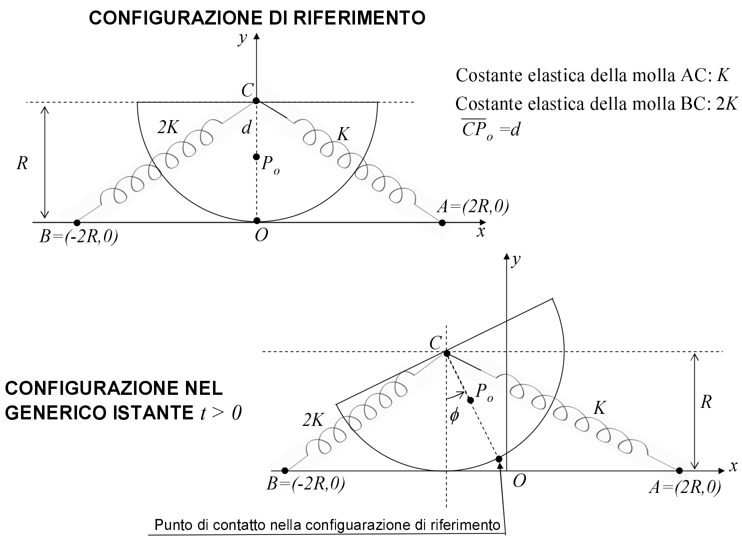
Secondo esercizio

Un sistema rigido è costituito da un semidisco di massa m e raggio R, vincolato a rotolare senza strisciare su una guida orizzontale (v. figura). Si denota con ϕ l'angolo di rotolamento del semidisco (evidentemente $-\pi/2 < \phi < \pi/2$), con la convenzione che $\phi > 0$ per rotazioni antiorarie. Il centro C del disco è collegato tramite due molle (di lunghezza a riposo e massa trascurabili) ai punti $A \equiv (2R, 0)$ e $B \equiv (-2R, 0)$. Le costanti elastiche delle molle sono riportate in figura. La distanza del centro di massa del semidisco, ovvero del punto P_o, dal centro C è nota e si indica con d (ovviamente $d < R$).

(*i*). Si determini il vettore $(P_o - O)$, vettore posizione del centro di massa del semidisco, rispetto al sistema di riferimento disegnato in figura.

(*ii*). Posto $\dfrac{mgd}{kR^2} = 1$, si dimostri che esiste una sola configurazione di equilibrio stabile e che, detto ϕ_o l'angolo di rotolamento corrispondente a tale posizione, si ha $0 < \phi_o < \pi/2$.

(*iii*). Detta ω_o^2, la frequenza delle piccole oscillazioni attorno a ϕ_o, si determini ω_o^2 in funzione di ϕ_o, K ed m.



SVOLGIMENTO

(i) . Si indica con $(C-O)$, il vettore posizione del centro del semidisco, rispetto al s.d.r. riportato in figura. Se $(N-O)$ è il vettore di posizione del punto di contatto fra disco e guida, abbiamo

$$(N-O)\cdot\vec{e}_x=(C-O)\cdot\vec{e}_x\ .$$

Ora il vincolo di rotolamento puro impone $(N-O)\cdot\vec{e}_x=-R\phi$, essendo ϕ, come in figura, l'angolo formato dal raggio che contiene il segmento CP_o con la retta verticale passante per C. Avremo pertanto $(C-O)\cdot\vec{e}_x=-R\phi$, poichè a rotolamenti antiorari (cioè a ϕ positivi) corrsipondono spostamenti di C opposti ad $\vec{e}_x$. Quindi

$$(C-O)=-R\phi\ \vec{e}_x+R\ \vec{e}_y.$$

Il vettore (P_o-O), si otterrà ducnque come

$$P_o-O=(P_o-C)+(C-O)\,.$$

Quindi se[1] $\overline{P_oC}=d$, abbiamo $(P_o-C)=d\sin\phi\vec{e}_x-d\cos\phi\vec{e}_y$, per cui

$$P_o-O=(-R\phi+d\sin\phi)\,\vec{e}_x+(R-d\cos\phi)\,\vec{e}_y. \tag{1}$$

Possiamo anche calacolare la velocità di P_o rispetto al s.d.r. riportato in figura

$$\frac{d\,(P_o-O)}{dt}=\left[(-R+d\cos\phi)\,\dot{\phi}\right]\ \vec{e}_x+\left[d\sin\phi\dot{\phi}\right]\vec{e}_y,$$

per cui

$$\left|\frac{d\,(P_o-O)}{dt}\right|^2=\left(R^2+d^2-2Rd\cos\phi\right)\dot{\phi}^{\,2}. \tag{2}$$

(ii) . Indicando con U l'energia potenziale totale si ha

$$\begin{aligned} U &= U_{peso}+U_{molla\ BC}+U_{molla\ AC} \\ &= mg\,(\text{quota }P_o)+\frac{1}{2}2K\ \overline{BC}^{\ 2}+\frac{1}{2}K\ \overline{AC}^{\ 2}. \end{aligned}$$

