Prova Scritta di Sistemi Dinamici
11 - 01 - 2016

Primo esercizio

Sono dati due punti materiali P_1 di massa m_1 e P_2 di massa m_2, collegati fra loro da un filo inestensibile, perfettamente flessibile e di massa trascurabile. Il punto P_1 giace su un piano orizzontale privo di attrito mentre il punto P_2 è appeso al filo e si muove solo verticalmente (v. figura 1). La forza peso è come in figura e la lunghezza del filo è l.

(*a*). Si scriva la Lagrangiana considerando coordinate polari r e φ sul piano.

(*b*). Si determini l'energia potenziale efficace $V_{eff}(r)$ e si dica se la quota del punto P_2 può rimanere costante ed essere non nulla.

(*c*). Si scrivano le equazioni di moto nel caso in cui la velocità angolare del punto P_1, cioè $\dot{\varphi}$, sia asseganta e sia pari a ω.

Secondo esercizio

In un piano verticale è posto un sistema costituito da un'asta AB di massa m_1 e lunghezza $2l$ incernierata con l'estremo A in un punto fisso e da una seconda asta CD, di massa m_2 e lunghezza l, il cui estremo C è vincolato a scorrere sulla guida verticale passante per A, mentre l'estermo D è incernierato sul punto medio di AB (v. figura 2). Un filo inestensibile, perfettamente flessibile, di massa trascurabile e lunghezza $L > 2l$, ha un estremo attaccato al punto C, passa attorno al punto A e ridiscende lungo la verticale sino all'altro estermo a cui è fissato un punto materiale P di massa m. I vincoli sono privi di attrito e il peso è diretto come in figura. Si consideri il SdR della figura 2 e si utilizzi come variabile lagrangiana l'angolo φ, con $\varphi \in [0, \pi/2]$.

(*a*). Si individuino le configurazioni di equilibrio del sistema costituito dalle due aste e dal punto P, e se ne discuta la stabilità.

(*b*). Si determini l'energia cinetica del sistema.

(*c*). Si determini un integrale primo del moto.

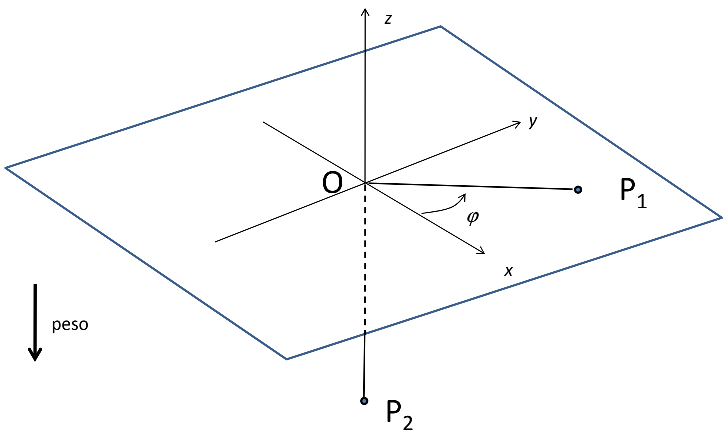

FIGURA 1

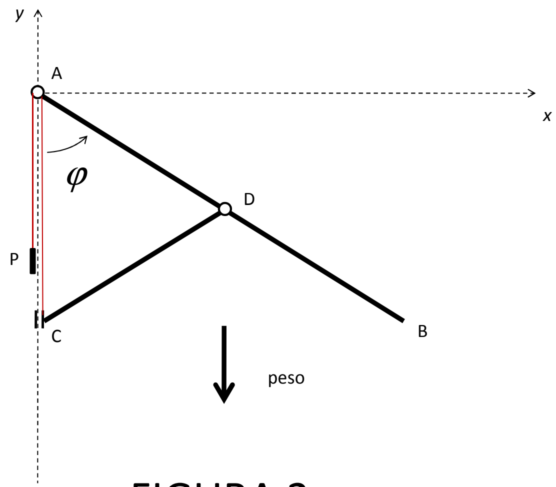

FIGURA 2

SVOLGIMENTO

Primo esercizio

(a) . Lavorando sul piano, la posizione del punto materiale P_1 rispetto ad un s.d.r. cartesiano centrato in O, è data dal vettore

