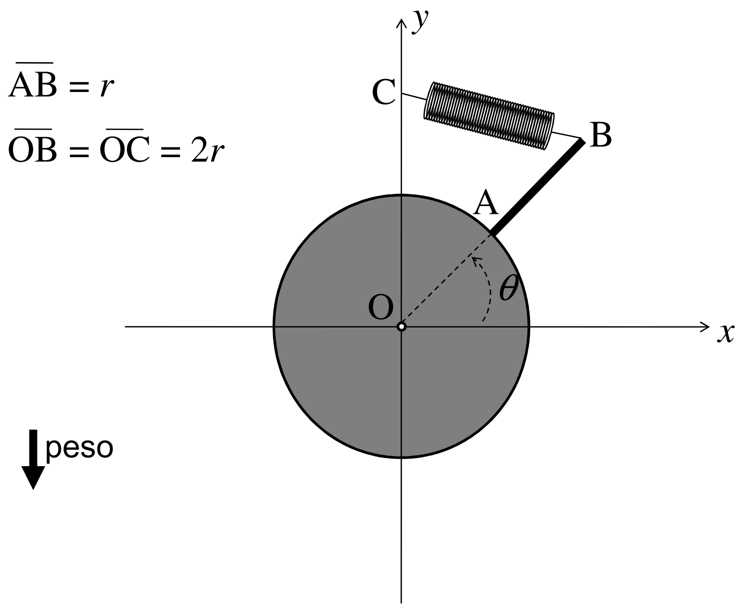
Secondo esercizio

Un sistema meccanico è costituito da un disco di raggio r e massa m sul cui bordo esterno è saldata, in direzione radiale, un'asta AB di massa m e lunghezza r. Il sistema è disposto su di un piano verticale ed è vincolato a ruotare senza attrito attorno al centro del disco O (v. figura). L'estremo B dell'asta è collegato tramite una molla di lunghezza a riposo nulla, massa trascurabile e costante elastica k, al punto $C \equiv (0, 2r)$. Si prenda come parametro lagrangiano l'angolo θ che il segmento OA forma con l'asse x. Il sistema è soggetto alla forza peso, diretta nel verso opposto dell'asse y.

(i). Si determinino le eventuali posizioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità al variare del parametro $\alpha = \dfrac{8kr}{3mg} > 0$.

(ii). Si determini il momento d'inerzia del sistema (asta più disco) rispetto ad un asse ortogonale al piano e passante per il punto O. Si scriva poi l'energia cinetica del sistema.

(iii). Considerando $k = 0$, si scriva l'equazione di moto del sistema supponendo che in B venga applicata una generica forza $\boldsymbol{F} = F_x \boldsymbol{e}_x + F_x \boldsymbol{e}_y$.



SVOLGIMENTO

(i). Si considera $\theta \in (-\pi, \pi]$. Si indica con P_{AB} il C.M. dell'asta AB, e con P_o il C.M. del sistema nel suo complesso (asta e disco), la cui massa totale è $2m$. Scriveremo poi

$$\begin{aligned}
B - O &= 2r\cos\theta \boldsymbol{e}_x + 2r\sin\theta \boldsymbol{e}_y \ , \\
P_{AB} - O &= \frac{3}{2}r\cos\theta \boldsymbol{e}_x + \frac{3}{2}r\sin\theta \boldsymbol{e}_y \ , \\
P_o - O &= \frac{1}{2m}\left[m\left(P_{AB} - O\right) + m\left(O - O\right)\right] = \frac{3}{4}r\cos\theta \boldsymbol{e}_x + \frac{3}{4}r\sin\theta \boldsymbol{e}_y \ , \\
\overline{CB}^{\ 2} &= 4r^2\cos^2\theta + \left(2r - 2r\sin\theta\right)^2 = 8r^2\left(1 - \sin\theta\right).
\end{aligned}$$

Calcoliamo adesso le energie potenziali. Avremo $U = U_{peso} + U_{molla}$, dove

$$\begin{aligned}
U_{molla} &= \frac{k}{2}\overline{CB}^{\ 2} = 4kr^2\left(1 - \sin\theta\right), \\
U_{peso} &= 2mg\ y_{P_o} = \frac{3}{2}mrg\sin\theta,
\end{aligned}$$

da cui

$$U = \frac{3}{2}mrg\left(1 - \frac{8kr}{3mg}\right)\sin\theta + 4kr^2 = \frac{3}{2}mrg\left(1 - \alpha\right)\sin\theta + 4kr^2,$$

essendo $\alpha = \dfrac{8kr}{3mg}$. Siccome

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{3}{2}mrg\left(1 - \alpha\right)\cos\theta, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -\frac{3}{2}mrg\left(1 - \alpha\right)\sin\theta,$$

le posizioni di equilibrio corrispondono a $\theta = \pi/2$ e $\theta = -\pi/2$. Per quanto riguarda la stabilità abbiamo i seguenti casi:

- $(1 - \alpha) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{8kr}{3mg} < 1$,
  - $\theta = \pi/2$, instabile,
  - $\theta = -\pi/2$, stabile.
- $(1 - \alpha) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{8kr}{3mg} > 1$,
  - $\theta = \pi/2$, stabile,
  - $\theta = -\pi/2$, instabile.

(ii). Si indica con $I\left(O\right)$ il momento d'inerzia del sistema (asta e disco) rispetto ad una retta ortogonale al piano passante per O. Avremo $I\left(O\right) = I_{disco}\left(O\right) + I_{asta}\left(O\right)$, dove

$$\begin{aligned}
I_{disco}\left(O\right) &= \frac{mr^2}{2} \ , \\
I_{asta}\left(O\right) &= I_{asta}\left(P_{AB}\right) + m\left(\frac{3}{2}r\right)^2 = \frac{mr^2}{12} + \frac{9mr^2}{4} = \frac{28}{12}mr^2 \ ,
\end{aligned}$$

da cui

$$I\left(O\right) = \frac{17}{6}mr^2.$$

Per quanto riguarda l'energia cinetica, siccome O è fisso, possiamo scrivere

$$T = \frac{1}{2} I\left(O\right) \dot{\theta}^2 = \frac{17}{12} m r^2 \dot{\theta}^2 .$$

(*iii*). Possiamo procedere in due modi: (1) si segue il metodo lagrangiano, (2) si sfrutta la seconda equazione cardinale.

Seguiremo il primo metodo. Dobbiamo scrivere il lavoro fatto dalla forza $\boldsymbol{F}$ per uno spostamento virtuale del punto B, $\delta\left(B-O\right)$. Siccome

$$\delta\left(B-O\right) = \left[-2r\sin\theta \boldsymbol{e}_x + 2r\cos\theta \boldsymbol{e}_y\right]\ \delta\theta$$

abbiamo

$$\boldsymbol{F}\cdot\delta\left(B-O\right) = \underbrace{\left(-2rF_x\sin\theta + 2rF_y\cos\theta\right)}_{\Xi}\delta\theta.$$

L'equazione di moto sarà quindi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\theta} = -\frac{\partial U}{\partial\theta} + \Xi, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = \Xi,$$

dove, al solito, $\mathcal{L} = T - U$. Otteniamo quindi

$$\frac{17}{6} m r^2 \ddot{\theta} = -\frac{3}{2} m g r\cos\theta + 2r\left(-F_x\sin\theta + F_y\cos\theta\right) .$$

Avremmo ottenuto la stessa equazione se avessimo scritto la seconda cardinale con O centro di riduzione.