

ESERCIZI sugli INTEGRALI IMPROPRI

8

Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri

1. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \quad \alpha \in \mathbb{R}$

16. $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt[3]{\lg x}}{(x-1)\sqrt{\ln(x-1)}} dx$

2. $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ con $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{[n!n + \frac{1}{n^2}]^{(x)}}$

17. trovare $c \in \mathbb{R}$ t.c.

$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}} - \frac{c}{x+1} \right) dx$ converge

3. l'integrale della GAUSSIANA è convergente
 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx < +\infty$

18. $\int_0^e x^{k+1} (1 - \ln x)^3 + 1 dx \quad k \in \mathbb{R}$

4. $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln x} dx$

19. $\int_0^\pi \frac{\sin x}{\cos^2 x + \sqrt{|\cos x|}} dx$ [calcolarlo]

5. $\int_4^5 \frac{1-3x}{\sqrt{x}-2} dx$

20. $\int_0^{20} \frac{e^{2x} - e^x}{e^{3x} + 2e^{2x} + 3e^x + 2} dx$ [calcolarlo]

6. $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|} (x-4)} dx$

21. $\int_0^1 \frac{dx}{(e^x - 1)^\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

7. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a (4+9x)^{b+1}} dx \quad a, b \in \mathbb{R}$

22. $\int_2^{+\infty} x e^{-(\ln x)^\alpha} dx$

8. $\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \sin(\alpha x) dx$

23. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2} - 1}{\sqrt[3]{x^4 - 1} \arctg x} dx$

9. $\int_0^1 (x^x - 1) \cotg x dx$

24. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$ [calcolarlo]

10. trovare $c \in \mathbb{R}$ t.c.

$\int_1^{+\infty} \left(\frac{x}{2x^2 + 2c} - \frac{c}{x+1} \right) dx$ converge

25. $\int_2^3 \ln(2x^2 - 5x + 2) dx$

11. trovare $a, b \in \mathbb{R}$ t.c.

$\int_1^{+\infty} \frac{2x^2 + bx + a}{x(2x+a)} dx = 1$

26. $\Gamma(x) \doteq \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ FUNZIONE Γ di EULERO.
 trovare per quali $x \in \mathbb{R}$ è ben definita
 dimostrare che $\Gamma(n+1) = n!$ $\forall n \in \mathbb{N}$

12. $\int_0^1 x^{\ln x} dx$

27. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x) - \sin^2 x}{x} dx$ [calcolarlo per serie]

13. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 - \sin 2x}$

28. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

14. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tg x dx$

29. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x |\ln x|^\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

15. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^x}{(x^4 + 1) \sin \pi x} dx$

30. $\int_0^1 \frac{x}{(x^x - 1)^2} dx$

Sia $f > 0$, integrabile in $-\infty < x < +\infty$. Discutere la convergenza dei seguenti integrali, trovando eventuali condizioni su f che assicurino la convergenza.

31. $\int_0^{+\infty} f(e^x) dx$

33. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x + \sin x + 2) dx$

35. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-f(x)} dx$

32. $\int_0^1 x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) dx$

34. $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2} dx$

36. $\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^2 dx$