**Prova Scritta di Sistemi Dinamici**
**12 - 01 - 2015**

*Primo esercizio*

Un punto materiale di massa $m$ è soggetto alla forza di tipo centrale

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\ln r}{r}\ \boldsymbol{e}_r.$$

( $a$ ) . Si scriva la Lagrangiana considerando direttamente il moto piano.

( $b$ ) . Si determini l'energia potenziale efficace $V_{eff}\,(r)$ e se ne tracci approssimativamente il grafico.

( $c$ ) . Si dimostri che esiste un'unica orbita circolare stabile il cui raggio è maggiore di 1.

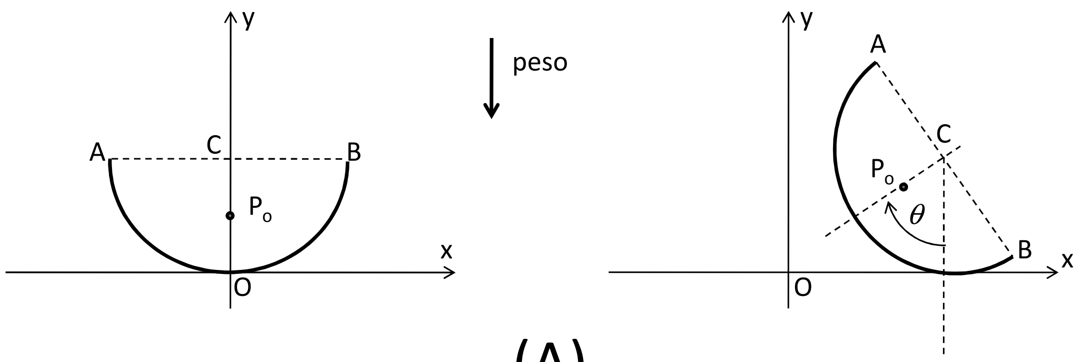
*Secondo esercizio*

Un sistema rigido è costituito da una semicirconferenza omogena $AB$, di raggio $R$ e massa $m$. La semicirconferenza è vincolata a rotolare senza strisciare su una guida orizzontale. Se $C$ è il centro del segmento $AB$ e $P_o$ il centro di massa (si veda la figura (A)), sia $b = |C - P_o|$ (nel caso specifico $b = \frac{2}{\pi}R$). Si utilizzi come variabile l'angolo di rotolamento $\theta$, $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, con $\theta > 0$ per rotazioni antiorarie. La forza peso è diretta come in figura (A).

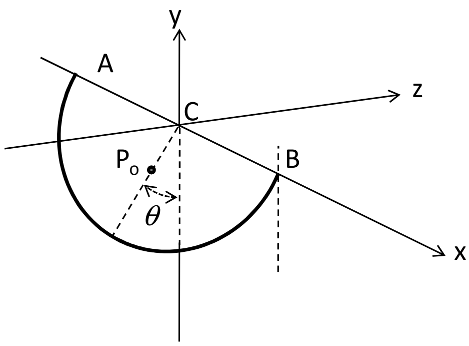
( $a$ ) . Determinare l'energia cinetica della semicirconferenza.

( $b$ ) . Determinare la forza verticale $\boldsymbol{F}$ che deve essere applicata all'estremo $B$ affinché la semicirconferenza sia in equilibrio nella generica configurazione $\theta$.

( $c$ ) . Facendo adesso riferimento alla figura (B), la semicirconferenza è incernierata alla guida orizzontale negli estremi $A$ e $B$. Le cerniere non presentano attrito e non possono traslare lungo la guida orizzontale. Indicando con $\theta$ l'angolo che il piano contenete la semicirconferenza forma col piano $x, y$, si scriva l'equazione di moto e si determini il periodo delle piccole oscillazioni.




(A)




(B)

**SVOLGIMENTO**

*Primo esercizio*

( $a$ ) . Lavorando direttamente sul piano, la posizione del punto materiale, rispetto ad un s.d.r. cartesiano centrato in $O$, è data dal vettore

$$P-O = r\cos\phi\ \boldsymbol{e}_1 + r\sin\phi\ \boldsymbol{e}_2\ ,$$

dove $r(t) > 0$, e $\phi(t) \in [0, 2\pi)$, sono le due coordinate lagrangiane. La velocità del punto è

$$(P \dot{-} O) = \left(\dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(\dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi\right)\ \boldsymbol{e}_2\ ,$$

per cui $|P \dot{-} O|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2$, e quindi l'energia cinetica è $T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right)$.

