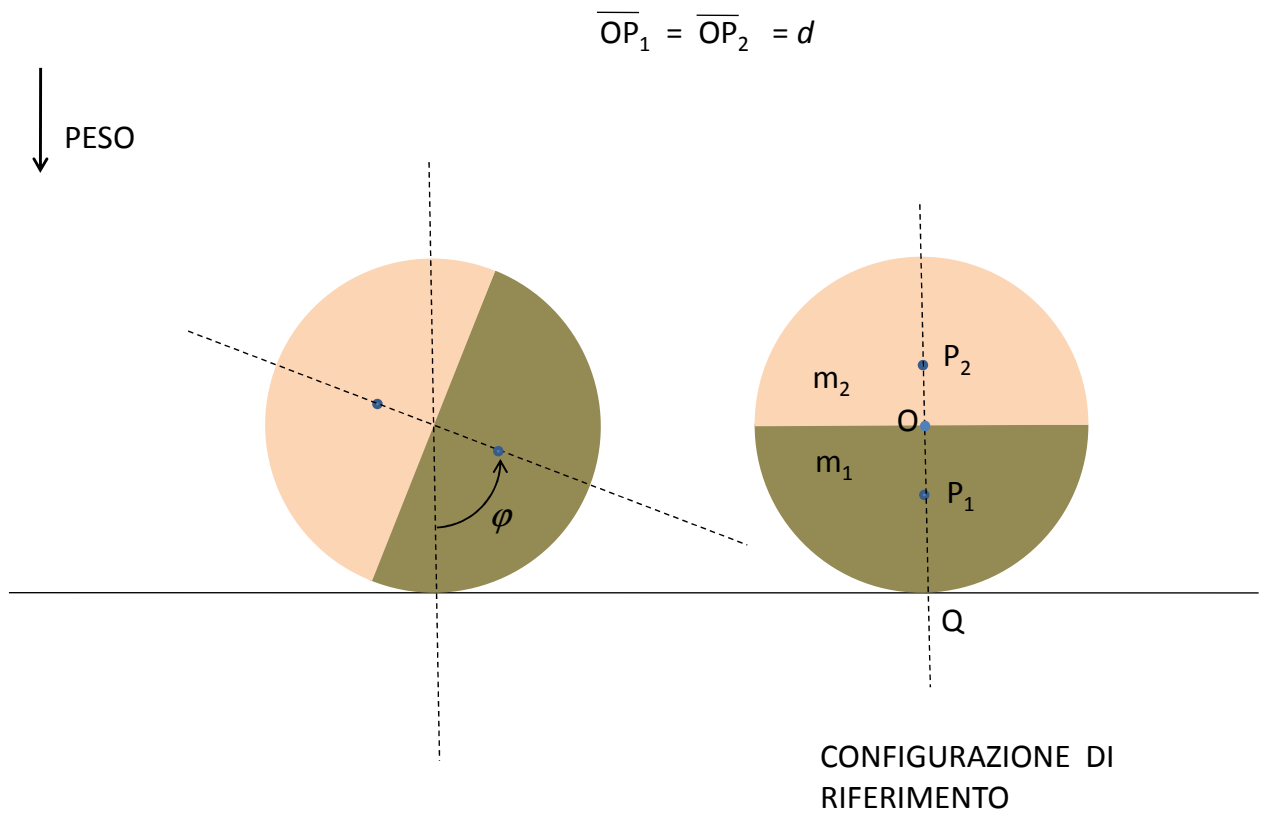
dove  $a$  è una costante positiva. Si consideri direttamente il moto piano.

- ( a ). Si scriva l'energia potenziale efficace  $V_{eff}(r)$ .
- ( b ). Supponendo che la componente radiale della velocità al tempo iniziale sia nulla, si descrivere qualitativamente il moto della particella al variare della velocità iniziale.
- ( c ). Se all'istante iniziale  $|P - O| = r_o$ , determinare la velocità iniziale di  $P$  affinché il punto materiale percorra un'orbita circolare di raggio  $r_o$ .