$$P_1 - O = r\cos\varphi\ \boldsymbol{e}_x + r\sin\varphi\ \boldsymbol{e}_y\ ,$$

dove r e φ sono le due coordinate lagrangiane tali che

$$0 \leq r(t) \leq l, \quad \text{e} \quad \varphi(t) \in [0, 2\pi).$$

La velocità del punto è

$$\dot{(P_1 - O)} = \left(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi\right)\ \boldsymbol{e}_y\ ,$$

e quindi l'energia cinetica relativa al punti P_1 è $T_{P_1} = \dfrac{m_1}{2}\left(\dot{r}^{\,2} + r^2\dot{\varphi}^{\,2}\right)$.

La posizione del punto P_2 è

$$P_2 - O = -\left(l - r(t)\right)\ e_z\ ,$$

la sua velocità è

$$\dot{(P_2 - O)}\ =\ \dot{r}\ \boldsymbol{e}_z\ ,$$

e la relativa energia cinetica è $T_{P_2} = \dfrac{m_2}{2}\dot{r}^{\,2}$.

L'energia potenziale è data da

$$V_{peso\ P_2} = -m_2 g\,(l - r)\,,$$

e di conseguenza la Lagrangiana è

$$\mathcal{L} = T_{P_1} + T_{P_2} - V_{peso\ P_2} = \frac{m_1}{2}\left(\dot{r}^{\,2} + r^2\dot{\varphi}^{\,2}\right) + \frac{m_2}{2}\dot{r}^{\,2} + m_2 g\,(l - r)\,.$$

(b) . La variabile φ è ciclica, cioè

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = m_1 r^2\dot{\varphi}\ = A_o, \quad\Longrightarrow\quad \dot{\varphi}\ = \frac{A_o}{mr^2}, \tag{1}$$

dove A_o è una costante che si determina in base alle condizioni iniziali. Per determinare l'energia potenziale efficace conviene passare dall'Hamiltoniana

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= T_{P_1} + T_{P_2} + V_{peso\ P_2}\\ &= \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{r}^{\,2} + \frac{m_1}{2}r^2\dot{\varphi}^{\,2} + m_2 g r - m_2 g l,\end{aligned}$$

da cui, sostituendo la (1),

$$\mathcal{H} = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{r}^{\,2} + \underbrace{\frac{A_o^2}{2m_1}\frac{1}{r^2} + m_2 g r - m_2 g l}_{V_{eff}(r)}\,.$$

La quota z del punto P_2 è $z = r - l$. Quindi $z =$ costante e $|z| > 0$, solo se $r(t) =$ costante cioè se P_1 percorre un'orbita circolare il cui raggio è minore di l. Questo può avvenire se $V_{eff}(r)$ ammette un minimo in r_m e $r_m < l$. Analizzando la funzione $V_{eff}(r)$ per $r > 0$, si ha

$$\lim_{r\to 0^+} V_{eff}(r) = +\infty,$$

e

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = -\left(\frac{A_o^2}{m_1}\right)\frac{1}{r^3} + m_2 g, \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2V_{eff}}{dr^2} = 3\left(\frac{A_o^2}{m_1}\right)\frac{1}{r^4} \geq 0.$$

Quindi $V_{eff}(r)$ presenta un minimo in corrispondenza di

$$r_m = \sqrt[3]{\frac{m_2 m_1 g}{A_o^2}} \ .$$

La condizione da imporre affinchè il punto P_2 possa rimanere sospeso ad una quota $z < 0$, è dunque

$$\sqrt[3]{\frac{m_2 m_1 g}{A_o^2}} < l \ .$$

(c). In questo caso la posizione del punto P_1 è data da

$$P_1 - O = r\cos\omega t \ \boldsymbol{e}_x + r\sin\omega t \ \boldsymbol{e}_y$$

dove adesso r è l'unico parametro lagrangiano. L'energia cinetica totale è quindi