L'enrgia potenziale è data da

$$V(r) = -\int\left(-\frac{\ln r}{r}\right)dr = \frac{1}{2}(\ln r)^2\,,$$

e di conseguenza la Lagrangiana è

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) - \frac{1}{2}(\ln r)^2\,.$$

( $b$ ) . Un integrale primo del moto è $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}$, cioè

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} = A_o, \quad\Longrightarrow\quad \dot{\phi} = \frac{A_o}{mr^2},$$

dove $A_o$ è una costante che si determina in base alle condizioni iniziali. Scrivendo l'equazione per la variabile $r$ otteniamo

$$m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + \frac{\ln r}{r} = 0,$$

ovvero

$$m\ddot{r} = \underbrace{\left(\frac{A_o^2}{m}\right)\frac{1}{r^3} - \frac{\ln r}{r}}_{-\frac{dV_{eff}}{dr}}\,.$$

Quindi

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = -\left(\frac{A_o^2}{m}\right)\frac{1}{r^3} + \frac{\ln r}{r}, \quad\Rightarrow\quad V_{eff}(r) = \frac{\beta}{2}\frac{1}{r^2} + \frac{1}{2}(\ln r)^2\,,$$

dove $\beta = \dfrac{A_o^2}{m} > 0$.

Analizzando la funzione $V_{eff}(r)$ per $r > 0$, si nota subito che la stessa è sempre positiva e che

$$\lim_{r\to 0} V_{eff}(r) = +\infty, \qquad \lim_{r\to\infty} V_{eff}(r) = +\infty.$$

Inoltre+

$$V'_{eff}(r) = \frac{1}{r^3}\left(-\beta + r^2\ln r\right),$$

per cui $V'_{eff}(r) \geq 0$ per $r^2\ln r \geq \beta$. Ora la funzione

$$f(r) = r^2\ln r,$$

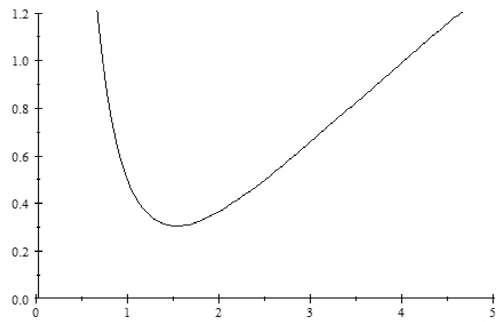
è positiva e monotona crescente per $r > 1$, e $\lim_{r\to\infty} r^2 \ln r = +\infty$. Infatti

$$f'(r) = 2r\ln r + r > 0, \quad \forall \;\; r > 1.$$

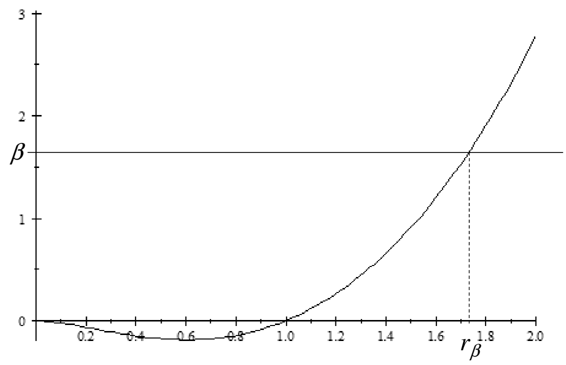
Di conseguenza l'equazione

$$r^2 \ln r = \beta, \tag{1}$$

ammette una ed una sola soluzione, che indicheremo con $r_\beta$. Quindi $V'_{eff}(r) \geq 0$ per $r \geq r_\beta$, e di conseguenza $V_{eff}$ ha un minimo in corrispondenza di $r_\beta$. L'andamento qualitativo di $V_{eff}(r)$ è riportato nella sottostante figura.




( $c$ ). Dalla studio del grafico di $V_{eff}(r)$ deduciamo che esiste una sola orbita circolare e che questa è stabile. La funzione $V_{eff}(r)$ presenta infatti un solo minimo. Il raggio dell'orbita circolare corrisponde a $r_\beta$, punto di minimo di $V_{eff}(r)$ e soluzione dell'equazione (1). L'andamento di $f(r)$, riportato nel sottostante grafico, mostra che $r_\beta$, soluzione dell'equazione $f(r) = \beta$, con $\beta > 0$, è maggiore di 1.




La stabilità dell'orbita può anche essere provata valutando la derivata seconda di $V_{eff}(r)$ in $r_\beta$. Abbiamo infatti

$$V''_{eff}(r) = \frac{3\beta}{r^4} - \frac{1}{r^2}\ln r + \frac{1}{r^2} = \frac{3\beta - r^2\ln r + r^2}{r^4}.$$

Da cui

$$V''_{eff}(r_\beta) = \frac{1}{r_\beta^4}(3\beta - \underbrace{r_\beta^2 \ln r_\beta}_{\beta} + r_\beta^2) = \frac{1}{r_\beta^4}\left(2\beta + r_\beta^2\right) > 0.$$

*Secondo esercizio*

( $a$ ) . Il primo passo è determinare in funzione di $\theta$ le posizioni dei principali punti. Abbiamo

$$C - O = -R\theta \boldsymbol{e}_x + R\ \boldsymbol{e}_y\ ,$$

dal momento che la semicirconferenza rotola senza strisciare sulla guida orizzontale e che $\theta$ è positivo per rotazioni antiorarie. Avremo inoltre

$$\begin{aligned} P_o - C &= b\sin\theta \boldsymbol{e}_x - b\cos\theta \boldsymbol{e}_y, \\ P_o - O &= (P_o - C) + (C - O) = (b\sin\theta - R\theta)\, \boldsymbol{e}_x + (R - b\cos\theta)\, \boldsymbol{e}_y\ . \end{aligned}$$

