

Prova Scritta di Sistemi Dinamici
6 - luglio - 2015

Primo esercizio

Un punto materiale P di massa $m = 1$, è soggetto alla forza centrale conservativa del tipo

$$\mathbf{F}(r) = \left(-\frac{\lambda}{r^3} - \arctan r \right) \mathbf{e}_r,$$

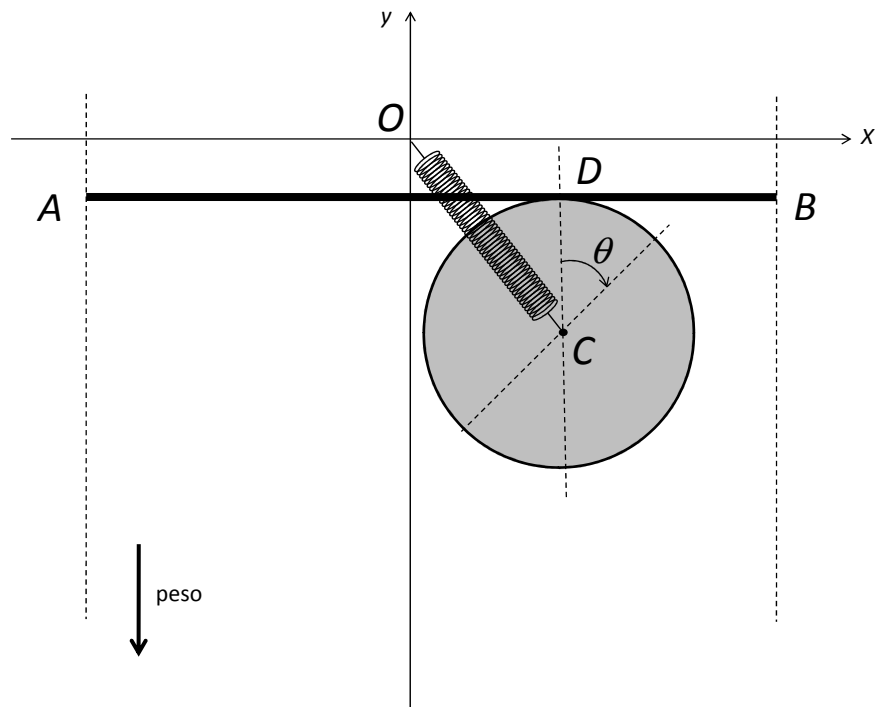
con $\lambda \in \mathbb{R}$. Si consideri direttamente il moto piano.

- (a). Tracciare qualitativamente il grafico di $V_{eff}(r)$ al variare di λ .
- (b). Specificare per quali valori di λ esiste un'orbita circolare, e dire come se ne determina il raggio.
- (c). Nel caso in cui λ è tale per cui solo moti limitati sono possibili, valutare l'ordine di grandezza di r_m , distanza minima dal centro, e r_M , distanza massima dal centro, per valori di E molto grandi.

Secondo esercizio

Un'asta omogenea AB ha gli estremi vincolati a scorrere su guide rettilinee verticali, in modo da mantenersi orizzontale (v. figura). Il moto dell'asta è imposto, si che $y_A = y_B = b(t)$, con $b(t)$ funzione data. Un disco omogeneo di massa m e raggio R è vincolato a rotolare senza strisciare sull'asta AB . Il centro C del disco è collegato tramite una molla di massa e lunghezza a riposo trascurabili al punto O . La rigidezza della molla è k .

- (a). Scrivere l'equazione di moto del disco ed integrarla, prendendo come variabile lagrangiana l'angolo di rotolamento θ (positivo per rotazioni antiorarie).
- (b). Calcolare la reazione \mathbf{N} applicata al disco nel punto di contatto D .
- (c). Supponendo adesso che il sistema sia soggetto anche alla forza peso diretta come in figura e che $b(t) < 0$, determinare una condizione su $b(t)$ affinché il disco non si distacchi dalla guida AB .