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1}{2}(P_1 \dot{-} O)^2 + \frac{m_2}{2}(P_2 \dot{-} O)^2 \\ &= \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{r}^2 + \frac{m_1}{2} r^2 \omega^2, \end{aligned}$$

e la funzione di Lagrange diventa

$$\mathcal{L} = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{r}^2 + \frac{m_1}{2} r^2 \omega^2 - m_2 g r \ ,$$

dove abbiamo trascurato la costante $m_2 g l$. L'equazione di moto diventa

$$(m_1 + m_2)\ddot{r} - \left(m_1 \omega^2 r - m_2 g\right) = 0.$$

Secondo esercizio

(a). Cominciamo col determinare i vettori posizione dei punti di interesse

$$\begin{aligned} C - O &= -2l\cos\varphi \ \boldsymbol{e}_y \ , \\ D - O &= l\sin\varphi \ \boldsymbol{e}_x - l\cos\varphi \ \boldsymbol{e}_y \ , \\ P - O &= -\left(L - 2l\cos\varphi\right) \ \boldsymbol{e}_y \ . \end{aligned}$$

Inoltre, denotando che H il punto di mezzo dell'asta CD, si ha

$$H - O = \frac{l}{2}\sin\varphi \ \boldsymbol{e}_x - \frac{3l}{2}\cos\varphi \ \boldsymbol{e}_y \ .$$

L'energia potenziale dovuta alla forza peso è

$$\begin{aligned} V &= -l m_1 g\cos\varphi - \frac{3l}{2} m_2 g\cos\varphi - mg\left(L - 2l\cos\varphi\right) \\ &= -Mgl\cos\varphi - mgL \,, \end{aligned}$$

dove

$$M = m_1 + \frac{3}{2}m_2 - 2m \ . \tag{2}$$

All'equilibrio si ha

$$\frac{dV}{d\varphi} = 0, \quad \Rightarrow \quad Mgl\sin\varphi = 0$$

Considerando $\varphi \in [0, \pi/2]$, abbiamo quindi tre possibilità:

1. $M = 0$, qualunque configurazione è di equilibrio.
2. $M > 0$, la configurazione di equilibrio è $\varphi = 0$, ed è stabile perchè è un minimo assoluto della V.
3. $M < 0$, la configurazione di equilibrio è sempre $\varphi = 0$, ma adesso è instabile perchè è un massimo assoluto della V.

(b) . L'asta AB ha l'estremo A fisso e dunque

$$T_{AB} = \frac{1}{2} I_A \dot{\varphi}^2,$$

dove

$$I_A = \frac{1}{12} m_1 (2l)^2 + m_1 l^2 = \frac{4}{3} m_1 l^2.$$

Quindi $T_{AB} = \frac{2}{3} m_1 l^2 \dot{\varphi}^2$. L'energia cinetica dell'asta CD è

$$\begin{aligned} T_{CD} &= \frac{1}{2} m_2 (\dot{H - O})^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_2 l^2}{12} \right) \dot{\varphi}^2 \\ &= m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 \left(\frac{1}{6} + \sin^2 \varphi \right). \end{aligned}$$

Infine l'energia cinetica del punto P è

$$T_P = \frac{m}{2} (\dot{P - O})^2 = 2ml^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi,$$

e quindi l'energia cinetica totale è

$$T = \left[\frac{2}{3} m_1 + m_2 \left(\frac{1}{6} + \sin^2 \varphi \right) + 2m \sin^2 \varphi \right] l^2 \dot{\varphi}^2.$$

(c) . Scriviamo la funzione di Hamilton (omettendo il termine costante dell'energia potenziale)

$$\mathcal{H} = \left[\frac{2}{3} m_1 + m_2 \left(\frac{1}{6} + \sin^2 \varphi \right) + 2m \sin^2 \varphi \right] l^2 \dot{\varphi}^2 - Mgl \cos \varphi,$$

con M data dalla (2), abbiamo che $\mathcal{H}$ = costante, poiché i vincoli sono privi di attrito, l'unica forza attiva (peso) è conservativa e $\mathcal{L}$ non dipende esplicitamente dal tempo.