Prova Scritta di Sistemi Dinamici
14 - settembre - 2015

Primo esercizio

Un punto materiale di massa $m = 1$, è vincolato a muoversi senza attrito sull'asse x. Il punto è soggetto ad una forza la cui energia potenziale è

$$V(x) = V_o\left(1 - e^{-x^2}\right), \quad \text{con} \quad V_o > 0.$$

(a). Si scriva la funzione di Lagrange del punto materiale e l'equazione del moto.

(b). Detta E l'energia meccanica totale, si rappresentino, al variare di E, le orbite nel piano delle fasi $\left(x, \dot{x}\right)$.

(c). Si supponga adesso che l'asse x ruoti sul piano con velocità angolare costante ω. Si determini l'energia potenziale efficace supponendo che il punto materiale sia soggetto alla stessa energia potenziale $V(x) = V_o\left(1 - e^{-x^2}\right)$.

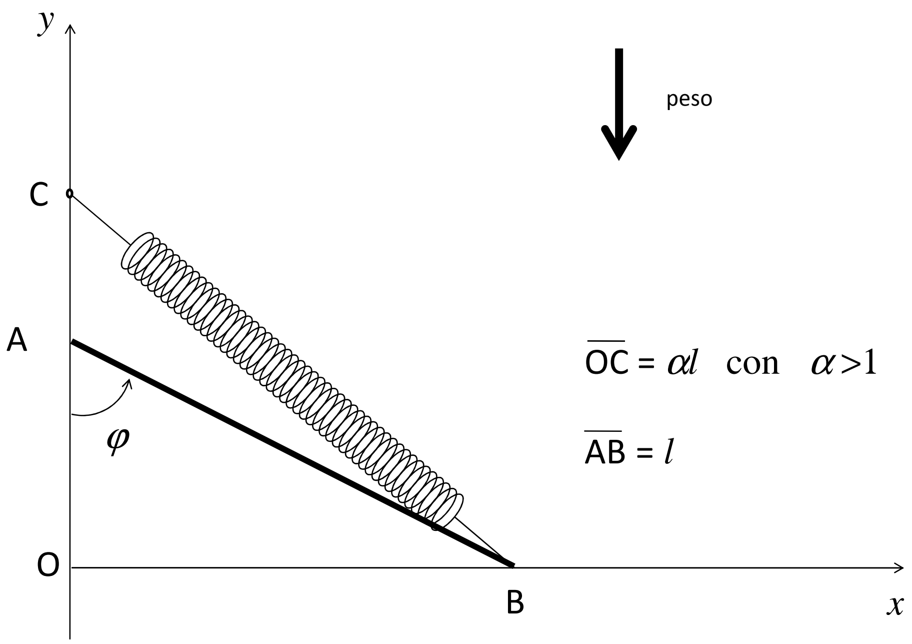
Secondo esercizio

Un'asta omogenea AB di massa m ha l'estremo vincolato A a scorrere sull'asse verticale y mentre l'estremo B scorre sul semiasse orizzontale x (v. figura). L'estremo B è collegato tramite una molla di massa e lunghezza a riposo trascurabili al punto $C \equiv (0, \alpha l)$, dove$\alpha > 1$. La rigidezza della molla è k, i vincoli sono lisci e la forza peso è diretta come in figura. Si prenda come variabile lagrangiana l'angolo φ, $\varphi \in [0, \pi]$, che AB forma con l'asse y.

(a). Posto $\beta = \dfrac{mg}{2kl}$, determinare le posizioni di equilibrio al variariare di β.

(b). Si calcoli il valore di β per cui $\varphi = \pi/4$ è posizione di equilibrio. Tale posizione risulta stabile?

