PROVA SCIRTTA di ANALISI I,
CdS in Fisica e Astrofisica, 10 febbraio 2017

Esercizio 1. Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui esiste finito il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_{\sin x}^{\tan x} \mathrm{e}^{t^2}\, dt}{x^\alpha(\mathrm{e}^{\alpha x}-1)}.$$

Par tali valori calcolare il valore del limite.

Esercizio 2. È data $f(x)$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} (k^2-1)\ln x + k\cos\sqrt{x} & \text{se } x > 0 \\ \mathrm{e}^{-kx}(x^2+3x+1) & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la funzione è ben definita su tutto $\mathbb{R}$;

(b) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$ e discuterne la derivabilità.

(c) Studiare la natura del punto $x = 0$.

Esercizio 3. Si consideri la successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\mathrm{e}} \\ a_{n+1} = a_n(1-\ln(a_n)). \end{cases}$$

(a) Stabilire se a_n ammette limite e in caso affermativo calcolarlo.

(b) Stabilire il carattere della seria $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Esercizio 4. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{2|x+1|-(x+1)^2}{|x|}.$$

(a) Determinare il campo di esistenza di f.

(b) Determinare e classificare gli estremi relativi e assoluti di f.

ES.1. $(*)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\int_{\sin x}^{tg x} e^{t^2}dx}{x^k(e^{kx}-1)}$

<u>OSS.</u> $\lim_{x\to 0} \int_{\sin x}^{tg x} e^{t^2}dx = 0$

$\lim_{x\to 0} x^k(e^{kx}-1) = \lim_{x\to 0} k x^{k+1} \dfrac{e^{kx}-1}{kx} = \begin{cases} -1 & se\ k=-1 \\ -\infty & se\ k<-1 \\ 0 & se\ k>-1 \end{cases}$

quindi affinché $\lim_{x\to 0} (*)\ \exists$ finito $\neq 0$ considero $\boxed{k>-1}$

<u>OSS</u> $\lim_{x\to 0} (*) \overset{se\ \exists}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{\int_{\sin x}^{tg x} e^{t^2}dx}{k x^{k+1}} \cdot \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\frac{e^{kx}-1}{kx}} =$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{\int_{\sin x}^{tg x} e^{t^2}dx}{k x^{k+1}}\quad (**)$

Per il teo della media integrale $\exists\, \xi \in (\sin x; tg x)$ t.c.

$\int_{\sin x}^{tg x} e^{t^2}dx = e^{\xi^2}(tg x - \sin x) = \dfrac{e^{\xi^2}}{\cos x} \dfrac{\sin x}{x} \cdot x^3 \dfrac{(1-\cos x)}{x^2}$

quindi

$\lim_{x\to 0} (**) = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\xi^2}}{\cos x} \dfrac{\sin x}{x} \dfrac{1-\cos x}{x^2} \dfrac{x^3}{k x^{k+1}}$

oss: $\sin x < \xi < tg x \Rightarrow \xi \to 0 \Rightarrow e^{\xi^2} \to 1$ quindi ($x\to 0$: $\sin x \to 0$, $tg x \to 0$)

$\lim_{x\to 0} (**)\ \exists$ finito $\Leftrightarrow \exists$ finito $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x^{k+1}}$ cioè per $\boxed{k\leq 2}$

vale allora $\lim_{x\to 0} (*) = \begin{cases} \dfrac{e^0}{\cos 0} \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{2}\, \dfrac{1}{2} = \boxed{\dfrac{1}{4}} & \text{per } k=2 \\ 0 & \text{per } k<2 \end{cases}$

ALTRO METODO (PIÙ CALCOLOSO)

$\lim_{x\to 0} (**)$ è una forma indet $\frac{0}{0}$. Applichiamo il teo de l'Hôpital [dim!]

da cui $\lim_{x\to 0} (*) = \lim_{x\to 0} (**) \underset{se\ \exists}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{e^{tg^2 x}(1+tg^2 x) - e^{\sin^2 x}\cos x}{k(k+1)x^k}$

e si procede con gli sviluppi in serie di TAYLOR

OPPURE, ancora più calcoloso!, si applica il teo de l'Hôpital direttamente alla forma indet $\frac{0}{0}$ di $\lim_{x\to 0} (*)$ e poi si sviluppa.

