Prova Scritta di Sistemi Dinamici
08 - 01 - 2018

Primo esercizio

E' data una particella materiale P di massa $m = 1$, vincolata a scorrere su una circonferenza liscia di centro O fisso, il cui raggio evolve nel tempo, cioè $R = R(t) > 0$, in maniera prescritta. Si consideri come parametro lagrangiano l'angolo θ, che il vettore $P - O$ forma con l'asse x.

(a). Si provi che $\dot{\theta} \to 0$ se $R(t) \to \infty$ per $t \to \infty$.

(b). Supponendo che $R|_{t=0} = 1$, $\theta|_{t=0} = 0$, e che $\dot{\theta}_o = \dot{\theta}\Big|_{t=0} \neq 0$ dire come bisogna selezionare $R(t)$ affinché sia finito il $\lim_{t \to +\infty} \theta(t)$. Dare anche un esempio di $R(t)$ tale che $\lim_{t\to+\infty} R(t) = +\infty$, per cui $\lim_{t\to+\infty} \theta(t)$ diverga.

(c). Determinare la reazione vincolare esercitata dalla circonferenza sulla particella in funzione di $R(t)$ e di $\theta(t)$.

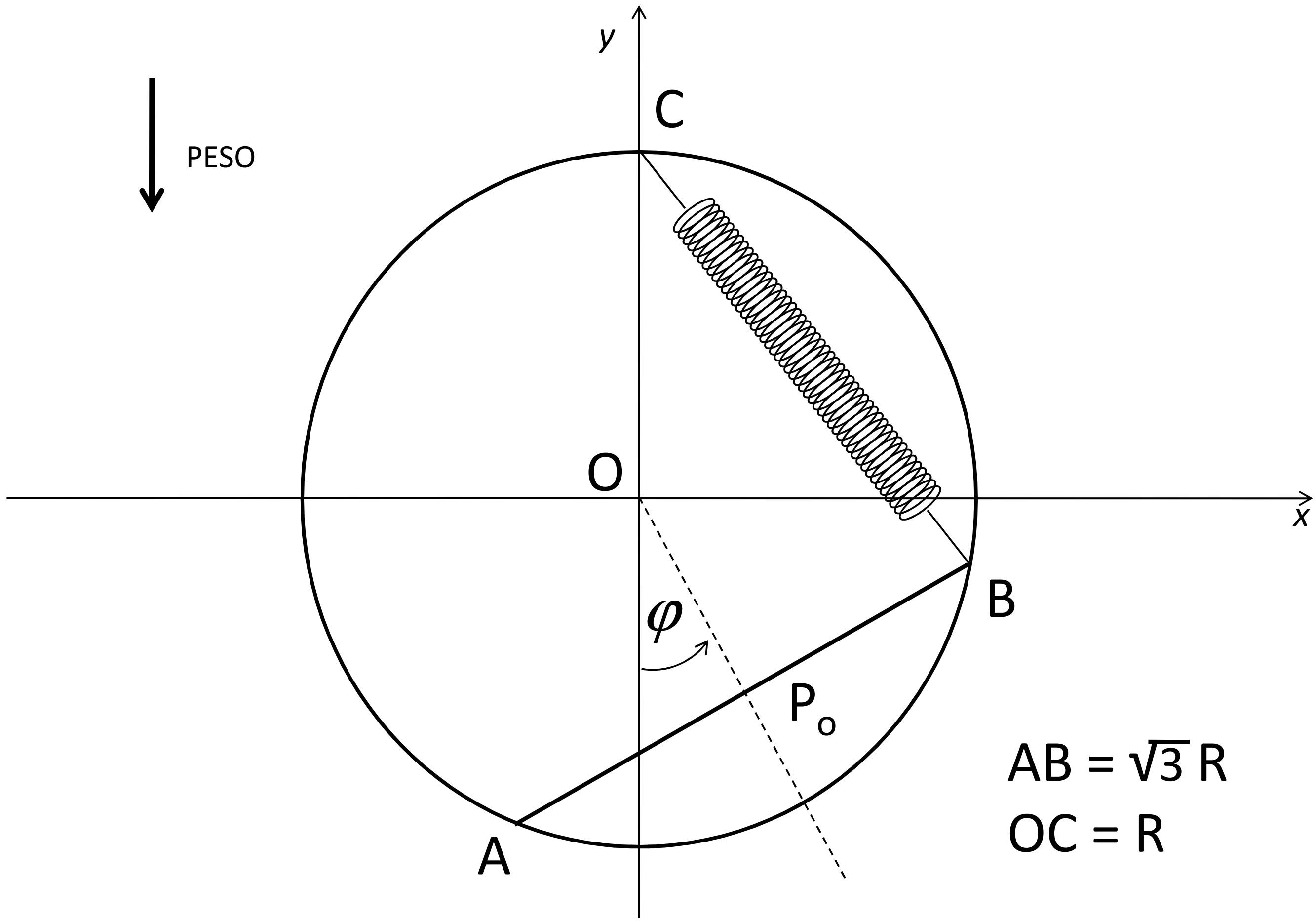
Secondo esercizio

Sono date una circonferenza di centro O e raggio R ed un'asta di lunghezza $\sqrt{3}R$ e massa m, i cui estremi A e B sono vincolati sulla circonferenza (v. figura). Una molla di rigidezza K e massa e lunghezza a riposo trascurabili collega l'estremo B al punto C come mostrato in figura. Detto P_o il centro di massa dell'asta, si consideri come coordinata lagrangiana l'angolo φ, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, che il vettore $(P_o - O)$ forma con l'asse y (v. figura). Tutti i vincoli sono lisci ed il peso è come in figura.

