Primo Compitino Sistemi Dinamici
5 febbraio 2015

Primo esercizio

Un punto materiale P di massa $m = 1$, è sottoposto ad un campo centrale la cui energia potenziale è

$$V(r) = \exp\left\{\frac{\beta}{r}\right\},$$

con $\beta \in \mathbb{R}$.

(*a*). Dopo aver introdotto le coordinate polari (r, ϕ) nel piano si scriva la funzione di Lagrange e le equazioni del moto.

(*b*). Determinare per quali valori di β esistono orbite limitate e, per tali valori di β, si rappresentino schematicamente, al variare di E, le curve del moto nel piano delle fasi $\left(r, \dot{r}\right)$, evidenziando le eventuali separatrici.

(*c*). Supponendo $\beta = -1$, determinare le condizioni iniziali $\left(r_o, \phi_o, \dot{r}_o, \dot{\phi}_o\right)$, affinchè si abbia un'orbita circolare di raggio $r = 1$.

Secondo esercizio

E' dato un ellissoide la cui espressione parametrica è

$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\phi, \\ y = R\sin\theta\sin\phi, \\ z = \alpha R\cos\theta, \end{cases}$$

dove: $\theta \in (0, \pi)$ è la colatitudine, $\phi \in (0, 2\pi]$ la longitudine e $\alpha > 1$. Un punto materiale P di massa $m = 1$, è vincolato a muoversi su tale superficie soggetto alla forza peso, parallela all'asse z e diretta nel verso opposto ed ad una forza elastica

$$\boldsymbol{F} = -K\boldsymbol{x}, \quad \text{con} \quad K > 0.$$

Si suppone che la superficie sia priva di attrito.

(*a*). Si scriva la Lagrangiana del punto materiale, individuando eventuali coordinate cicliche.

(*b*). Posto $\alpha^2 = 1 + \delta$, e $\beta = \dfrac{\alpha g}{KR\delta}$, determininare, al variare del parametro β, le configurazioni di equilibrio.

(*c*). Supponendo $\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, si determini la reazione vincolare in corrispondenza delle posizioni di equilibrio.

SVOLGIMENTO

Primo esercizio

(a) . La posizione del punto materiale, rispetto ad un s.d.r. cartesiano centrato in O, è

$$\boldsymbol{x} = r\cos\phi\ \boldsymbol{e}_1 + r\sin\phi\ \boldsymbol{e}_2\ ,$$

dove $r(t) > 0$, e $\phi(t) \in [0, 2\pi)$, sono le due coordinate lagrangiane. La velocità del punto è

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \left(\dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(\dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi\right)\ \boldsymbol{e}_2\ ,$$

per cui $\left|\dot{\boldsymbol{x}}\right|^2 = \dot{r}^{\,2} + r^2\dot{\phi}^{\,2}$, e quindi l'energia cinetica è $T = \dfrac{1}{2}\left(\dot{r}^{\,2} + r^2\dot{\phi}^{\,2}\right)$, siccome $m = 1$.

La Lagrangiana è

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^{\,2} + r^2\dot{\phi}^{\,2}\right) - e^{\beta/r}.$$

Scrivendo le due equazioni del moto abbiamo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0, \quad \Rightarrow \quad r^2\dot{\phi} = A_o, \quad \Longrightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{A_o}{r^2},$$

dove A_o è una costante (da determinarsi in base alle condizioni iniziali) e

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = 0, \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} - \left(r\dot{\phi}^{\,2} + \frac{\beta}{r^2}e^{\beta r}\right) = 0.$$

(b) . Sfruttando $\dot{\phi} = A_o/r^2$, abbiamo

$$\ddot{r} = \frac{A_o^2}{r^3} + \frac{\beta}{r^2}e^{\beta/r}\ . \tag{1}$$

Quindi

$$\frac{dV_{eff}}{dr} = -\frac{A_o^2}{r^3} - \frac{\beta}{r^2}e^{\beta/r}, \quad \Rightarrow \quad V_{eff}(r) = \frac{A_o^2}{2}\frac{1}{r^2} + e^{\beta/r}.$$

Analizzando la funzione $V_{eff}(r)$ per $r > 0$, al variare di β, possiamo distingure due casi:

1) $\beta \geq 0$.
2) $\beta < 0$.

