Prova Scritta di Sistemi Dinamici
09 - 06 - 2016

Primo esercizio

Un punto P di massa $m = 1$, è vincolato a stare su di un piano verticale. Si indica con x l'asse orizzontale e con y l'asse verticale del piano, e con O l'origine degli assi. Il punto è vincolato inoltre a mantenere invariata la distanza l dal punto $A \equiv (a, 0)$. Il piano su cui si trova P ruota con velocità angolare costante ω attorno all'asse y. Il punto è poi soggetto alla forza peso diretta nel verso opposto dell'asse y. Tutti i vincoli sono lisci.

(a). Si scriva l'energia cinetica di P.

(b). Supponendo $a = l$, si determinino le configurazioni di equilibrio.

(c). Nell'ipotesi che $a = l$ e che $\dfrac{\omega^2 l}{g} = 1$, analizzare la stabilità delle configurazioni di equilibrio.

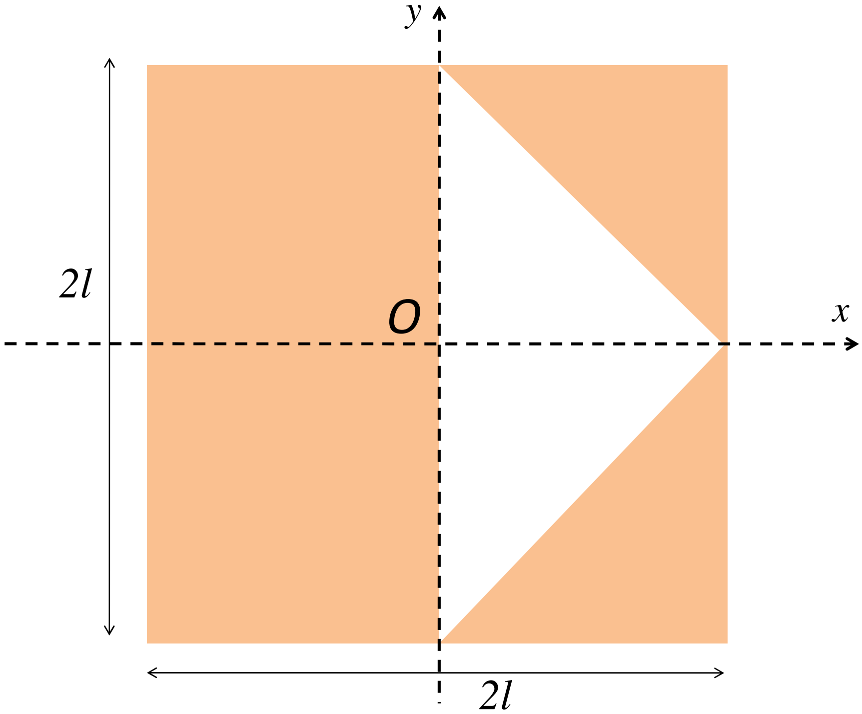
Secondo esercizio

Una lamina materiale di massa m, è costitutita da un quadrato di lato $2l$ con un foro a forma di triangolo isoscele si base $2l$, come mostrato in figura.

(a). Facendo riferimento alla figura, si calcoli la matrice d'inerzia rispetto al SdR $\{O,\ x, y, z\}$ centrato in O, in cui l'asse z è ortogonale al piano della lamina.

(b). Si calcoli la matrice d'inerzia rispetto al SdR $\{P_o,\ x, y, z\}$, dove P_o è il centro di massa della lamina, le cui coordinate, rispetto al SdR $\{O,\ x, y, z\}$ sono $P_o \equiv (-d, 0, 0)$.

(c). Supponendo che la lamina possa ruotare senza attrito attorno all'asse y passante per O, si scriva l'equazione di moto.



y
2l
O
x
2l

SVOLGIMENTO

Primo esercizio

(a). Lavoriamo nel SdR solidale con il piano che ruota. Sia $\{O,x,y,z\}$ tale SdR, dove l'asse z è ortogonale al piano x,y e siano $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$ i rispettivi versori. Abbiamo

$$A - O = a\boldsymbol{i} \ .$$

Selezioniamo come parametro lagrangiano l'angolo θ, $\theta \in (-\pi,\pi]$, che il vettore $(P-A)$ forma con l'asse x. Il vettore posizione del punto P è

$$P - O = (l\cos\theta + a)\,\boldsymbol{i} + (l\sin\theta)\ \boldsymbol{j} \ .$$