(a). Determinare l'energia potenziale totale.

(b). Assumendo che $mg = \left(\sqrt{3} - 1\right) KR$, si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne analizzi la stabilità

(c). Si calcoli, sempre nell'ipotesi $mg = \left(\sqrt{3} - 1\right) KR$, la frequenza delle piccolle oscillazioni in corrispondenza della configurazione di equilibrio stabile.


y
C
PESO
O
x
B
φ
Pₒ
A
AB = √3 R
OC = R

SVOLGIMENTO

Primo esercizio

(a) . Il vettore posizione della particella P è

$$P - O = R\,(t)\,(\cos\theta \boldsymbol{e}_x + \sin\theta \boldsymbol{e}_y)\,,$$

per cui l'energia cinetica

$$T = \frac{m}{2}(P \dot{-} O)^2 = \frac{m}{2}\left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2\right),$$

e la funzione di Lagrange

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\theta}^2\right).$$

L'equazione di moto è

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(R^2\dot{\theta}\right) = 0, \tag{1}$$

da cui

$$\dot{\theta} = \frac{A_o}{R^2\,(t)},$$

con A_o costante che dipende dai dati iniziali. Di conseguenza

$$\lim_{t\to+\infty}\dot{\theta} = \lim_{t\to+\infty}\frac{A_o}{R^2\,(t)} = 0,$$

se $R\,(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$.

(b) . Riprendendo la (1) e tenendo conto del fatto che $R|_{t=0} = 1$, abbiamo

$$R^2\dot{\theta} = \dot{\theta}_o, \tag{2}$$

dove, come specificato, $\dot{\theta}_o$ denota $\dot{\theta}\Big|_{t=0}$ ed è non nullo. Sfruttando poi il fatto che $\theta|_{t=0} = 0$, possiamo integrare la (2) ottenendo

$$\theta\,(t) = \dot{\theta}_o \int_0^t \frac{d\tau}{R^2\,(\tau)}.$$

Quindi

$$\lim_{t\to+\infty}\theta\,(t) = \dot{\theta}_o \int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{R^2\,(\tau)}.$$

Di conseguenza $\lim_{t\to+\infty}\theta\,(t)$ è finito soltanto se

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\tau}{R^2\,(\tau)} < \infty.$$

Come esempio di funzione $R\,(t)$ divergente per cui $\lim_{t\to+\infty}\theta\,(t)$ è infinito (il segno dipende dal segno $\dot{\theta}_o$) è sufficiente prendere

$$R\,(t) = \sqrt{1+t}.$$

Infatti, $R|_{t=0} = 1$ ed inoltre che $\theta|_{t=0} = 0$ e dove $\dot{\theta}_o$ denota $\dot{\theta}\Big|_{t=0}$. Siccome $R\,(t) = 1 + t$, abbiamo

$$\theta\,(t) = \dot{\theta}_o \int_0^t \frac{d\tau}{1+\tau} = \dot{\theta}_o \ln(1+t)\,,$$

per cui $\lim_{t\to+\infty}\theta(t) = sign\left(\dot{\theta}_o\right)\infty$.

(c). L'unica forza agente sulla circonferenza è la reazione vincolare diretta radialmente (dal momento che il vincolo è liscio). Scriveremo dunque $m\ddot{\boldsymbol{x}} = \lambda\boldsymbol{e}_r$, per cui

$$\lambda = m\ddot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{e}_r.$$

Applicando la formula del binomio di Lagrange

$$m\ddot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{e}_r = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r},$$

dove, nel nostro caso, $r(t) = R(t)$. Si ottiene dunque

$$\lambda = m\left(\ddot{R} - R\dot{\theta}^2\right).$$

Secondo esercizio

(a). Cominciamo col determinare le coordinate dei vari punti d'interesse. Innanzitutto

$$|P_o - O| = \sqrt{R^2 - \frac{3}{4}R^2} = \frac{R}{2},$$

da cui

$$P_o - O = \frac{R}{2}\left(\sin\varphi\boldsymbol{e}_x - \cos\varphi\boldsymbol{e}_y\right),$$

$$B - P_o = \frac{\sqrt{3}}{2}R\left(\cos\varphi\boldsymbol{e}_x + \sin\varphi\boldsymbol{e}_y\right).$$