Nel primo caso $V'_{eff}(r) < 0$, $V_{eff}(r)$ è sempre positiva ed inoltre

$$\lim_{r\to 0} V_{eff}(r) = +\infty, \qquad \lim_{r\to\infty} V_{eff}(r) = \begin{cases} 1 & \text{se } \beta > 0, \\ 0 & \text{se } \beta = 0. \end{cases}$$

Dunque, siccome V_{eff} è monotona decrescente non ammette né massimi né minimi: non possono esistere orbite limitate.

Consideriamo adesso il caso 2). Ponendo $\beta = -|\beta|$, abbiamo che, come nel caso precedente, $V_{eff}(r)$ è sempre positiva e

$$\lim_{r\to 0} V_{eff}(r) = +\infty, \qquad \lim_{r\to\infty} V_{eff}(r) = 1.$$

Calcolando la derivata otteniamo

$$V'_{eff}(r) = -\frac{A_o^2}{r^3} + \frac{|\beta|}{r^2}e^{-|\beta|/r} = \frac{|\beta|\, re^{-|\beta|/r} - A_o^2}{r^3},$$

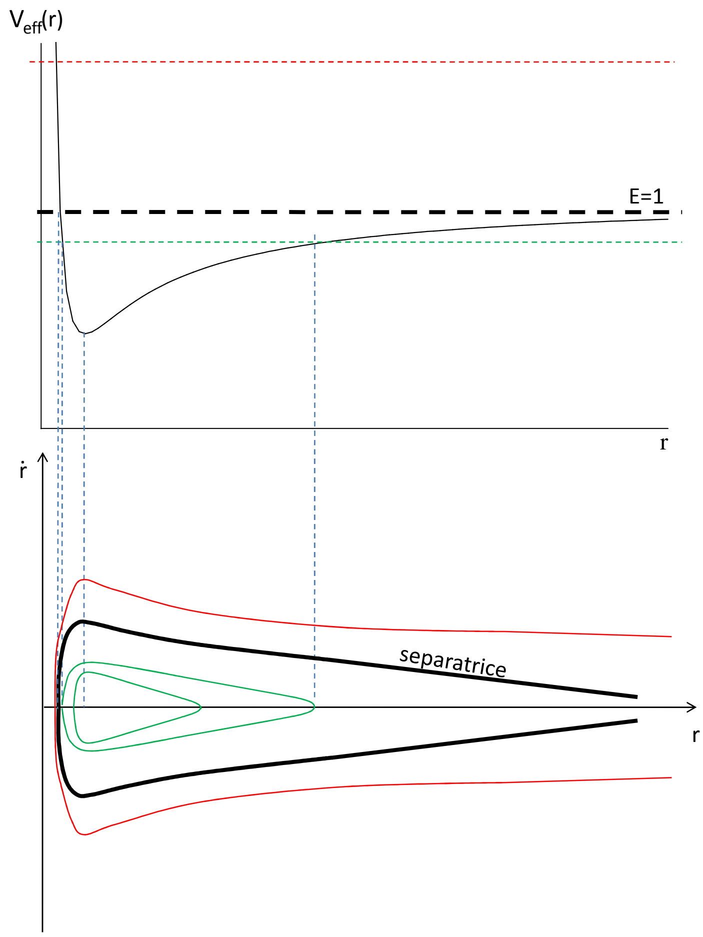
di cui dobbiamo studiarne il segno. Ponendo $f(r) = |\beta| re^{-|\beta|/r}$, notiamo che:

- $f(0) = 0$;
- $\lim_{r\to\infty} |\beta| re^{-|\beta|/r} = +\infty$;
- $f'(r) = |\beta| e^{-|\beta|/r} \left(1 + \frac{|\beta|}{r}\right) > 0$.

Concludiamo quindi che l'equazione $f(r) - A_o^2 = 0$, ammette una ed una sola soluzione che indichiamo con $\hat{r}$. Inoltre per $r < \hat{r}$, $V'_{eff}(r) < 0$, mentre per $r > \hat{r}$, $V'_{eff}(r) > 0$. Quindi $r = \hat{r}$ corrisponde ad un minimo isolato della funzione $V_{eff}(r)$. Dunque, se $\beta < 0$ possono esistere orbite limitate.

L'andamento delle orbite nel piano delle fasi $\left(r, \dot{r}\right)$ è schematizzato nella sottostante figura. Notiamo che:

- Per $E < 1$, si hanno orbite chiuse (e quindi traiettorie limitate).
- $E = 1$, corrisponde alla separatrice,
- Per $E > 1$, abbiamo orbite illimitate.