Dalla (1)

$$(\text{quota }P_o)=R-d\cos\phi,$$

mentre $\overline{BC}^{\ 2}=|B-C|^2$, e $\overline{AC}^{\ 2}=|A-C|^2$. Dalla figura abbiamo

$$\begin{aligned} (B-C) &= (B-O)-(C-O) \\ &= -2R\ \vec{e}_x-[-R\phi\ \vec{e}_x+R\ \vec{e}_y] \\ &= (R\phi-2R)\,\vec{e}_x-R\ \vec{e}_y\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A-C) &= (A-O)-(C-O) \\ &= 2R\ \vec{e}_x-[-R\phi\ \vec{e}_x+R\ \vec{e}_y] \\ &= (R\phi+2R)\,\vec{e}_x-R\ \vec{e}_y\ , \end{aligned}$$

[1] Per inciso, $d=\dfrac{4}{3\pi}R$.

per cui

$$U_{molla\ BC} + U_{molla\ AC} = KR^2 \left(\frac{3}{2}\phi^2 - 2\phi + \frac{15}{2} \right).$$

L'energia potenziale totale è dunque

$$U = mg\left(R - d\cos\phi\right) + KR^2 \left(\frac{3}{2}\phi^2 - 2\phi + \frac{15}{2} \right),$$

Gli eventuali punti di equilibrio sono gli zeri di $U'(\phi)$. La loro stabilità dipenderà poi dal segno di $U''(\phi)$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\phi} &= mgd\sin\phi + 3KR^2\phi - 2KR^2 \\ &= KR^2 \left(3\phi - 2 + \frac{mgd}{KR^2}\sin\phi \right), \end{aligned}$$

$$\frac{d^2U}{d\phi^2} = KR^2 \left(3 + \frac{mgd}{KR^2}\cos\phi \right),$$

e quindi, ricordando che $\frac{mgd}{KR^2} = 1$, dobbiamo studiare la funzione

$$F(\phi) = 3\phi - 2 + \sin\phi,$$

per $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$. Siccome $F'(\phi) = 3 + \cos\phi > 0$, $\forall\ \phi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $F(\phi)$ è sempre crescente. Ma poiché

$$F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -3\frac{\pi}{2} - 2 - 1 < 0, \quad \text{e} \quad F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\frac{\pi}{2} - 2 + 1 = \frac{3\pi - 2}{2} > 0,$$

si conclude che esiste uno ed un solo ϕ_o, con $\phi_o \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, per cui

$$F(\phi_o) = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \left.\frac{dU}{d\phi}\right|_{\phi=\phi_o} = 0.$$

Per di più ϕ_o è certamente stabile perchè $\frac{d^2U}{d\phi^2} = KR^2F'(\phi) > 0$, $\forall\ \phi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Mostriamo adesso che $0 < \phi_o < \frac{\pi}{2}$. Infatti, $F(0) = -2 < 0$, mentre $F\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$, quindi ϕ_o si trova nell'inetervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(*iii*). Se con T si denota l'energia cinetica del semidisco

$$T = \frac{1}{2}m\left|\frac{d\left(P_o - O\right)}{dt}\right|^2 + \frac{1}{2}I\left(P_o\right)\dot{\phi}^2,$$

dove $I(P_o)$ è il momento d'inerzia del semidisco rispetto ad un asse ortogonale al piano passante per P_o. Ora, se $I(C)$ è il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per C, abbiamo

$$I(C) = I(P_o) + md^2.$$

Il momento $I(C)$, sarà la metà del momento d'inerzia rispetto a C di un disco di massa $2m$, ovvero

$$I(C) = \frac{1}{2}\left(\frac{2mR^2}{2}\right) = \frac{mR^2}{2},$$

quindi

$$I(P_o) = \frac{mR^2}{2} - md^2 = m\left(\frac{R^2}{2} - d^2\right).$$

A questo punto, ricordando la (2), possiamo calcolare T

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\left[(P_o \dot{-} O)\right]^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{R^2}{2} - d^2\right)\dot{\phi}^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left[R^2 + d^2 - 2Rd\cos\phi + \frac{R^2}{2} - d^2\right]\dot{\phi}^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left(\frac{3}{2}R^2 - 2Rd\cos\phi\right). \end{aligned}$$

La frequenza delle piccole oscillazioni attorno a ϕ_o è quindi data da

$$\omega_o^2 = \frac{U''(\phi_o)}{m\left(\frac{3}{2}R^2 - 2Rd\cos\phi_o\right)} = \frac{KR^2(3+\cos\phi_o)}{m\left(\frac{3}{2}R^2 - 2Rd\cos\phi_o\right)},$$

con $0 < \phi_o < \frac{\pi}{2}$. Quindi, maggiorando il numeratore e minorando il denominatore ω_o^2 può essere così maggiorata

$$\omega_o^2 \leq \frac{4K}{m\left(\frac{3}{2} - 2\frac{d}{R}\right)}.$$