(c). Si calcoli l'energia cinetica dell'asta nell'ipotesi che la massa totale m di AB non sia distribuita omogeneamente ma secondo la densità $\lambda(P) = \dfrac{4m}{l^2}|P - P_o|$, $P \in AB$, con P_o punto di mezzo dell'asta.


y
peso
C
A
φ
$\overline{OC} = \alpha l$ con $\alpha > 1$
$\overline{AB} = l$
O
B
x

SVOLGIMENTO

Primo esercizio

(a) . La Lagrangiana è

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{x}^2}{2} - V(x) = \frac{\dot{x}^2}{2} - V_o\left(1 - e^{-x^2}\right).$$

L'equazione del moto è

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + 2V_o\ x\ e^{-x^2} = 0.$$

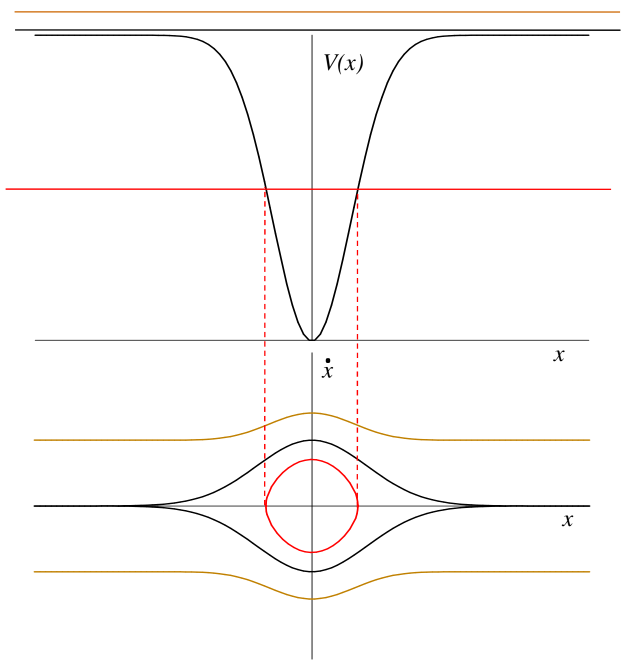
(b) . L'energia meccanica E (che si conserva) è data da

$$E = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V_o\left(1 - e^{-x^2}\right),$$

per cui $\dot{x}^2 = 2\left(E - V_o\left(1 - e^{-x^2}\right)\right)$. Di conseguenza E è un valore ammissibile per l'energia meccanica se

$$E \geq \min V(x) = 0.$$

Quindi avremo orbite limitate se $0 \leq E < V_o$, ed orbite illimitate se $E \geq V_o$. Le orbite nel piano delle fasi sono schematicamente rappresentate nella seguente figura.



(c) . Se $\{O, \xi, \eta\}$ è un SdR fisso nel piano, il vettore posizione del punto materiale è dato da

$$\boldsymbol{x} = x\cos\omega t\boldsymbol{e}_\xi + x\sin\omega t\boldsymbol{e}_\eta\ .$$

La velocità del punto è

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \left(\dot{x}\cos\omega t - x\omega\sin\omega t\right)\boldsymbol{e}_\xi + \left(\dot{x}\sin\omega t + x\omega\cos\omega t\right)\boldsymbol{e}_\eta \ ,$$

da cui $\left|\dot{\boldsymbol{x}}\right|^2 = \dot{x}^2 + x^2\omega^2$. La funzione di Lagrange è dunque

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + x^2\omega^2\right) - V_o\left(1 - e^{-x^2}\right).$$

Per determinare l'energia potenziale efficace scriviamo la funzione Hamiltoniana ed isoliamo in essa i termini che non dipendono da $\dot{x}$. Abbiamo

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\dot{x} - \mathcal{L} = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{\omega^2}{2}x^2 + V_o\left(1 - e^{-x^2}\right),$$

da cui

$$V_{eff}\left(x\right) = -\frac{\omega^2}{2}x^2 + V_o\left(1 - e^{-x^2}\right) \ .$$

Secondo esercizio

(a) . Determiniamo i vettori posizione del centro di massa P_o dell'asta, del punto A, del punto B e di C

$$\begin{aligned}
P_o - O &= \frac{l}{2}\sin\varphi\boldsymbol{e}_x + \frac{l}{2}\cos\varphi\boldsymbol{e}_y \ ,\\
A - O &= l\cos\varphi\ \boldsymbol{e}_y \ ,\\
B - O &= l\sin\varphi\ \boldsymbol{e}_x \ ,\\
C - O &= \alpha l\ \boldsymbol{e}_y \ .
\end{aligned}$$

