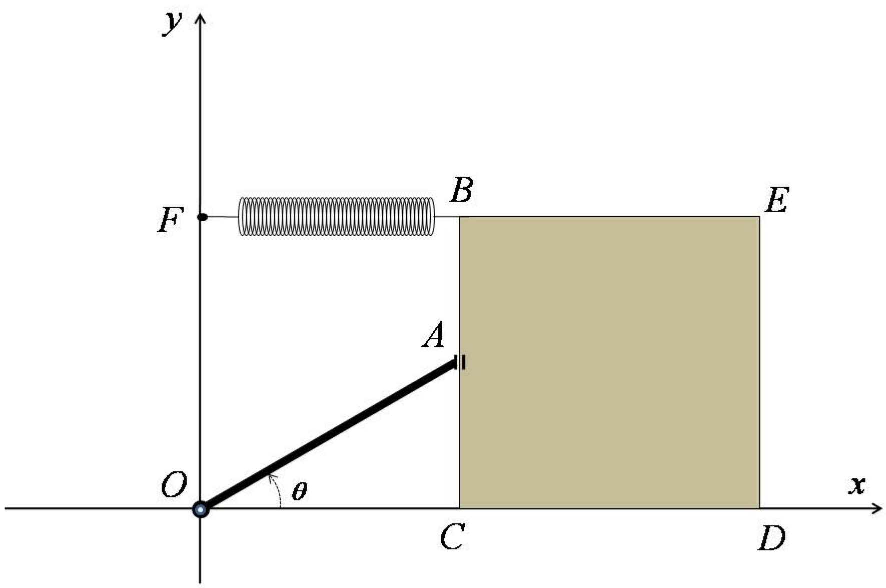
Secondo esercizio

Un sistema meccanico è costituito da un'asta rigida OA e da una lamina piana quadrata $BCDE$, di lato L e massa m. L'asta è lunga $\ell < L$ ed ha massa m. L'asta OA è vincolata a ruotare senza attrito attorno all'estremo O, mentre l'altro estremo A può scorrere lungo il lato BC della lamina. Quest'ultima è vincolata a traslare, senza attrito, lungo l'asse x (v. figura). In particolare, la lamina può spostarsi anche a sinistra del punto O. Il punto B della lamina è collegato tramite una molla, di costante elestica k, lunghezza a riposo nulla e massa trascurabile, al punto fisso F che si trova sull'asse y. Si denota con θ l'angolo che l'asta OA forma con l'asse x. Il sistema è soggetto alla forza peso, diretta nel verso opposto dell'asse y.

(i). Si determinino le posizioni di equilibrio e la loro stabilità supponendo che $\dfrac{mg}{k\ell}$ =1.

(ii). Si scriva l'energia cinetica totale del sistema.

(iii). Considerando adesso $k = 0$, si determini la forza orizzontale $\vec{F} = F\,\vec{e}_x$, che deve essere applicata alla lamina affinché il sistema sia in equilibrio con l'asta che forma un angolo θ_o, $0 < \theta_o < \pi$, con l'asse x.



SVOLGIMENTO

(*i*). Il sistema ha un solo grado di libertà, che viene descritto dall'angolo θ, $0 \le \theta \le \pi$. Definiamo con P_{OA} il CM dell'asta OA, e con P_{BCDE} quello della lamina. Riferendoci alla figura abbiamo

$$\begin{aligned} P_{OA} - O &= \frac{\ell}{2}\left(\cos\theta\ \vec{e}_x + \sin\theta\ \vec{e}_y\right), \\ P_{BCDE} - O &= \left(\ell\cos\theta + \frac{L}{2}\right)\vec{e}_x + \frac{L}{2}\ \vec{e}_y, \\ A - O &= \ell\left(\cos\theta\ \vec{e}_x + \sin\theta\ \vec{e}_y\right), \end{aligned}$$

ed anche

$$\overline{BF}^{\ 2} = \ell^2\cos^2\theta.$$

Possiamo quindi scrivere tutte le energie potenziali in gioco

$$\begin{aligned} U^{\,peso}_{asta\ OA} &= mg\frac{\ell}{2}\sin\theta, \\ U^{\ molla} &= \frac{k}{2}\overline{BF}^{\ 2} = \frac{k}{2}\ell^2\cos^2\theta, \end{aligned}$$

e quella totale

$$\begin{aligned} U(\theta) &= U^{\,peso}_{asta\ OA} + U^{\ molla} \\ &= mg\frac{\ell}{2}\sin\theta + \frac{k\ell^2}{2}\cos^2\theta. \end{aligned}$$

Per determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e la loro stabilità dobbiamo individuare i massimi ed i mimimi della funzione $U(\theta)$. Si calcola allora $\dfrac{dU}{d\theta}$, e se ne studia il segno.

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\theta} &= mg\frac{\ell}{2}\cos\theta - k\ell^2\cos\theta\sin\theta \\ &= k\ell^2\cos\theta\left(\frac{1}{2}\frac{mg}{k\ell} - \sin\theta\right) = k\ell^2\cos\theta\left(\frac{1}{2} - \sin\theta\right), \end{aligned}$$

