Secondo Compitino Sistemi Dinamici
13 - 05 - 2016

Primo esercizio

E' data una lamina piana costituita dal triangolo AOB e COD, disposti come in figura 1. La lamina è omogenea e la sua massa totale è m. I lati AB e CD hanno medesima lunghezza l, mentre $AD = BC = l\sqrt{2}$.

(*a*) . Determinare il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse z, asse perpendicolare al piano della lamina passante per il punto O. Determinare poi il momento d'inerzia rispetto ad una retta parallela all'asse z passante per il punto A.

(*b*) . Determinare il momento d'inerzia della lamina rispetto alla retta BC.

(*c*) . Dire se il SdR ortonormale centrato nel punto O, in cui l'asse x coincide con la retta BC e l'asse y coincide con la retta DA e l'asse z è ortogonale al piano della lamina è, o meno, terna principale d'inerzia. Si motivi la risposta.

Secondo esercizio

Sono date due aste, OA e BC, aventi la stessa massa m. L'asta OA è incernierata nel punto O ed è lunga $2l$, l'asta BC, lunga l, ha l'estremo C vincolato a scorrere sull'asse y e l'estremo B incernierato sul punto di mezzo dell'asta OA (v. figura 2). Tutti i vincoli sono lisci ed il peso è diretto come in figura. Considerando soltanto le configurazioni in cui C si trova al di sotto di B, si prenda come parametro lagrangiano θ l'angolo che l'asta OA forma con la verticale, considerando $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(*a*) . Si determinino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità.

(*b*) . Si trovi la frequenza delle piccole oscillazioni in corrsipondenza della configurazione di equilibrio stabile.

(*c*) . Si dica come deve essere selezionata la forza $\boldsymbol{F} = F\boldsymbol{e}_x$ applicata nel punto A affinché $\theta_o \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, sia configurazione di equilibrio.

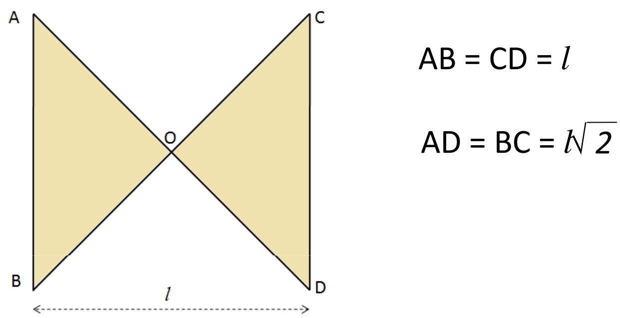

FIGURA 1

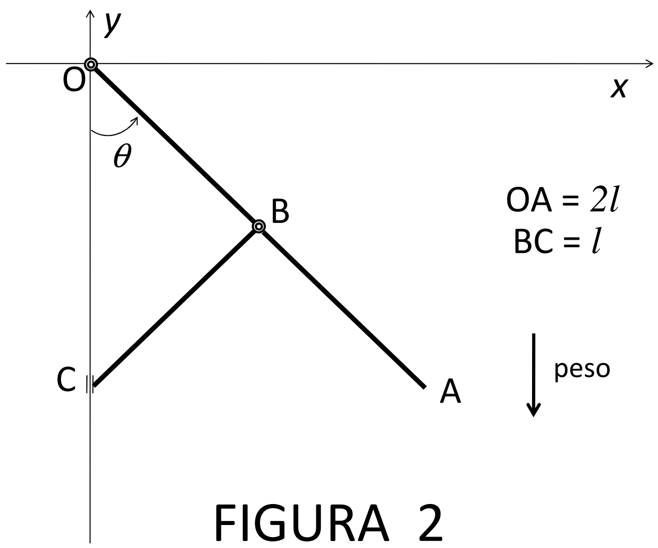

FIGURA 2

SVOLGIMENTO

Primo esercizio

(a). La lamina può essere vista come la metà del quadrato (virtuale) $ABDC$, di massa $2m$. Il quadrato è dunque l'unione della lamina di massa m, e di una lamina virtuale, avente stessa massa e stessa forma a "farfalla" ma disposta verticalmente. Le due lamine a forma di "farfalla", che costituiscono il quadrato virtuale, hanno, per motivi di simmetria, il medesimo momento di'inerzia rispetto all'asse z (asse perpendicolare al piano) passante per O, che denotiamo con $I_z(O)$. Potremo dunque scrivere

$$2I_z(O) = \frac{2m}{12}\left(l^2 + l^2\right) \qquad \Longrightarrow \qquad I_z(O) = \frac{ml^2}{6}.$$

Ovviamente O è il centro di massa della lamina, e dunque per calcolare $I_z(A)$ possiamo applicare il teorema di Huygens. Avremo così

$$I_z(A) = \frac{ml^2}{6} + m\,\overline{OA}^{\,2} = \frac{ml^2}{6} + m\left(\frac{\sqrt{2}}{2}l\right)^2 = \frac{2}{3}ml^2 \ .$$