L'energia poteziale totale del sistema è

$$V = \underbrace{mg\frac{l}{2}\cos\varphi}_{V_{peso}} + \underbrace{\frac{k}{2}\left[l^2\sin^2\varphi + \alpha^2 l^2\right]}_{V_{molla}} \ .$$

Le posizioni di equilibrio si trovano calcolando gli zeri di $V'\left(\varphi\right)$, cioè

$$\begin{aligned}
V'\left(\varphi\right) &= -mg\frac{l}{2}\sin\varphi + kl^2\sin\varphi\cos\varphi\\
&= kl^2\sin\varphi\Big[\cos\varphi - \underbrace{\frac{mg}{2kl}}_{\beta}\Big] \ .
\end{aligned}$$

Quindi $V'\left(\varphi\right) = 0$ è soddisfatta se $\sin\varphi = 0, \Longrightarrow \varphi = 0, \pi$. Abbiamo poi

$$\cos\varphi = \beta$$

che è soddisfatta soltanto se $\beta \leq 1$. Ricapitolando:

- Se $\beta > 1$, le configurazioni di equilibrio sono soltanto $\varphi = 0$, e $\varphi = \pi$.
- Se $\beta \leq 1$, abbiamo $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, e $\varphi = \arccos\beta$.

(b). Se $\varphi = \pi/4$ è configurazione di equilibrio allora $V'(\pi/4) = 0$, cioè

$$0 = kl^2 \sin\frac{\pi}{4}\left(\cos\frac{\pi}{4} - \beta\right) = \frac{\sqrt{2}kl^2}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \beta\right),$$

da cui ricaviamo $\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. La derivata dell'energia potenziale è dunque

$$V'(\varphi) = kl^2 \sin\varphi\left(\cos\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

mentre la derivata seconda è

$$\begin{aligned} V''(\varphi) &= kl^2\cos\varphi\left(\cos\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - kl^2\sin^2\varphi \\ &= kl^2\left(-\sin^2\varphi + \cos^2\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi\right). \end{aligned}$$

Siccome $V''(\pi/4) = -\dfrac{kl^2}{2} < 0$, $\Longrightarrow$ $\varphi = \pi/4$ è una configurazione di equilibrio instabile.

(c) . L'energia cinetica T è

$$T = \frac{m}{2}(\dot{P_o - O})^2 + \frac{1}{2}I(P_o)\dot{\varphi}^2.$$

Bisogna calcolare il momento d'inerzia della sbarretta sapendo che la massa non è distribuita uniformemente. E' infatti data la densità lineare di massa (massa per unità di lunghezza) $\lambda(P) = \dfrac{4m}{l^2}|P - P_o|$, che, introducendo un SdR centrato in P_o con l'asse ξ orientato lungo la sbarretta, scriveremo come

$$\lambda(\xi) = \frac{4m}{l^2}|\xi|, \quad \text{con} \quad \xi \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right].$$

La misura di massa dm è dunque data da $dm = \dfrac{4m}{l^2}|\xi|\,d\xi$.
Verifichiamo dapprima che la massa totale della sbarretta sia m

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dm = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{4m}{l^2}|\xi|\ d\xi = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{4m}{l^2}\xi\ d\xi = \frac{8m}{l^2}\int_0^{\frac{l}{2}} \xi\ d\xi = m.$$

Il momento d'inerzia rispetto ad un asse perpendicolare alla sbarretta passante per P_o è dato da

$$\begin{aligned} I(P_o) &= \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \xi^2\ dm = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \xi^2\ \frac{4m}{l^2}|\xi|\ d\xi = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{4m}{l^2}\xi^3\ d\xi \\ &= \frac{8m}{l^2}\int_0^{\frac{l}{2}} \xi^3\ d\xi = \frac{ml^2}{8}. \end{aligned}$$

In conclusione

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{l}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi\boldsymbol{e}_x - \frac{l}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi\boldsymbol{e}_y\right)^2 + \frac{ml^2}{16}\dot{\varphi}^2 = \frac{3}{16}ml^2\dot{\varphi}^2.$$