*Secondo esercizio*

Un disco di raggio  $R$  è formato da due semidischi omogenei di masse  $m_1$  e  $m_2$ , come mostrato in figura.

- ( a ). Determinare una terna principale d'inerzia che sia centrata in  $O$ , centro del disco e calcolare la relativa matrice d'inerzia.
- ( b ). Si supponga adesso che il disco possa rotolare senza strisciare su una guida rettilinea e che sia soggetto alla forza peso diretta come in figura. Sapendo che nella configurazione di riferimento i centri di massa dei due semidischi hanno coordinate  $P_1 \equiv (0, R - d)$  e  $P_2 \equiv (0, R + d)$  con  $d < R$  (v. figura), si utilizzi come parametro lagrangiano l'angolo di rotolamento  $\varphi$ ,  $\varphi \in \mathbb{R}$  (positivo per rotazioni antiorarie), misurato a partire dalla configurazione di riferimento. Determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità al variare di  $\mu = m_2/m_1 \neq 1$ .
- ( c ). Considerando le ipotesi del punto (b), ovvero rotolamento puro, si scriva l'energia cinetica del disco.



## SVOLGIMENTO

### *Primo esercizio*

( a ). Facendo uso delle coordinate polari abbiamo

$$\mathbf{F} = -3ar^2 \boldsymbol{\kappa}_r ,$$

dove  $|P - O| = r$  e  $\boldsymbol{\kappa}_r = (P - O) / |P - O|$  è il versore radiale. Siccome

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V}{\partial r} \boldsymbol{\kappa}_r ,$$

abbiamo

$$V(r) = ar^3 .$$

Sempre utilizzando le coordinate polari abbiamo

$$(P - O) = r \cos \varphi \mathbf{e}_x + r \sin \varphi \mathbf{e}_y ,$$

per cui

$$\dot{(P - O)} = \dot{r} \boldsymbol{\kappa}_r + r \dot{\varphi} \boldsymbol{\kappa}_\varphi , \quad (1)$$

dove  $\boldsymbol{\kappa}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y$ . L'energia cinetica di  $P$  è dunque

$$T = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) ,$$

e la funzione di Lagrange

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) - ar^3 .$$

La variabile  $\varphi$  è ciclica, per cui

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = A_o, \quad \implies \quad \dot{\varphi} = \frac{A_o}{m r^2} , \quad (2)$$

con  $A_o$  costante che dipende dai dati iniziali.

Per determinare l'energia potenziale efficace conviene passare dalla funzione Hamiltonia

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= m \left( \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{r^2 \dot{\varphi}^2}{2} \right) + ar^3 \\ &= m \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{A_o^2}{2m} \frac{1}{r^2} + ar^3 . \end{aligned}$$

L'energia potenziale efficace è dunque

$$V_{eff}(r) = \frac{A_o^2}{2m} \frac{1}{r^2} + ar^3 . \quad (3)$$

( b ). Applicando la (1) si ha

$$\dot{(P - O)}|_{t=0} = \dot{r}(0) \boldsymbol{\kappa}_r + r(0) \dot{\varphi}(0) \boldsymbol{\kappa}_\varphi ,$$

che, in virtù dell'ipotesi  $\dot{r}(0) = 0$ , si riduce a

$$\dot{(P - O)}|_{t=0} = r(0) \dot{\varphi}(0) \boldsymbol{\kappa}_\varphi ,$$

Abbiamo dunque i seguenti casi:

- $\dot{\varphi}(0) = 0 \implies A_o = 0$ , per cui  $V_{eff}(r) = ar^3$ . Il moto quindi è puramente radiale, cioè  $\varphi(t) = \varphi|_{t=0}$ . Il moto avviene sempre sulla stessa retta caratterizzata dall'angolo  $\varphi|_{t=0}$ . Il punto materiale quindi compie un moto limitato oscillatorio attorno all'origine.
- $\dot{\varphi}(0) \neq 0$ . In tal caso  $A_o \neq 0$ , per cui  $V_{eff}(r)$  è dato dalla (3). E' facile verificare che  $\lim_{r \rightarrow 0} V_{eff}(r) = \infty$  e che  $\lim_{r \rightarrow \infty} V_{eff}(r) = \infty$ . Inoltre

$$V'_{eff}(r) = -\frac{A_o^2}{m} \frac{1}{r^3} + 3ar^2, \quad V''_{eff}(r) = 3\frac{A_o^2}{m} \frac{1}{r^4} + 6ar > 0,$$

e quindi esiste un solo minimo. Il moto è quindi limitato e periodico in  $r$ . Per quel che riguarda  $\varphi(t)$  questa è monotona crescente se  $\dot{\varphi}(0) > 0$  oppure monotona decrescente se  $\dot{\varphi}(0) < 0$ . La particella quindi ruota attorno al centro  $O$  mentre la sua distanza da  $O$ , cioè  $r$ , oscilla fra  $r_{\min}$  ed un  $r_{\max}$  (entrambi positivi).

( c ). Se  $r_o$  è un'orbita circolare allora  $V'_{eff}(r_o) = 0$ , cioè

$$-\frac{A_o^2}{m} \frac{1}{r_o^3} + 3ar_o^2 = 0, \implies r_o^5 = \frac{A_o^2}{3am}.$$

Siccome l'orbita è circolare,  $r(t) = r_o$ , per ogni  $t \geq 0$  e quindi  $\dot{r}(t) = 0$ . Determinare la velocità iniziale significa dunque determinare  $\dot{\varphi}(0)$ . Ricordando la (2) si ha

$$3amr_o^5 = m^2 r_o^4 \left( \dot{\varphi}(0) \right)^2,$$

per cui

$$\dot{\varphi}(0) = \pm \sqrt{\frac{3a r_o}{m}}.$$

Sfruttano dunque la (1) otteniamo la velocità iniziale

$$(P - O)|_{t=0} = r_o \dot{\varphi}(0) \boldsymbol{\kappa}_\varphi = \pm r_o \sqrt{\frac{3a r_o}{m}} \boldsymbol{\kappa}_\varphi.$$

## Secondo esercizio

( a ). Sia  $z$  l'asse ortogonale al piano del disco e che passa per  $O$ . L'asse  $z$  è principale d'inerzia perchè il sistema è piano. Sia  $x$  l'asse che giace sul piano del disco, passa per  $O$  ed è allineato lungo il diametro in cui i due semidischi sono a contatto. L'asse  $y$  passa per  $O$ , giace sul piano del disco ed è ortogonale all'asse  $x$ . L'asse  $x$  è principale d'inerzia perchè ortogonale al piano  $y, z$ , piano di simmetria materiale del sistema. Quindi, il SdR  $\{O, x, y, z\}$  è principale d'inerzia e la relativa matrice d'inerzia è data da

$$\mathbb{I}(O) = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}.$$

Data la proprietà di additività dei momenti d'inerzia, abbiamo

$$I_z(O) = I_z^{(1)}(0) + I_z^{(2)}(0),$$

dove  $I_z^{(i)}(0)$ ,  $i = 1, 2$ , rappresenta il momento d'inerzia del  $i$ -esimo semidisco e dunque  $I_z^{(i)}(O) = m_i \frac{R^2}{2}$ . Abbiamo così

$$I_z(O) = (m_1 + m_2) \frac{R^2}{2}.$$

In modo analogo si ottiene

$$I_y(O) = I_y^{(1)}(0) + I_y^{(2)}(0) = (m_1 + m_2) \frac{R^2}{4},$$

dal momento che  $I_y^{(i)}(O) = m_i \frac{R^2}{4}$ ,  $i = 1, 2$ . Infine

$$I_x(O) = I_z(O) - I_y(O) = (m_1 + m_2) \frac{R^2}{4}.$$

( b ). Per determinare le posizioni di equilibrio dobbiamo trovare gli zeri dell'energia potenziale