Siccome $C - O = R\boldsymbol{e}_y$ e $(C - O) - (P_o - O) - (B - P_o) = (C - B)$, abbiamo

$$\begin{aligned} C - B &= R\boldsymbol{e}_y - \frac{R}{2}\left(\sin\varphi\boldsymbol{e}_x - \cos\varphi\boldsymbol{e}_y\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}R\left(\cos\varphi\boldsymbol{e}_x + \sin\varphi\boldsymbol{e}_y\right) \\ &= R\left[\left(-\frac{1}{2}\sin\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{1}{2}\cos\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi + 1\right)\boldsymbol{e}_y\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

Deriviamo adesso la (3) seguendo un'altra procedura. Siccome $\widehat{P_oOB} = \pi/3$, l'angolo che il segmento BO forma con l'asse y è $\varphi + \pi/3$. Di conseguenza

$$B - C = R\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(-R - R\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\right)\boldsymbol{e}_x$$

e quindi si ottiene nuovamente la (3), cioè

$$\begin{aligned} C - B &= -(B - C) = -R\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(R + R\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\right)\boldsymbol{e}_x \\ &= R\left(-\frac{1}{2}\sin\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\right)\boldsymbol{e}_x + R\left(1 + \frac{1}{2}\cos\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi\right)\boldsymbol{e}_y\ . \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} |C - B|^2 &= 2R^2\left[1 + \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= R^2\left[2 + \cos\varphi - \sqrt{3}\sin\varphi\right]. \end{aligned} \tag{4}$$

Verifichiamo che la (4) è corretta calcolando $|C-B|^2$ in corrispondenza di angoli particolari. Se il punto B giace sull'asse y sotto il punto C, abbiamo $\varphi = -\pi/3$ e dunque $|C-B|^2 = 4R^2$. Se poi $\varphi = 0$ otteniamo $|C-B|^2 = 3R^2$, come risulta applicando il teorema di Pitagora.

Calcoliamo adesso l'energia potenziale dovuta alla forza peso

$$V_{peso} = -mg\frac{R}{2}\cos\varphi,$$

e quella dovuta alla molla

$$V_{el} = \frac{K}{2}|C-B|^2 = \frac{K}{2}R^2\left[2 + \left(\cos\varphi - \sqrt{3}\sin\varphi\right)\right].$$

L'energia potenziale totale è

$$\begin{aligned} V(\varphi) &= -mg\frac{R}{2}\cos\varphi + \frac{K}{2}R^2\left[2 + \left(\cos\varphi - \sqrt{3}\sin\varphi\right)\right] \\ &= \left(\frac{K}{2}R^2 - mg\frac{R}{2}\right)\cos\varphi - \frac{K}{2}R^2\sqrt{3}\sin\varphi + KR^2 \\ &= \frac{R}{2}\left[(KR - mg)\cos\varphi - KR\sqrt{3}\sin\varphi\right] + KR^2. \end{aligned}$$

(b). Nell'ipotesi $mg = \left(\sqrt{3}-1\right)KR$, l'energia potenziale diventa

$$V(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}KR^2\left[-\cos\varphi - \sin\varphi\right] + KR^2,$$

da cui

$$V'(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}KR^2\left[\sin\varphi - \cos\varphi\right],$$

e

$$V''(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}KR^2\left[\cos\varphi + \sin\varphi\right] = -V(\varphi).$$

Siccome $\varphi = \pm\pi/2$ non è soluzione di $V'(\varphi) = 0$, abbiamo

$$V'(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}KR^2\cos\varphi\left[\tan\varphi - 1\right]$$

e quindi $V'(\varphi) = 0, \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$ e $\varphi = -\frac{3}{4}\pi$. Le configurazioni di equilibrio sono due e, più precisamente, $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ e $\varphi_2 = -\frac{3}{4}\pi$.

Per quel che concerne la stabilità, abbiamo:

- $\varphi = \pi/4$, $V''(\pi/4) = \frac{\sqrt{6}}{2}KR^2 > 0$, configurazione stabile.
- $\varphi = -3/4\pi$, $V''(-3/4\pi) = -\frac{\sqrt{6}}{2}KR^2 < 0$, configurazione instabile.

(c). Calcoliamo l'energia cinetica della sbarretta,

$$T = \frac{m}{2}|\dot{P_o - O}|^2 + \frac{1}{2}I(P_o)\dot{\varphi}^2.$$

Abbiamo

$$(P_o \dot{-} O) = \frac{R}{2}\left(\cos\varphi \boldsymbol{e}_x + \sin\varphi \boldsymbol{e}_y\right)\dot{\varphi}, \quad \Rightarrow \quad |P_o \dot{-} O|^2 = \frac{R^2}{4}\dot{\varphi}^2.$$

Per cui

$$T = \frac{mR^2}{8}\dot{\varphi}^2 + \frac{mR^2}{8}\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{mR^2}{2}\right)\dot{\varphi}^2.$$

La punlsazione delle piccole oscillazioni è dunque

$$\omega^2 = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}KR^2}{\frac{mR^2}{2}} = \sqrt{6}\frac{K}{m}.$$