ESERCIZI SUL PRINCIPIO di INDUZIONE

Provare che valgono le seguenti proposizioni

(1) $2^n n! \leq n^n \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 6$

(2) $n^n \leq 3^n n! \quad \forall n \in \mathbb{N}_*$

(3) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

(4) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n\,2^{n-1}$ [RICORDARE: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \quad 1 \leq k \leq n$]

(5) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q^k} = \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)} \quad \forall q \neq 1$

(6) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{q^k} = \frac{n(1-q) - q(1-q^n)}{q^n(q-1)^2} \quad \forall q \neq 1$

(7) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

(8) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

(9) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

(10) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

(11) $\forall n \geq 1$ il numero $n^3 + 5n$ è divisibile per 6

(12) $\forall n \geq 1$ il numero $10^n - 1$ è divisibile per 9

(13) $2^{n-1} \leq n!$

(14) $(1+a)^n \geq 1 + na \quad \forall n,\ \forall a \geq -1$ DISUGUAGLIANZA di BERNOULLI

(15) $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad \forall n \geq 0$

(16) Ogni insieme di n elementi ha 2^n sottoinsiemi