ESERCIZI sulla DERIVAZIONE

(1) Stabilire il tasso di variazione del volume di un cubo rispetto alla lunghezza del lato

(2) Provare che il tasso di variazione dell'area di un cerchio di raggio r rispetto a r è uguale alla lunghezza della circonferenza

(3) Sapendo che $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$, calcolare $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)x^k$

(4) Sia $f_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \le c \\ ax+b & \text{se } x > c \end{cases}$; $f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{se } |x| > c \\ a+bx^2 & \text{se } |x| \le c \end{cases}$; $f_3(x) = \begin{cases} mx & \text{se } x \le c \\ ax+b & \text{se } x > c \end{cases}$

trovare valori di a, b (in termini di c) t.c. $f_i'(x)$ esista (per i casi $i=1$, $i=2$, $i=3$)

(5) Sia $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. Dire se f è derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$; Dire se $f \in C^1(\mathbb{R})$

(6) Trovare il polinomio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ t.c. $P(0) = P(1) = -2$, $P'(0) = -1$, $P''(0) = 10$.

(7) Date $f(x), g(x)$: $f(0) = 2/g(0)$ $\quad f'(0) = 2g'(0) = 4g(0)$ $\quad g''(0) = 5f'''(0) = 6f(0) = 3$ con $f, g \in C''(0)$

. Calcolare $h'(0)$ dove $h(x) = f(x)/g(x)$ oppure $h(x) = f(x)\, g(x) \cdot \sin x$.

. Calcolare $\lim_{x \to 0} g'(x)/f'(x)$

(8) Il Triangolo rettangolo $A\hat{B}C$ è t.c. $A\hat{B}C = \pi/2$; $A \equiv (0,0)$; $C \in$ Parabola $y = 1 + \frac{7}{36}x^2$.
B parte dal punto $(0,1)$ al tempo $t=0$ e si muove verso l'alto lungo l'asse y con v costante $= 2$ cm/s.
A che tasso cresce l'area del triangolo quando $t = \frac{7}{2}$ s?

(9) Provare che sul grafico di ogni polinomio di grado 2 il segmento che unisce i punti corrispondenti a $x=a$, $x=b$ è parallelo alla tangente al punto medio $\frac{(a+b)}{2}$.

(10) Provare che $\exists x \in [-1,1]$ t.c. $x^3 - 3x + b = 0$; qualsiasi sia $b \in \mathbb{R}$.

(11) Provare che $x^2 = x \sin x + \cos x$ per esattamente due valori di x.

(12) Provare che: $|\sin x - \sin y| \le |x-y|$; $\bullet \frac{(x+1)^2}{x} \ge 4$; $\bullet\ x \ln x \ge x - 1$; $\bullet \left(1+\frac{1}{x}\right) \le 3^{\frac{1}{x}}$ $\forall x>0$; $\bullet \left(\ln(x^2+x+2) - x\right) < \ln(x^2+2)$ $\forall x>0$

(13) Sia $f \in C^0([a,b])$: $\exists f''(x)$ $\forall x \in (a,b)$. Il segmento per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ interseca il grafico di f in un terzo punto $(c, f(c))$ con $a<c<b$. Provare che $f''(t) = 0$ per almeno un punto $t \in (a,b)$.

(14) Siano $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$, $g(x) = 2x+3$. Per $-2 < x < -1$ provare che $M(x) > S(x)$ con $M(x) = g \circ f(x)$ e $S(x) = f \circ g(x)$

(15) Studiare il numero di radici dell'eq.ne $\bullet\ e^{2x} - x - 2 = 0$; $\bullet\ e^{\sin x} + \sin x = 1/2$ (per $x \in [0, 6\pi]$)

(16) Dire se la funzione $f(x) = x \ln x$, per $x \ge 1$ è invertibile. In caso affermativo calcolare $\frac{d}{dy} f^{-1}(0)$.

(17) Sia $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) & \text{se } x \ne 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ $\quad\bullet$ Si può applicare il teorema di Rolle nell'intervallo $I = [0; \frac{1}{2\pi}]$?
$\bullet$ In caso affermativo: si può trovare il punto "c"?

(18) Sia $f(x) = \ln(2x)$. Si può applicare il teo. di Lagrange nell'intervallo $I = [2,5]$?
. In caso affermativo ~~…~~ Trovare il punto c: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

(19) Discutere della regolarità (f è derivabile? continua?) di una funzione f t.c. $|f(0) - f(1)| = 1$, $f \nearrow$ e $\forall h > 0$ $f(x+h) < f(x) + h$.

(20) Sia f una funzione derivabile, $f \in C^1([0,1])$ t.c. $f'(x) = e^{-x^2}$. E' possibile che $f(0) = f(1) = 1$?
E' possibile che $f(0) = 1$ e $f(1) = 0$? In caso affermativo "trovare il punto c".

(21). Sia $f : [0,1] \to [0,1]$: $f \in C^1([0,1])$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$ $\Rightarrow \exists\, c \in (0,1)$: $f'(c) = 1$.

(22) Discutere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la derivabilità di f per $x=1$: $\quad f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg}((x-1)\alpha)}{\ln^2 x} \left(x^{(x^2-1)} - 1\right) & \text{se } x > 1 \\ 0 & \text{se } x \le 1 \end{cases}$

(23) Provare che la funzione $f : [1/2, +\infty) \to [-1/64, +\infty)$: $f(x) = (x(x-1))^3$ è invertibile. Sia g la sua inversa.
Studiare concavità/convessità di g. Provare che g ha un flex a tangente obliqua in $y = -1/125$

(24) Sia $f \in C^1([1,3])$ t.c. $f(1) = 1$, $f(2) = 5$, $f(3) = 4$. Mostrare che $\exists$ un punto $\xi \in (1,3)$ t.c. $f'(\xi) = \frac{1}{2}$

(25) Provare che se $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ t.c. f derivabile, $\exists K > 0$: $f'(x) \ge K$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

(26) Provare che $\forall a, b \in \mathbb{R}$ le funzioni $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - a^2 x + b$ hanno al più uno zero in $[0,1]$.

(27) Data la funzione $g(x) = \ln x + \sin x$, mostrare che g ammette un'unico zero in $(0, +\infty)$.