ES 2. $f(x) = \begin{cases} (k^2-1)\ln x + k\cos(\sqrt{x}) & \text{se } x > 0 \\ e^{-kx}(x^2+3x+1) & \text{se } x \le 0 \end{cases}$

(a) f è definita $\forall x \in \mathbb{R}$

(b) $f \in C^0((0,+\infty))$, $f \in C^0((-\infty,0])$ essendo composizione, somma e prodotto di funzioni elementari continue nel loro dominio

. analizzo la continuità in $x_0 = 0$

$f(0) \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$

essendo f continua in $(-\infty, 0]$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (k^2-1)\ln x + k\cos(\sqrt{x}) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(k^2-1)\cdot(+\infty) & \text{se } k^2 \neq 1 \\ k & \text{se } k^2 = 1 \end{cases}$

allora $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ sse $k = 1$

sia $f(x) = \begin{cases} \cos\sqrt{x} & \text{se } x > 0 \\ e^{-x}(x^2+3x+1) & \text{se } x \le 0 \end{cases}$

$f \in C^1((0,+\infty) \cup (-\infty, 0))$ essendo composizione, somma e prodotto di funzioni C^1.

. derivabilità in $x = 0$

$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cos(\sqrt{h})-1}{h} = -\frac{1}{2}$

$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{e^{-h}(h^2+3h+1)-1}{h} = \lim_{h\to 0^-} e^{-h}(3+h) + \lim_{h\to 0^-} \frac{e^{-h}-1}{h} = 3-1=2$

$\Rightarrow$ in $x=0$ si ha un punto angoloso. Quindi f non derivabile in $x=0$.

(c) Oss. $\forall k \neq \pm 1$ si ha $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \mathrm{sgn}(k^2-1)(+\infty) \Rightarrow$ in $x=0$ si ha una DISCONTINUITÀ di ASINTOTO

. $k=-1$ si ha $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1 \neq f(0) \Rightarrow$ in $x=0$ si ha una DISCONTINUITÀ di SALTO

. se $k=1$ allora $f'(0^+) < 0 \Rightarrow$ in un intorno dx di $x=0$ $f \searrow$

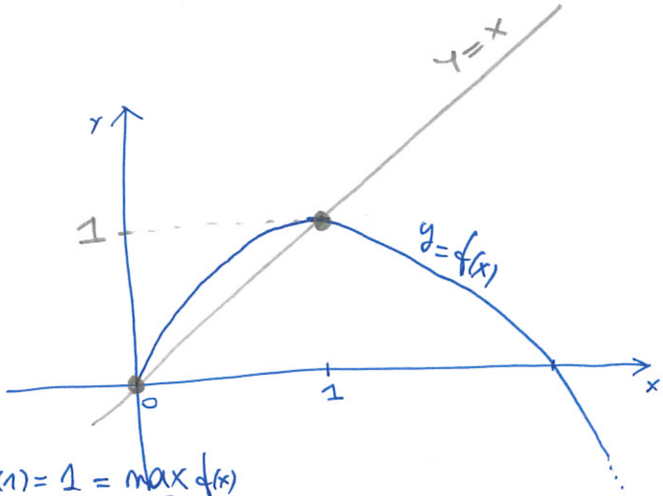
$f'(0^-) > 0 \Rightarrow$ " sx " $f \nearrow$

$\Rightarrow$ in $x=0$ si ha un MAX relativo. NON è punto di MAX ASSOLUTO essendo $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$.

ES. 3.

$a_n: \begin{cases} a_0 = 1/e \\ a_{n+1} = a_n(1 - \ln(a_n)) \end{cases}$

(a) • dimostriamo che $\exists \lim_n a_n$ finito.



oss: $a_{n+1} = f(a_n)$ con $f(x) = x(1-\ln x)$

Studio $f(x): \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

- $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = -\ln x$

quindi $f \nearrow$ in $(0,1)$ $\Rightarrow f(1) = 1 = \max_{x\in\mathbb{R}^+} f(x)$

$f \searrow$ in $(1,+\infty)$

$f'' = -\frac{1}{x} < 0 \Rightarrow f$ concava

oss: se $x \in (0,1)$ si ha $f(x) \in (0,1)$ (essendo $1 = \max f(x)$ assunto solo in $x=1$)

quindi se $a_0 \in (0,1)$ si ha $a_n \in (0,1)$ $\forall n \geq 1$ cioè $\boxed{0 < a_n < 1}$ $\forall n$

inoltre $\forall x \in (0,1)$ $f(x) > x$ (dimostrarlo!)

quindi $\forall n$ $a_{n+1} = f(a_n) > a_n$ cioè $\boxed{a_n \nearrow}$

in conclusione: a_n monotona crescente, a_n limitata $\Rightarrow \exists \lim_n a_n$ in particolare $\lim_n a_n = L \in [0,1]$ essendo $0 < a_n < 1$.