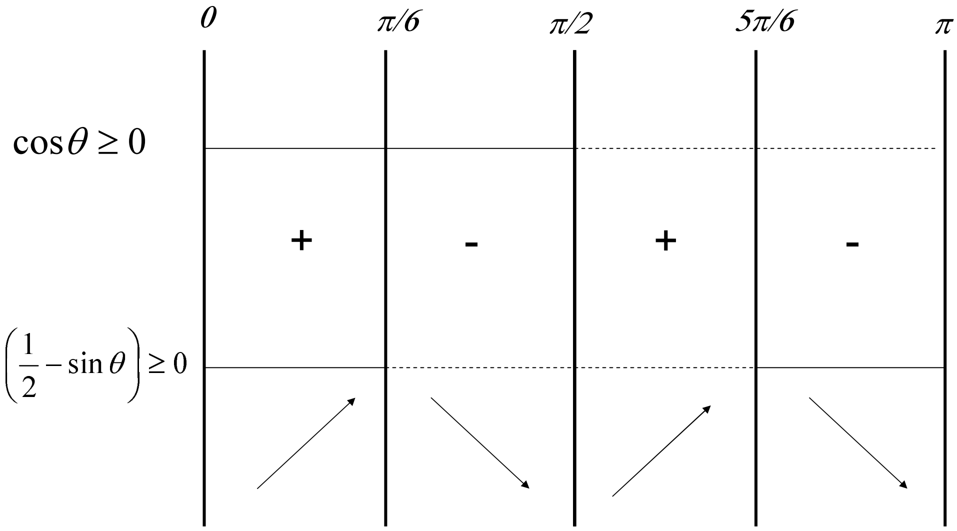
siccome $\dfrac{mg}{k\ell} = 1$. Lo studio del segno di $\dfrac{dU}{d\theta}$ è schematizzato nella sottostante figura. Le posizioni di equilibrio stabile sono quelle corrispondenti a $\theta = \pi/2$, $\theta = 0$, e $\theta = \pi$. Per quanto riguarda le ultime due, bisogna però precisare che la descrizione del moto attorno ad esse richiede particolare attenzione. Sono invece posizioni di equilibrio instabile le posizione corrispondenti a $\theta = \pi/6$, e $\theta = 5\pi/6$.

(*ii*). Calcoliamo l'energia cinetica totale

$$\begin{aligned} T &= \underbrace{\left[\frac{m}{2}|\dot{\overline{P_{OA} - O}}|^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m\ell^2}{12}\right)\dot{\theta}^{\,2}\right]}_{T_{OA}} + \underbrace{\frac{m}{2}|\dot{\overline{P_{BCDE} - O}}|^2}_{T_{BCDE}} \\ &= \frac{m\ell^2}{2}\left(\frac{1}{3} + \sin^2\theta\right)\dot{\theta}^{\,2}. \end{aligned}$$

(*iii*). La figura sottostante rappresenta il diagramma di corpo libero dell'asta e della lamina, per una generica configurazione di equilibrio $\theta_o \in (0, \pi)$. L'incognita da determinare è $F \in \mathbb{R}$. Scriviamo la prima equazione cardinale, componente lungo $\vec{e}_x$, per la lamina

$$N + F = 0, \quad \Rightarrow \quad F = -N,$$



essendo $N\ \vec{e}_x$, la forza esercitata dall'asta sulla lamina[1]. Scriviamo adesso la seconda cardinale per l'asta, considerando il punto O come centro di riduzione. Avremo

$$(P_{OA} - O) \wedge (-mg\vec{e}_y) + (A - O) \wedge (-N\ \vec{e}_x) = 0,$$

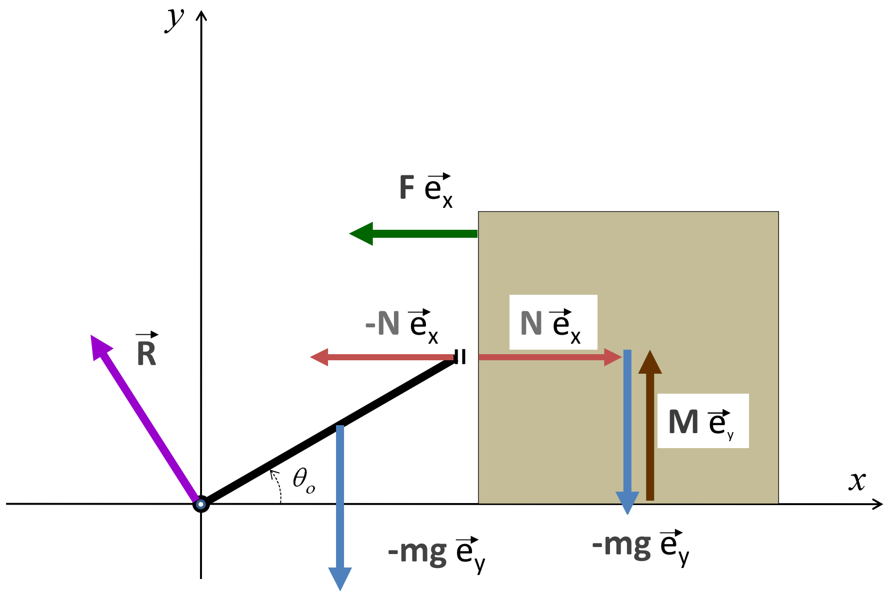
ovvero

$$(\ell \cos\theta\ \vec{e}_x + \ell \sin\theta\ \vec{e}_y) \wedge \left(-\frac{mg}{2}\vec{e}_y - N\ \vec{e}_x\right) = 0$$

da cui ricaviamo

$$N = \frac{mg}{2}\frac{\cos\theta_o}{\sin\theta_o}, \quad \Rightarrow \quad F = -\frac{mg}{2}\frac{\cos\theta_o}{\sin\theta_o}.$$

[1]Tale forza ha solo componente orizzontale dal momento che il vincolo è liscio.



y
F $\vec{e}_x$
-N $\vec{e}_x$
N $\vec{e}_x$
$\vec{R}$
M $\vec{e}_y$
θ_o
x
-mg $\vec{e}_y$
-mg $\vec{e}_y$