Per calcolare la velocità di P, o meglio la velocità assoluta di P (ovvero la velocità del punto P rispetto al SdR fisso che vede anche la rotazione del piano x, y), applichiamo la formula della cinematica relativa

$$(P \overset{\bullet}{-} O)\Big|_{\mathrm{A}} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega}\wedge(P-O) + (P \overset{\bullet}{-} O)\Big|_{\mathrm{R}} \ ,$$

dove:

- $\boldsymbol{v}_O$ è la velocità del punto O. Nel nostro caso O sta sull'asse di rotazione e quindi $\boldsymbol{v}_O = 0$.
- $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare del SdR $\{O,x,y,z\}$ rispetto al sistema fisso. Esprimendo $\boldsymbol{\omega}$ nel SdR $\{O,\ x,y,z\}$ abbiamo

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\ \boldsymbol{j} \ .$$

- $(P \overset{\bullet}{-} O)\Big|_{\mathrm{R}}$ è la velocità relativa di P, ovvero la velocità del punto P rispetto al SdR $\{O,\ x,y,z\}$. In particolare, esprimendo $(P \overset{\bullet}{-} O)\Big|_{\mathrm{R}}$ nel SdR solidale $\{O,\ x,y,z\}$ abbiamo

$$(P \overset{\bullet}{-} O)\Big|_{\mathrm{R}} = -l\dot\theta\sin\theta\ \boldsymbol{i} + l\dot\theta\cos\theta\ \boldsymbol{j} \ .$$

Mettendo insieme tutti gli addendi otteniamo

$$\begin{aligned}
(P \overset{\bullet}{-} O)\Big|_{\mathrm{A}} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & \omega & 0 \\ (l\cos\theta + a) & (l\sin\theta) & 0 \end{vmatrix} + \left(-l\dot\theta\sin\theta\right)\ \boldsymbol{i} + \left(l\dot\theta\cos\theta\right)\ \boldsymbol{j} \\
&= -l\dot\theta\sin\theta\ \ \boldsymbol{i} + l\dot\theta\cos\theta\ \boldsymbol{j}\ - \omega\,(l\cos\theta + a)\,\boldsymbol{k} \ .
\end{aligned}$$

L'energia cinetica (si ricordi che $m=1$) è

$$T = \frac{1}{2}\left((P \overset{\bullet}{-} O)\Big|_{\mathrm{A}}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(l^2\dot\theta^2 + \omega^2\,(l\cos\theta + a)^2\right) . \tag{1}$$

Si osserva che allo stesso risultato saremmo potuti giungere se avessimo espresso le coordinate del punto P nel SdR fisso $\{O,\ X,y,Z\}$. Gli assi x, z del SdR $\{O,\ x,y,z\}$ formano un angolo ωt rispetto agli assi fissi X e Z. Quindi le componenti del vettore posizione $(P-O)$ nel SdR fisso $\{O,\ X,y,Z\}$, sono

$$(P - O) = (l\cos\theta + a)\,(\cos\omega t\ \boldsymbol{e}_X - \sin\omega t\ \boldsymbol{e}_Z) + l\sin\theta\ \boldsymbol{e}_Y \ ,$$

dove $\boldsymbol{e}_Y$ coincide con $\boldsymbol{j}$. Derivando la precedente espressione troviamo l'espressione del vettore velocità di P nel SdR fisso $\{O,\ X,y,Z\}$ che, elevata al quadrato, ci conduce esattamente alla (1).

(b) . L'energia potenziale dovuta alla forza peso agente su P è

$$V = gy_P = gl\sin\theta\ .$$

La funzione di Lagrange è dunque

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2}l^2\dot{\theta}^2}_{T_2} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}\omega^2\left(l\cos\theta + a\right)^2}_{T_o} - gl\sin\theta}_{-V_{eff}}\ .$$

Quindi l'energia potenziale efficace è

$$V_{eff}\left(\theta\right) = gl\sin\theta - \frac{1}{2}\omega^2\left(l\cos\theta + a\right)^2,$$

ovvero, siccome $l = a$,

$$V_{eff}\left(\theta\right) = gl\left[\sin\theta - \frac{1}{2}\frac{\omega^2 l}{g}\left(\cos\theta + 1\right)^2\right]\ .$$

Dobbiamo quindi trovare i massimi/minimi di

$$f\left(\theta\right) = \sin\theta - \frac{\beta}{2}\left(\cos\theta + 1\right)^2,$$

dove $\beta = \dfrac{\omega^2 l}{g}$. Le configurazioni di equilibrio si ottengono imponendo

$$f^{\,'}\left(\theta\right) = \cos\theta + \beta\left(\cos\theta + 1\right)\sin\theta\ = 0.$$

Siccome né $\theta = 0$, né $\theta = \pm\pi$, sono soluzioni, abbiamo

$$f'\left(\theta\right) = 0, \quad \Longrightarrow \quad \cot\theta = -\beta\left(\cos\theta + 1\right),$$

che si risolve per via grafica, come mostrato nella sottostante figura.
Abbiamo quindi due configurazioni diu equilibirio: la prima corrisponde a $\theta_1 \in (-\pi/2,\ 0)$ mentre la seconda a $\theta_2 \in (\pi/2, \pi)$.