SVOLGIMENTO

Primo esercizio

(a). Ponendoci nel piano, si esprime il vettore \mathbf{x} , posizione del punto materiale, tramite le coordinate polari $r \in (0, +\infty)$, e $\varphi \in [-\pi, \pi)$,

$$\mathbf{x} = r \cos \varphi \mathbf{e}_x + r \sin \varphi \mathbf{e}_y .$$

La velocità di P è data da

$$\dot{\mathbf{x}} = \left(\dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \right) \mathbf{e}_x + \left(\dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \right) \mathbf{e}_y ,$$

e l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) .$$

Per scrivere la funzione di Lagrange dobbiamo determinare l'energia potenziale $V(r)$, che è una primitiva, cambiata di segno, della forza radiale. Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} V(r) &= - \int \left(-\frac{\lambda}{r^3} - \arctan r \right) dr = \int \frac{\lambda}{r^3} dr + \int \arctan r dr \\ &= -\frac{\lambda}{2r^2} + r \arctan r - \frac{1}{2} \ln(r^2 + 1) , \end{aligned}$$

da cui

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) - \left[-\frac{\lambda}{2r^2} + r \arctan r - \frac{1}{2} \ln(r^2 + 1) \right] .$$

La variabile φ è ciclica e quindi il relativo momento coniugato $p_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = r^2 \dot{\varphi}$, è conservato. Quindi

$$\dot{\varphi} = \frac{A_o}{r^2} , \tag{1}$$

con A_o costante da determinarsi tramite le condizioni iniziali.

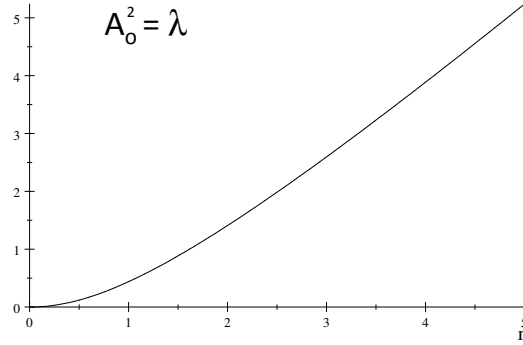
Per individuare facilmente l'energia potenziale efficace, scriviamo la funzione di Hamilton $\mathcal{H} = T + V$, dove al posto di $\dot{\varphi}$ sostituiamo l'espressione (1). Si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \right) + \left[-\frac{\lambda}{2r^2} + r \arctan r - \frac{1}{2} \ln(r^2 + 1) \right] \\ &= \frac{\dot{r}^2}{2} + \underbrace{\frac{(A_o^2 - \lambda)}{2r^2} + r \arctan r - \frac{1}{2} \ln(r^2 + 1)}_{V_{eff}(r)} . \end{aligned}$$

Abbiamo quindi tre casi.

1. $\lambda = A_o^2$, $\Rightarrow V_{eff}(r) = r \arctan r - \frac{1}{2} \ln(r^2 + 1)$. E' immediato mostrare che $V_{eff}(0) = 0$, e che $V'_{eff}(r) = \arctan r > 0$, per $r > 0$. Inoltre

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \left(r \arctan r - \frac{1}{2} \ln(r^2 + 1) \right) &= \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\arctan r - \frac{1}{2} \frac{\ln(r^2 + 1)}{r} \right) \\ &= \left(\lim_{r \rightarrow \infty} r \right) \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\arctan r - \frac{1}{2} \frac{\ln(r^2 + 1)}{r} \right) . \end{aligned}$$



Ora

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\arctan r - \frac{1}{2} \frac{\ln(r^2 + 1)}{r} \right) = \frac{\pi}{2} - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{\ln(r^2 + 1)}{r} = \frac{\pi}{2} - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{r^2 + 1} = \frac{\pi}{2},$$

per cui $\lim_{r \rightarrow \infty} (r \arctan r - \frac{1}{2} \ln(r^2 + 1)) = +\infty$. Il grafico di $V_{eff}(r)$ è rappresentato nella figura sovrastante

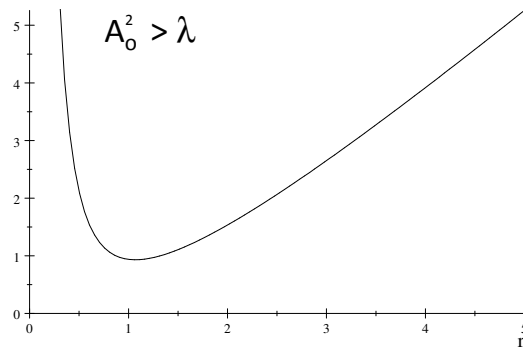
2. $\lambda < A_o^2$, $\Rightarrow V_{eff}(r) = \frac{(A_o^2 - \lambda)}{2r^2} + r \arctan r - \frac{1}{2} \ln(r^2 + 1)$, con, ovviamente $(A_o^2 - \lambda) > 0$. A differenza del caso precedente abbiamo $\lim_{r \rightarrow 0} V_{eff}(r) = +\infty$, mentre, ripetendo i ragionamenti del caso precedente, $\lim_{r \rightarrow \infty} V_{eff}(r) = +\infty$. Per quanto riguarda la derivata prima