Nota: $a_n \nearrow \Rightarrow \lim_n a_n = \sup a_n \geq a_1 = a_0(1-\ln(a_0)) = \frac{1}{e}(1-\ln\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}\cdot 2 > 0$

quindi $L \in (0,1]$

• dimostriamo che $\lim_n a_n = 1$

cerco i candidati limite $L \neq 0$. deve valere $L = L(1-\ln L) \Leftrightarrow$ (essendo $L\neq 0$) $1 - \ln L = 1$

$\Leftrightarrow \boxed{L = 1}$ (cioè i punti $x: f(x) = x$)

quindi: $\exists \lim_n a_n = L$, $L \neq 0$, $\exists!$ candidato limite $L \neq 0$ $(L=1)$ $\Rightarrow \boxed{\lim_n a_n = 1}$.

(b) considero $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

essendo $\lim_n a_n \neq 0$ la serie NON converge

in particolare essendo $a_n > 0$ $\forall n$ [dimostrato sopra che $a_n \in (0,1)$]

si ha: $\boxed{\sum a_n \text{ diverge.}}$

ES. 4. $\quad f(x) = \dfrac{2|x+1| - (x+1)^2}{|x|}$

(a) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

(b) oss: $f \in C^1(\mathbb{R}\setminus\{-1;0\})$ essendo somma e quoziente di funz C^1 e non nulle.

$$f'(x) = \frac{\left(2\,\mathrm{sgn}(x+1) - 2(x+1)\right)|x| - \left(2|x+1| - (x+1)^2\right)\mathrm{sgn}(x)}{x^2} \qquad \forall x \neq 0 \wedge x \neq -1$$

$$= \left(\mathrm{sgn}(x)\left[x\left(2\,\mathrm{sgn}(x+1) - 2(x+1)\right) - 2|x+1| + (x+1)^2\right]\right)\frac{1}{x^2}$$

$\forall x \neq 0 \quad \dfrac{|x|}{\mathrm{sgn}\,x} = \mathrm{sgn}\,x\,|x| = x$

	$x<-1$	$-1<x<0$	$x>0$
$\lvert x\rvert$	$-x$	$-x$	$+x$
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$

$x=-1 \qquad x=0$

cerco i punti critici / gli intervalli di crescenza decrescenza...

- $x \in (-\infty,-1)$ $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\left[x(-2-2x-2) + 2x + 2 + x^2 + 2x + 1\right] =$

$$= -\frac{1}{x^2}\left[-2x^2 \cancel{-2x} + 2 + x^2 + \cancel{2x} + 1\right] = -\frac{1}{x^2}\left[-x^2 + 3\right] = \frac{x^2-3}{x^2} =$$

$$= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{x^2} \qquad \text{con } x_0 = -\sqrt{3},\ x_1 = +\sqrt{3} \qquad \text{oss: } x_1 \notin (-\infty,-1).$$

$x^2 - 3 \quad -1 \quad x_0$

quindi $f' > 0$ in $(-\infty;-\sqrt{3})$, $f' < 0$ in $(-\sqrt{3};-1)$ $\quad \exists!$ p.to critico in $(-\infty,-1)$: $x_0 = -\sqrt{3}$ P.to di MAX Relativo

$$f(-\sqrt{3}) = \frac{2(\sqrt{3}-1) - (\sqrt{3}-1)^2}{\sqrt{3}}$$

- $x \in (-1,0)$ $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\left[x(\cancel{2} - 2x - \cancel{2}) - \cancel{2x} - 2 + x^2 + \cancel{2x} + 1\right] = -\dfrac{1}{x^2}\left[-2x^2 - 2 + x^2 + 1\right]$

$$= \frac{x^2+1}{x^2} > 0 \quad \forall x \in (-1,0) \Rightarrow f \nearrow \text{ in } (-1,0)$$

- $x \in (0,+\infty)$ $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x^2}\left[x(+\cancel{2} - 2x - \cancel{2}) - \cancel{2x} - 2 + x^2 + \cancel{2x} + 1\right] = \dfrac{1}{x^2}\left[-2x^2 - 1 + x^2\right] =$

$$= -\frac{x^2+1}{x^2} < 0 \quad \forall x \in (0,+\infty) \Rightarrow f \searrow \text{ in } (0,+\infty)$$

studio i punti di non derivabilità e $\notin$ DOMINIO

- oss: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty \Rightarrow \sup\limits_{D} f = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \inf\limits_{D} f = -\infty$

quindi f non ammette MAX e MIN Assoluti in D.

- oss $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{2|h| - h^2}{|-1+h|}\dfrac{1}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\cancel{h}}{\cancel{h}}\,\dfrac{2\,\mathrm{sgn}\,h - h}{|h-1|} = 2$

$\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{2\,\mathrm{sgn}(h) - h}{|h-1|} = -2$

Quindi:

in $x = -\sqrt{3}$ si ha MAX Relativo

in $x = -1$ si ha MIN Relativo