(c) . Se $\beta = 1$, allora

$$V'_{eff}\left(\theta\right) = gl\left[\cos\theta + \left(\cos\theta + 1\right)\sin\theta\right]\ ,$$

e

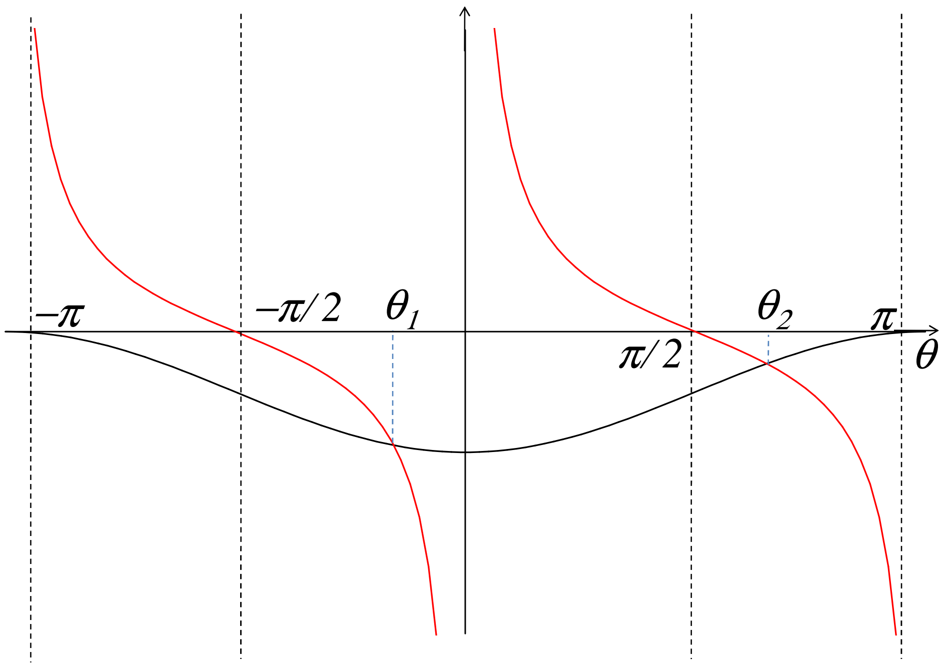
$$\begin{aligned} V''_{eff}\left(\theta\right) &= gl\left[-\sin\theta - \sin^2\theta + \cos^2\theta + \cos\theta\right] \\ &= gl\left(\cos\theta - \sin\theta\right)\left(1 + \cos\theta + \sin\theta\right). \end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$V''_{eff}\left(\theta_1\right) = gl(\underbrace{\cos\theta_1}_{+} + \underbrace{(-\sin\theta_1)}_{+})\ \underbrace{(1 + \underbrace{\cos\theta_1}_{+} + \underbrace{\sin\theta_1}_{-}\ )}_{+}\ > 0,$$

$$V''_{eff}\left(\theta_2\right) = gl(\underbrace{\cos\theta_2}_{-} + \underbrace{(-\sin\theta_2)}_{-})\ \underbrace{(1 + \underbrace{\cos\theta_2}_{-} + \underbrace{\sin\theta_2}_{+}\ )}_{+}\ < 0.$$

Quindi θ_1 è configurazione di equilibrio stabile, mentre θ_2 è instabile.



Secondo esercizio

(a) . Per prima cosa dobbiamo valutare la densità superficiale di massa della lamina

$$\sigma = \frac{m}{(\text{area della lamina})} = \frac{m}{(2l)^2 - \dfrac{2l \cdot l}{2}} = \frac{m}{3l^2} \; .$$