$$V(\varphi) = m_1 g y(P_1) + m_2 g y(P_2),$$

dove  $y(P_i)$ ,  $i = 1, 2$  sono le quote rispetto alla guida orizzontale dei centri di massa dei due semidischi. Si devono quindi scrivere i vettori posizione dei centri di massa dei due semidischi. Considerando la configurazione di riferimento indicata in figura, abbiamo

$$\begin{aligned} P_1 - Q &= (-R\varphi + d \sin \varphi) \mathbf{e}_x + (R - d \cos \varphi) \mathbf{e}_y, \\ P_2 - Q &= (-R\varphi - d \sin \varphi) \mathbf{e}_x + (R + d \cos \varphi) \mathbf{e}_y. \end{aligned}$$

Quindi

$$V(\varphi) = m_1 g (R - d \cos \varphi) + m_2 g (R + d \cos \varphi),$$

per cui

$$\begin{aligned} V'(\varphi) &= m_1 g d \sin \varphi - m_2 g d \sin \varphi = m_1 g d (1 - \mu) \sin \varphi, \\ V''(\varphi) &= m_1 g d (1 - \mu) \cos \varphi. \end{aligned}$$

Le posizioni di equilibrio sono dunque

$$\sin \varphi = 0, \Rightarrow \varphi = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Per quanto riguarda l'equilibrio, abbiamo i seguenti casi.

**Primo caso**  $\mu < 1 \Leftrightarrow m_1 > m_2$ .

- $\varphi = 2k\pi$ , equilibrio stabile.
- $\varphi = (2k + 1)\pi$ , equilibrio instabile.

**Secondo caso**  $\mu > 1 \Leftrightarrow m_1 < m_2$ .

- $\varphi = 2k\pi$ , equilibrio instabile.
- $\varphi = (2k + 1)\pi$ , equilibrio stabile.

( c ). Se trattiamo il disco come unione dei due semidischi rigidi possiamo scrivere

$$T = T_1 + T_2,$$

dove

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{m_1}{2} (\dot{P}_1 - \dot{Q})^2 + \frac{1}{2} I_z(P_1) \dot{\varphi}^2, \\ T_2 &= \frac{m_2}{2} (\dot{P}_2 - \dot{Q})^2 + \frac{1}{2} I_z(P_2) \dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

Abbiamo dunque

$$(P_1 - Q) = [(-R + d \cos \varphi) \mathbf{e}_x + d \sin \varphi \mathbf{e}_y] \dot{\varphi} ,$$

$$(P_2 - Q) = [(-R - d \cos \varphi) \mathbf{e}_x - d \sin \varphi \mathbf{e}_y] \dot{\varphi} ,$$

mentre, per quel che riguarda i momenti d'inerzia, si applica il teorema di Huygens

$$I_z^{semidisco\ 1}(O) = I_z(P_1) + m_1 d^2, \quad \Rightarrow \quad I_z(P_1) = \frac{m_1 R^2}{2} - m_1 d^2,$$

$$I_z^{semidisco\ 2}(O) = I_z(P_2) + m_2 d^2, \quad \Rightarrow \quad I_z(P_2) = \frac{m_2 R^2}{2} - m_2 d^2.$$

In definitiva otteniamo

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1 + m_2}{2} (R^2 + d^2) \dot{\varphi}^2 + (m_2 - m_1) R d \cos \varphi \dot{\varphi}^2 + \\ &\quad \frac{m_1 + m_2}{2} \left( \frac{R^2}{2} - d^2 \right) \dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{3}{4} (m_1 + m_2) R^2 \dot{\varphi}^2 + (m_2 - m_1) R d \cos \varphi \dot{\varphi}^2 . \end{aligned}$$