$$V'_{eff}(r) = -\frac{(A_o^2 - \lambda)}{r^3} + \arctan r.$$

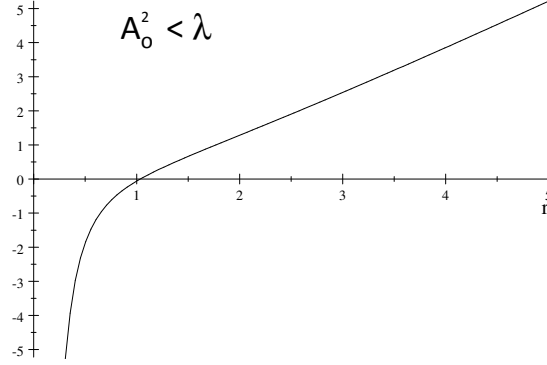
Questa ha un unico zero in $(0, +\infty)$. Infatti $\frac{(A_o^2 - \lambda)}{r^3}$ è monotona decrescente e tende a $+\infty$ per $r \rightarrow 0^+$, mentre $\arctan r$ è monotona crescente e vale 0 quando $r = 0$. Quindi l'equazione

$$\frac{(A_o^2 - \lambda)}{r^3} = \arctan r, \quad (2)$$

ammette un'unica soluzione r_o , con $0 < r_o$. In particolare, $V'_{eff}(r) < 0$ per $0 < r < r_o$, $V'_{eff}(r_o) = 0$, e $V'_{eff}(r) > 0$ per $r_o < r$. L'andamento del grafico di $V_{eff}(r)$ è dunque il seguente



3. $\lambda > A_o^2$, $\Rightarrow V_{eff}(r) = -\frac{|A_o^2 - \lambda|}{2r^2} + r \arctan r - \frac{1}{2} \ln(r^2 + 1)$. Adesso abbiamo $\lim_{r \rightarrow 0} V_{eff}(r) = -\infty$, e, sempre come prima, $\lim_{r \rightarrow \infty} V_{eff}(r) = +\infty$. Inoltre $V'_{eff}(r) = \frac{|A_o^2 - \lambda|}{r^3} + \arctan r$, è sempre positiva per $r > 0$. Quindi $V_{eff}(r)$ è monotona crescente ed il suo grafico è il seguente



(b). I casi **1** e **3** sopra descritti non ammettono orbite circolari. L'unico caso per cui esiste una ed una sola orbita circolare è il caso **2**, cioè $\lambda < A_o^2$. Il raggio dell'orbita circolare si ottiene risolvendo l'equazione (2), cioè $V'_{eff}(r) = 0$, la quale, ripetendo gli stessi ragionamenti del caso **2**, ammette una ed una sola soluzione per $r \in (0, +\infty)$.

(c). Come prima, abbiamo orbite limitate soltanto se $\lambda < A_o^2$. In questo caso il raggio minimo r_m e quello massimo r_M sono le radici di

$$\frac{|A_o^2 - \lambda|}{2r^2} + r \arctan r - \frac{1}{2} \ln(r^2 + 1) = E.$$

Riferirendoci al caso **2** del punto (a), dobbiamo dare un'espressione approssimata di r_m e r_M per E molto grande. Nel caso di r_m , considerare E molto grande significa considerare r prossimo a zero, e cioè approssimare $V_{eff}(r)$ con

$$V_{eff}(r) \approx \frac{(A_o^2 - \lambda)}{2r^2}.$$

Per cui

$$V_{eff}(r) = E, \Rightarrow \frac{(A_o^2 - \lambda)}{2r^2} \approx E, \Rightarrow r_m \approx \sqrt{\frac{(A_o^2 - \lambda)}{2E}}.$$

Quando consideriamo r_M , prendere E molto grande vuol dire considerare $r \gg 1$. In tale approssimazione il termine $\frac{(A_o^2 - \lambda)}{2r^2}$ può essere trascurato ed anche $\frac{\ln(r^2 + 1)}{2r}$ risulta trascurabile dal momento che, come visto al punto (a), $\frac{\ln(r^2 + 1)}{2r}$ tende a 0 quando $r \rightarrow \infty$. Quindi, con buona approssimazione, se $r \gg 1$

$$V_{eff}(r) \approx r \underbrace{\arctan r}_{\approx \frac{\pi}{2}} \approx r \frac{\pi}{2}.$$

