Innanzitutto impariamo a leggere uno sviluppo di una funzione.

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \qquad (x^2 < \infty)$$

L'espressione sopra scritta si legge nel seguente modo: $x \to 0$

$\operatorname{sen} x = o(1)$ ovvero $\operatorname{sen} x$ è un infinitesimo per $x \to 0$

$\operatorname{sen} x = O(x)$

$\operatorname{sen} x \sim x$

$\operatorname{sen} x = x + o(x)$

$\operatorname{sen} x = x + O(x^3)$

$\operatorname{sen} x \sim x - \frac{x^3}{3!}$

$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)$

$\operatorname{sen} x \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ e così via

Nelle applicazioni, per non introdurre nei calcoli termini superflui, potrà essere scelta l'espressione più conveniente.

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3}) \quad \text{per } x \to 0 \quad (x^2 < \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + O(x^{2n+2}) \quad \text{"} \quad (x^2 < \infty)$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o(x^{10}) \quad \text{"} \quad \left(x^2 < \frac{\pi^2}{4}\right)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + O(x^{n+1}) \quad \text{per } x \to 0$$

$$= 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n) \quad \text{"}$$

$$\sim 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n \quad \text{"}$$

dove α è un numero reale ; $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ $(x^2 < 1)$

casi particolari: $x \to 0$

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + O(x^3)$

$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + O(x^3)$

$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + O(x^3)$

$(1+x)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 + O(x^3)$

$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + O(x^3)$

$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + O(x^3)$

$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + O(x^4)$

NOTA: Alle limitazioni di x annotate a lato in parentesi verrà dato il giusto significato quando si parlerà di sviluppi in serie di una funzione.

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} + O(x^7)$$ la $\operatorname{cotg} x$ per $x \to 0$ è un infinit[o] $(x^2 < \pi^2$

$$\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + O(x^9)$$ per $x \to 0$ $(x^2 < \infty$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + O(x^8)$$ " $(x^2 < \infty$

$$\operatorname{tgh} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + O(x^{11})$$ " $(x^2 < \frac{\pi^2}{4}$

$$\operatorname{cotgh} x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} + O(x^9)$$ la $\operatorname{cotgh} x$ per $x \to 0$ è un infinit[o] $(x^2 < \pi^2)$

$$\operatorname{arcsen} x = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5\, x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + O(x^9)$$ per $x \to 0$ $(x^2 < 1)$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 + \dots\right)$$ " $(x^2 < 1)$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + O(x^9)$$ " $(x^2 < 1$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + O(x^6)$$ per $x \to 0$ $(x^2 < 1\ ,\ x = 1)$

$$\log(1-x) = -\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots\right]$$ $(x^2 < 1\ ,\ x = -1)$

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + O(x^9)\right]$$ " $(x^2 < 1)$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$ $(x^2 < \infty)$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$ $(x^2 < \infty)$

$$a^x = e^{x \log a} = 1 + \frac{x \log a}{1!} + \frac{(x \log a)^2}{2!} + \dots + \frac{(x \log a)^n}{n!} + \dots$$ $(x^2 < \infty)$

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + O(x^2)$$ per $x \to 0$

$$e^{\operatorname{sen} x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{3}{4!}x^4 - \frac{8}{5!}x^5 - \frac{3}{6!}x^6 + \frac{56}{7!}x^7 + \dots$$ $(x^2 < \infty)$

$$e^{\cos x} = e\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{4}{4!}x^4 - \frac{31}{6!}x^6 + \dots\right]$$ $(x^2 < \infty)$

$$e^{\operatorname{tg} x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{3}{3!}x^3 + \frac{9}{4!}x^4 + \frac{37}{5!}x^5 + \dots$$ $(x^2 < \frac{\pi^2}{4})$

$$\log(n!) = n \log n - n + \frac{1}{2}\log n + \log\sqrt{2\pi} + \sigma_n$$ con $0 < \sigma_n < \frac{1}{12n}$ (STIRLING)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \log n + \gamma + \varepsilon_n$$ dove $0 < \varepsilon_n < \frac{1}{n}$, $\gamma = 0{,}5772\dots$ è la costante di Eulero-Mascheroni

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left[1 + \frac{1}{12n} + O(n^{-2})\right], \quad n \to \infty.$$