(c). Se $r = 1$, è orbita circolare deve essere $r_o = 1$, e $\ddot{r}(t) = \dot{r}(t) = 0$, $\Longrightarrow$ $\dot{r}_o = 0$, e, dalla (1),

$$\underbrace{\ddot{r}}_{=0} = A_o^2 - e^{-1} \ ,$$

cioè $A_o = \pm e^{-1/2}$. Quindi, ricordando che $\dot{\phi} = \frac{A_o}{r^2}$, abbiamo

$$\dot{\phi}_o = \pm e^{-1/2}.$$

Quindi le condizioni iniziali che bisogna imporre affinché $r = 1$ sia un'orbita circolare sono

$$\left(r_o, \phi_o, \dot{r}_o, \dot{\phi}_o\right) = \left(1, \phi_o, 0, \pm e^{-1/2}\right),$$

con $\phi_o \in [0, 2\pi]$, qualsiasi.

Secondo esercizio

(a). Calcoliamo i vettori che costituiscono la base locale del piano tangente

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_\theta &= R\cos\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x + R\cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y - \alpha R\sin\theta\boldsymbol{e}_z \ , \\
\boldsymbol{u}_\phi &= -R\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_x + R\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_y \ .
\end{aligned}$$

con $|\boldsymbol{u}_\theta|^2 = R^2\left(\cos^2\theta + \alpha^2\sin^2\theta\right)$, $|\boldsymbol{u}_\phi|^2 = R^2\sin^2\theta$ e $\boldsymbol{u}_\theta\cdot\boldsymbol{u}_\phi = 0$. L'energia cinetica del punto materiale è

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{\theta} & \dot{\phi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} R^2\left(\cos^2\theta + \alpha^2\sin^2\theta\right) & 0 \\ 0 & R^2\sin^2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\theta} \\ \dot{\phi}\end{pmatrix} \\
&= \frac{R^2}{2}\left(\dot{\theta}^2\left(\cos^2\theta + \alpha^2\sin^2\theta\right) + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right).
\end{aligned}$$

L'energia potenziale della forza peso è

$$V_{peso} = mgz, \quad \Rightarrow \quad V_{peso} = \alpha g R\cos\theta,$$

mentre quella della forza elastica è

$$V_{el} = \frac{K}{2}\left|\boldsymbol{x}^2\right| = \frac{KR^2}{2}\left(\sin^2\theta + \alpha^2\cos^2\theta\right).$$

La funzione di Lagrange è dunque

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= T - \left(V_{peso} + V_{el}\right) \\
&= \frac{R^2}{2}\left(\dot{\theta}^2\left(\cos^2\theta + \alpha^2\sin^2\theta\right) + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) - \left(\alpha g R\cos\theta + \frac{KR^2}{2}\left(\sin^2\theta + \alpha^2\cos^2\theta\right)\right).
\end{aligned}$$

Siccome in $\mathcal{L}$ non compare ϕ, si deduce che ϕ è una coordinata ciclica, ovvero $p_\phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}$, è costante, cioè

$$R^2\dot{\phi}\sin^2\theta = A_o.$$

(b). Consideriamo l'energia potenziale totale

$$V(\theta) = V_{peso} + V_{el} = \alpha g R\cos\theta + \frac{KR^2}{2}\left(\sin^2\theta + \alpha^2\cos^2\theta\right).$$

Ricordando che $\alpha^2 = 1 + \delta$, abbiamo

$$\begin{aligned}
V(\theta) &= \alpha g R\cos\theta + \frac{KR^2}{2}\left(\sin^2\theta + (1+\delta)\cos^2\theta\right) \\
&= \alpha g R\cos\theta + \frac{KR^2}{2}\left(1 + \delta\cos^2\theta\right).
\end{aligned}$$

Le eventuali posizioni di equilibrio sono gli zeri della derivata prima. Calcoliamo quindi $V'(\theta)$

$$\begin{aligned} V'(\theta) &= -\alpha g R\sin\theta - KR^2\delta\cos\theta\sin\theta \\ &= -KR^2\delta\sin\theta\,(\underbrace{\frac{\alpha g}{KR\delta}}_{\beta}+\cos\theta). \end{aligned}$$

