PROP: la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{\ln x}$ è integrabile in senso improprio in $[2, +\infty)$.

infatti:

$\frac{\sin x}{\ln x} \in C^0([2,a])$ $\forall a > 2$ $\Rightarrow$ integrabile in senso classico in $[2,a]$ $\forall a > 2$

considero $t \to +\infty$

$$\int_2^t \frac{\sin x}{\ln x}\,dx \underset{P.P.}{=} -\frac{\cos x}{\ln x}\Big|_2^t + \int_2^t \frac{\cos x}{x \ln^2 x}\,dx =$$

$$= \frac{\cos 2}{\ln 2} - \frac{\cos t}{\ln t} + \int_2^t \frac{\cos x}{x \ln^2 x}\,dx$$

da cui, passando al $\lim_{t \to +\infty}$ si ha $\frac{\cos t}{\ln t} \to 0$

e $\int_2^{+\infty} \frac{\cos x}{x \ln^2 x}\,dx$ converge essendo $\frac{|\cos x|}{|x \ln^2 x|} \overset{x \gg 1}{\leq} \frac{1}{x \ln^2 x}$ che è integrabile in senso improprio per $x \to +\infty$

(infatti $\frac{1}{x \ln^2 x} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\ln x}\right)$)

$$\Rightarrow \int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{\ln x}\,dx \text{ converge.}$$