(b). Consideriamo il SdR ortonormale centrato in O, in cui l'asse x coincide con la retta BC, l'asse y con la retta DA mentre l'asse z è ortogonale al piano, come specificato al precedente punto (a). Siccome il sistema è piano, abbiamo

$$I_x(O) + I_y(O) = I_z(O) = \frac{ml^2}{6}.$$

Per i soliti (ovvi) motivi di simmetria $I_x(O) = I_y(O)$, e dunque

$$I_x(O) = \frac{ml^2}{12}.$$

(c). Il sistema è piano per cui la matrice d'inerzia rispetto al SdR $\{O, x, y, z\}$ è di questo tipo

$$\mathbb{I}(O) = \begin{pmatrix} I_x(O) & I_{xy}(O) & 0 \\ I_{xy}(O) & I_y(O) & 0 \\ 0 & 0 & I_z(O) \end{pmatrix},$$

dove $I_x(O) = I_y(O)$ e $I_z(O)$ sono stati calcolati ai precedenti punti. La terna sarà principale d'inerzia se $I_{xy}(O) = 0$. Ricordando la definizione di $I_{xy}(O)$, abbiamo

$$I_{xy}(O) = -\sum_{i=1}^{N} m_i x_i y_i \ ,$$

dove i è l'indice che denota il punto materiale ed x_i, y_i sono ascissa ed ordinata dell'i-esimo punto materiale rispetto al SdR selezionato. Separiamo la sommatoria in due: una per i soli punti del triangolo (AOB) ed una per quelli del triangolo (COD),

$$I_{xy}(O) = -\left(\sum_{i\in(AOB)} m_i x_i y_i + \sum_{i\in(COD)} m_i x_i y_i\right).$$

Per come sono orientati gli assi, $x_i y_i \leq 0$, $\forall\ i \in (AOB)$, e $x_i y_i \leq 0$, $\forall\ i \in (COD)$. Entrambe le sommatorie sono dunque negative e la loro somma non può certamente annullarsi. Ne deduciamo che il SdR $\{O, x, y, z\}$ non è una terna principale d'inerzia.

Secondo esercizio

(a). Si individuano i vettori posizione dei principali punti del sistema

$$B - O = l\sin\theta \boldsymbol{e}_x - l\cos\theta \boldsymbol{e}_y \ ,$$

$$A - O = 2l\sin\theta \boldsymbol{e}_x - 2l\cos\theta \boldsymbol{e}_y \ ,$$

$$C - O = -2l\cos\theta \ \boldsymbol{e}_y \ ,$$

$$P_o - O = \frac{l}{2}\sin\theta \boldsymbol{e}_x - \frac{3l}{2}\cos\theta \boldsymbol{e}_y \ ,$$

dove P_o è il centro di massa dell'asta BC.

L'energia potenziale dovuta alla forza peso ha due contributi: quello dovuto all'asta AO e quello dovuto all'asta BC, cioè

$$V(\theta) = -mgl\cos\theta - \frac{3}{2}mgl\cos\theta = -\frac{5}{2}mgl\cos\theta \ .$$

Le configurazioni di equilibrio si trovano risolvendo $V'(\theta) = 0$,

$$V'(\theta) = \frac{5}{2}mgl\sin\theta = 0, \quad \Longrightarrow \quad \theta = 0. \tag{1}$$

La soluzione $\theta = \pm\pi$, non è accettabile in quanto non rientra nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$. Calcolando la derivata seconda, $V''(\theta) = \frac{5}{2}mgl\cos\theta$, possiamo stabilire se la configurazione $\theta = 0$ è stabile o no. Abbiamo

$$V''(0) = \frac{5}{2}mgl > 0, \quad \Longrightarrow \quad \theta = 0 \ \text{ equilibrio stabile.}$$

(b). Per calcolare la frequanza (al quadrato) delle piccole oscillazioni attorno a $\theta = 0$, dobbiamo determinare (a meno di costanti) la funzione lagrangiana approssimata

$$\mathcal{L}_{app} = \frac{1}{2}a(0)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\underbrace{V''(0)}_{\frac{5}{2}mgl}\theta^2 \ ,$$

da cui

$$\omega^2 = \frac{V''(0)}{a(0)} = \frac{5mgl}{2\ a(0)} \ .$$

E' dunque necessario calcolare l'energia cinetica dell'intero sistema

$$\begin{aligned} T &= \underbrace{\left(\frac{1}{2}I(O)\dot{\theta}^2\right)}_{T_{OA}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}m(\dot{P_o - O})^2 + \frac{1}{2}I(P_o)\dot{\theta}^2\right)}_{T_{BC}} \\ &= \frac{1}{2}\left[I(O)\dot{\theta}^2 + m(\dot{P_o - O})^2 + I(P_o)\dot{\theta}^2\right]. \end{aligned}$$

Abbiamo

$$I(O) = \frac{m}{12}(2l)^2 + ml^2 = \frac{4}{3}ml^2 \ ,$$

$$m(\dot{P_o - O})^2 = \frac{ml^2}{4}\left(1 + 8\sin^2\theta\right)\dot{\theta}^2,$$

da cui

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}ml^2 + \frac{ml^2}{4}\left(1+8\sin^2\theta\right) + \frac{ml^2}{12}\right]\dot{\theta}^{\,2} \\ &= \frac{1}{2}\underbrace{\left[ml^2\left(\frac{5}{3}+2\sin^2\theta\right)\right]}_{a(\theta)}\dot{\theta}^{\,2}\ . \end{aligned}$$

Quindi

$$\omega^2 = \frac{5mgl}{2\ a\,(0)} = \frac{3}{2}\frac{g}{l}\ .$$

(c) . Si può procedere applicando la prima e la seconda equazione cardinale oppure l'equazione simbolica della statica. Seguendo quest'ultima strada, abbiamo

$$\left[-\frac{\partial V}{\partial \theta} + F\boldsymbol{e}_x \cdot \frac{\partial\,(A-O)}{\partial \theta}\right]_{\theta=\theta_o} = 0.$$

Siccome $\dfrac{\partial\,(A-O)}{\partial\theta} = 2l\cos\theta\boldsymbol{e}_x + 2l\sin\theta\boldsymbol{e}_y$, ricordando la (1) otteniamo

$$-\frac{5}{2}mgl\sin\theta_o + 2Fl\cos\theta_o = 0, \quad \Rightarrow \quad F = \frac{5}{4}mg\tan\theta_o\ .$$