La velocità di $P_o$ è dunque

$$\overset{\cdot}{(P_o - O)} = \left( b\dot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta} \right) \boldsymbol{e}_x + b\dot{\theta}\sin\theta \boldsymbol{e}_y,$$

per cui $\overset{\cdot}{(P_o - O)}^2 = \left(b^2 + R^2\right)\dot{\theta}^2 - 2bR\dot{\theta}^2 \cos\theta$. Dobbiamo adesso calcolare $I_z(P_o)$, ovvero il momento d'inerzia rispetto alla retta perpendicolare al piano (e quindi parallela all'asse $z$) passante per $P_o$. Dal teorema di Huygens abbiamo

$$I_z(C) = I_z(P_o) + mb^2, \quad \Rightarrow \quad I_z(P_o) = I_z(C) - mb^2.$$

Ora, il momento d'inerzia rispetto al centro $C$ di un intero anello di massa $2m$ e raggio $R$ è $2mR^2$, di conseguenza $I_z(C) = mR^2$,

$$I_z(P_o) = mR^2 - mb^2 = m\left(R^2 - b^2\right),$$

da cui, ricordando che $b = \dfrac{2}{\pi}R$, si ha $I_z(P_o) = mR^2\left(1 - \dfrac{4}{\pi^2}\right)$. L'energia cinetica è dunque

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}\overset{\cdot}{(P_o - O)}^2 + \frac{1}{2} I_z(P_o)\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{m}{2}\dot{\theta}^2\left(b^2 + R^2 - 2bR\cos\theta\right) + \frac{m}{2}\dot{\theta}^2\left(R^2 - b^2\right) \\ &= m\dot{\theta}^2 R^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\cos\theta\right). \end{aligned}$$

( $b$ ) . Procediamo applicando l'equazione simbolica della statica

$$-\frac{dV}{d\theta} + \boldsymbol{F}\cdot\delta(B - O) = 0, \tag{2}$$

dove $\boldsymbol{F} = F\boldsymbol{e}_y$, e $\delta(B - O)$ è lo spostamento virtuale del punto $B$. Siccome

$$\begin{aligned} B - O &= (B - C) + (C - O) = (R\cos\theta \boldsymbol{e}_x + R\sin\theta \boldsymbol{e}_y) + (-R\theta \boldsymbol{e}_x + R\ \boldsymbol{e}_y) \\ &= (R\cos\theta - R\theta)\, \boldsymbol{e}_x + (R\sin\theta + R)\, \boldsymbol{e}_y\ , \end{aligned}$$

abbiamo $\delta(B - O) = (-R\sin\theta - R)\, \boldsymbol{e}_x + R\cos\theta \boldsymbol{e}_y$. L'energia potenziale è

$$V = mgy_{P_o} = mg(R - b\cos\theta),$$

per cui $\dfrac{dV}{d\theta} = mgb\sin\theta$. L'equazione (2) diventa

$$-mgb\sin\theta + FR\cos\theta = 0, \quad \Longrightarrow \quad F = mg\frac{b}{R}\tan\theta.$$

Evidentemente saremmo potuti giungere allo stesso risultato se avessimo scritto la seconda cardinale utilizzando il punto di contatto fra semicirconferenza e guida come centro di riduzione. Con tale accorgimento non avremmo considerato reazione vincolare (incognita), che è applicata proprio sul punto di contatto. Infatti, utilizzando il punto di contatto come centro di riduzione, le forze che entrano in gioco sono soltanto $\boldsymbol{F}$ e la forza peso.

( $c$ ) . In questo caso la posizione del centro di massa è

$$P_o - O = -\frac{R}{2}\boldsymbol{e}_x + b\sin\theta\boldsymbol{e}_z - b\cos\theta\boldsymbol{e}_y \ .$$

L'energia potenziale dovuta alla forza peso è dunque $V = mgzy_{P_o} = -mgb\cos\theta$. Il centro $C$ è solidale col sistema rigido è fisso, e quindi $T = \frac{1}{2}I_x(C)\dot{\theta}^2$. Bisogna quindi calcolare $I_x(C)$, il momento d'inerzia della semicirconferenza rispetto all'asse $x$. Se avessimo un anello di massa $2m$, il momento d'inerzia rispetto all'asse $x$ sarebbe $mR^2$. Di conseguenza $I_x(C) = \frac{mR^2}{2}$. La Lagrangiana del sistema è dunque

$$\mathcal{L} = \frac{mR^2}{4}\dot{\theta}^2 + mgb\cos\theta,$$

e l'equazione di moto è

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0, \quad \Longrightarrow \quad \ddot{\theta} = -\frac{g}{(R^2/2b)}\sin\theta,$$

che è appunto l'equazione di un pendolo di lunghezza $\ell = \frac{R^2}{2b}$. Siccome per il pendolo il periodo delle piccole osciallazioni è $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$, nel nostro caso abbiamo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^2}{2bg}} \ .$$