Evidentemente $\{O,\ x, y, z\}$ è, per ovvie ragioni di simmetria, una terna principale d'inerzia, quindi

$$\mathbb{I}(O) = \begin{pmatrix} I_{xx}(O) & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy}(O) & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz}(O) \end{pmatrix},$$

dove, dal momento che il sistema giace sul piano $z = 0$, $I_{zz}(O) = I_{xx}(O) + I_{yy}(O)$. Cominciamo col calcolare $I_{yy}(O)$. Abbiamo

$$I_{yy}(O) = I_{yy}^{quadrato\ pieno}(O) - I_{yy}^{triangolo}(O) \,. \tag{2}$$

Quindi

$$\begin{aligned} I_{yy}^{quadrato\ pieno}(O) &= \frac{\overbrace{(\text{massa quadrato pieno})}^{(2l)^2\sigma}\ (2l)^2}{12} \\ &= \frac{l^2}{3}(2l)^2\sigma = \frac{4}{9}ml^2. \end{aligned}$$

Per calcolare il momento $I_{yy}^{triangolo}(O)$, osserviamo che possiamo considerare il triangolo isoscele "virtuale" come l'unione di due triangoli rettangoli. Quindi considerando un solo triangolo rettangolo suddividiamolo in tante "sbarrette" di spessore infinitesimo dy, parallele all'asse x, localizzate alla quota y, con $0 \leq y \leq l$. La lunghezza della sbaretta posta a quota y è

$$\ell(y) = l - y,$$

mentre la sua massa sarà $\sigma\ell(y)\,dy$, cioè σ per l'area della sbarretta infinitesima. Il momento d'inerzia (infinitesimo) di ciacuna sbarretta rispetto all'asse y si determina applicando il teorema di Huygens

$$\frac{1}{12}\left(\sigma\ell(y)\,dy\right)\left[\ell(y)\right]^2 + \left(\sigma\ell(y)\,dy\right)\left[\frac{\ell(y)}{2}\right]^2 = \frac{1}{3}\left[\ell(y)\right]^3\sigma dy\ .$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} I_{yy}^{triangolo}(O) &= 2\int_0^l \frac{1}{3}(l-y)^3\,\sigma dy \\ &= \frac{2}{3}\sigma\frac{l^4}{4} = \frac{1}{18}ml^2\ . \end{aligned}$$

Tornando alla (2) si ottiene

$$I_{yy}(O) = \frac{4}{9}ml^2 - \frac{1}{18}ml^2 = \frac{7}{18}ml^2\ .$$

Per quel che riguarda $I_{xx}(O)$, si procede come prima per cui

$$I_{xx}(O) = I_{xx}^{quadrato\ pieno}(O) - I_{xx}^{triangolo}(O)\,,$$

dove $I_{xx}^{quadrato\ pieno}(O) = I_{yy}^{quadrato\ pieno}(O) = \frac{4}{9}ml^2$. Ora, il triangolo "virtule" è un triangolo isoscele di base $2l$ ed altezza l, quindi il momento d'inerzia rispetto alla retta x è uguale a quello rispetto alla retta y, ovvero

$$I_{xx}^{triangolo}(O) = I_{yy}^{triangolo}(O) = \frac{1}{18}ml^2\ .$$

Di conseguenza $I_{xx}(O) = \frac{7}{18}ml^2$. La matrice d'inerzia è dunque

$$\mathbb{I}(O) = \begin{pmatrix} \frac{7}{18}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{18}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{9}ml^2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

(b) . Il SdR $\{P_o,\ x,y,z\}$ è una terna principale d'inerzia: l'asse z, ortogonale al piano, è asse principale d'inerza, l'asse y è ortogonale ad un piano di simmetria materiale e quindi è principale d'inerzia. Abbiamo quindi

$$\mathbb{I}(P_o) = \begin{pmatrix} I_{xx}(P_o) & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy}(P_o) & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz}(P_o) \end{pmatrix}.$$

Rispetto al SdR $\{P_o,\ x,y,z\}$ il punto O ha coordinate $O \equiv (d,0,0)$. Applicando quindi il teorema di Huygens abbiamo

$$\mathbb{I}(O) = \mathbb{I}(P_o) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & md^2 & 0 \\ 0 & 0 & md^2 \end{pmatrix},$$

da cui, ricordando la (3)

$$\mathbb{I}(P_o) = \begin{pmatrix} \frac{7}{18}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{18}ml^2 - md^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{9}ml^2 - md^2 \end{pmatrix}.$$

(c) . La lamina ha un solo grado di libertà: l'ango φ di cui ruota attorno all'asse y. Abbiamo quindi a che fare con un moto piano e quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{18}ml^2\right)\dot{\varphi}^2 .$$

La funzione di Lagrenge è dunque $\mathcal{L} = T$, e pertanto (siccome i vincoli sono lisci) l'equzione di moto è

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 0, \quad \Longrightarrow \quad \frac{7}{18}ml^2\ddot{\varphi} = 0 \; .$$