Quindi $V'(\theta)=0$, comporta

$$\sin\theta = 0, \quad\Longrightarrow\quad \theta = 0,\ \pi$$

e

$$\cos\theta + \beta = 0, \quad\Longrightarrow\quad \cos\theta = -\beta. \tag{2}$$

Pertanto se $\beta > 1$, la (2) non ammette soluzioni, se $\beta = 1$, allora $\theta = \pi$, mentre se $\beta < 1$, abbiamo $\theta = \bar\theta$, $\frac{\pi}{2} < \bar\theta < \pi$, $\bar\theta = \arccos(-\beta)$. Riassumendo:

- $\beta \geq 1$, posizioni di equilibrio $\theta = 0,\ \pi$;
- $\beta < 1$, posizioni di equilibrio $\theta = 0,\ \pi,\ \arccos(-\beta)$.

(c) . Se $\beta = \sqrt{2}/2$, le posizioni di equilibrio sono $\theta = 0,\ \pi,\ \frac{3}{4}\pi = \arccos\left(-\sqrt{2}/2\right)$. Dobbiamo quindi calcolare la reazione vincolare in corrispondenza dei seguenti punti:

- $A = (0, 0, \alpha R)$;
- $B = (0, 0, -\alpha R)$;
- $C = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}R\cos\phi, \frac{\sqrt{2}}{2}R\sin\phi, -\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha R\right)$.

Siccome il vincolo è liscio sappiamo che $\boldsymbol{R} = \lambda\nabla f$, dove $f(x,y,z) = 0$ è l'espressione implicita della superficie, e

$$\lambda = -\frac{(\boldsymbol{F}_{el} + \boldsymbol{F}_{peso})\cdot\nabla f}{|\nabla f\,|^2}.$$

L'espressione implicita dell'ellissoide è

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} + \frac{z^2}{\alpha^2 R^2} - 1 = 0,$$

dalla quale ricaviamo il gradiente

$$\nabla f = \frac{2}{R^2}\left(x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + \frac{z}{\alpha^2}\boldsymbol{e}_z\right), \quad\Rightarrow\quad |\nabla f\,|^2 = \left(\frac{2}{R^2}\right)^2\left(x^2 + y^2 + \frac{z^2}{\alpha^4}\right).$$

Inoltre

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{F}_{el} + \boldsymbol{F}_{peso})\cdot\nabla f &= (-g\boldsymbol{e}_z - K\boldsymbol{x})\cdot\frac{2}{R^2}\left(x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + \frac{z}{\alpha^2}\boldsymbol{e}_z\right) \\ &= \left(\frac{2}{R^2}\right)\left[-\frac{gz}{\alpha^2} - K\left(x^2 + y^2 + \frac{z^2}{\alpha^2}\right)\right], \end{aligned}$$

e quindi

$$\lambda = \left(\frac{R^2}{2}\right)\frac{\frac{gz}{\alpha^2} + K\left(x^2 + y^2 + \frac{z^2}{\alpha^2}\right)}{x^2 + y^2 + \frac{z^2}{\alpha^4}},$$

da cui

$$\boldsymbol{R} = \underbrace{\left[\frac{\frac{gz}{\alpha^2} + K\left(x^2 + y^2 + \frac{z^2}{\alpha^2}\right)}{x^2 + y^2 + \frac{z^2}{\alpha^4}}\right]}_{\lambda}\left(x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + \frac{z}{\alpha^2}\boldsymbol{e}_z\right).$$

Non rimane quindi che fare il calcolo esplicito di $\boldsymbol{R}$ nei tre punti di equilibrio.

- Punto $A = (0, 0, \alpha R)$

$$\boldsymbol{R}_A = (g + K\alpha R)\,\boldsymbol{e}_z.$$

- Punto $B = (0, 0, -\alpha R)$

$$\boldsymbol{R}_B = (g - K\alpha R)\,\boldsymbol{e}_z.$$

- Punto $C = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}R\cos\phi, \frac{\sqrt{2}}{2}R\sin\phi, -\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha R\right)$

$$\boldsymbol{R}_C = \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}KR - \frac{g}{2\alpha}}{1 + \frac{1}{\alpha^2}}\right)\left(\cos\phi\boldsymbol{e}_x + \sin\phi\boldsymbol{e}_y - \alpha\boldsymbol{e}_z\right).$$