Pertanto l'equazione $V_{eff}(r) = E$, può essere così semplificata $r \frac{\pi}{2} \approx E$, da cui

$$r_M \approx 2 \frac{E}{\pi}.$$

Secondo esercizio

(a). Cominciamo con il determinare il vettore posizione del centro C del disco

$$C - O = (-R\theta) \mathbf{e}_x + (-R + b(t)) \mathbf{e}_y . \quad (3)$$

Nello scrivere la (3), abbiamo sfruttato il vincolo di rotolamento puro il quale implica che l'ascissa del punto C sia $-R\theta$. Infatti, $\theta < 0$, rotazione antioraria, comporta $(C - O) \cdot \mathbf{e}_x > 0$, mentre $\theta > 0$, implica che C si trovi a sinistra di O , cioè $(C - O) \cdot \mathbf{e}_x < 0$. La velocità del centro del disco è

$$(\dot{C} - \dot{O}) = -R\dot{\theta}\mathbf{e}_x + \dot{b}\mathbf{e}_y ,$$

dove, lo ricordiamo, $b(t)$ è una funzione data. L'energia cinetica è

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}(\dot{C} - \dot{O})^2 + \frac{1}{2}I(C)\dot{\theta}^2 = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{b}^2\right) + \frac{m}{4}R^2\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{3}{4}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\dot{b}^2 . \end{aligned}$$

L'unica forza non vincolare agente sul disco è la molla, per cui

$$V_{molla} = \frac{k}{2}|C - O|^2 = \frac{k}{2}\left(R^2\theta^2 + (-R + b(t))^2\right) .$$

La funzione di Lagrange è dunque

$$\mathcal{L} = \frac{3}{4}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\dot{b}^2 - \frac{k}{2}\left(R^2\theta^2 + (-R + b(t))^2\right) ,$$

e l'equazione del moto $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$, diventa

$$\ddot{\theta} + \frac{2k}{3m}\theta = 0, \quad (4)$$

la cui soluzione è

$$\theta(t) = \theta_o \cos\left(\sqrt{\frac{2k}{3m}}t + \phi_o\right), \quad (5)$$

dove θ_o e ϕ_o sono costanti da determinarsi tramite le condizioni iniziali.

(b). Sia $\mathbf{N} = N_x\mathbf{e}_x + N_y\mathbf{e}_y$, con N_x, N_y incognite. Scriviamo la seconda cardinale con centro di riduzione C . Abbiamo

$$\underbrace{I(C)}_{\frac{mR^2}{2}}\ddot{\theta} = \underbrace{(D - C)}_{R\mathbf{e}_y} \wedge (N_x\mathbf{e}_x + N_y\mathbf{e}_y) = -RN_x .$$

Sfruttando la (4) otteniamo $\ddot{\theta} = -\frac{2k}{3m}\theta$, per cui

$$-\frac{mR^2}{2}\frac{2k}{3m}\theta = -RN_x ,$$

e quindi

$$N_x = \frac{kR}{3} \theta(t) \underset{(5)}{=} \frac{kR}{3} \theta_o \cos \left(\sqrt{\frac{2k}{3m}} t + \phi_o \right) .$$

Per determinare N_y scriviamo la prima cardinale, o meglio, la componente y della prima equazione cardinale

$$N_y + \mathbf{F}_{molla} \cdot \mathbf{e}_y = m(\ddot{C} - \ddot{O}) \cdot \mathbf{e}_y = m\ddot{b}. \quad (6)$$

Ora $\mathbf{F}_{molla} = -k(C - O) = -k[(-R\theta)\mathbf{e}_x + (-R + b(t))\mathbf{e}_y]$, per cui la (6) diventa

$$N_y - k(-R + b(t)) = m\ddot{b}, \quad \Rightarrow \quad N_y = k[b(t) - R] + m\ddot{b}. \quad (7)$$

(c). Riferendoci alla figura, è evidente che il disco starà in contatto con la guida AB fino a quando la componente verticale della reazione vincolare, N_y , è negativa. La molla infatti, essendo $b(t) < 0$, sarà sempre in trazione e tenderà a far aderire il disco alla guida. Quindi dapprima dobbiamo valutare N_y nel caso in cui sia presente anche la forza peso e poi, imponendo $N_y < 0$, ricaviamo la condizione su $b(t)$ che garantisce appunto il non distacco del disco dalla guida.

Riscrivendo la (6), nella quale inseriamo anche la forza peso, otteniamo

$$N_y - mg - k(-R + b(t)) = m\ddot{b},$$

La (7) diventa quindi

$$N_y = mg + k[b(t) - R] + m\ddot{b},$$

da cui, imponendo $N_y < 0$, si ricava la seguente condizione sulla funzione $b(t)$

$$mg - k(R - b(t)) + m\ddot{b} < 0, \quad \Rightarrow \quad \ddot{b} + \omega^2 b < \frac{R}{\omega^2} - g,$$

dove $\omega^2 = k/m$.