

Esercitazione per I intermedia di Algebra Lineare

(Dott.ssa D. Bubboloni)

2 Novembre 2016

1. Scrivere come un opportuno *Span* l'insieme S delle soluzioni del seguente sistema.

$$\begin{cases} x - y = 3z + 2t \\ x - z = 4y - t \end{cases}$$

Utilizzare il risultato ottenuto per dire se S è uno spazio vettoriale. In caso affermativo calcolarne la dimensione.

2. Si dice rango di una matrice il numero di pivot di una sua ridotta a scala. Trovare il rango della matrice al variare di $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} b & -1 & 4 \\ -2 & 1 & b \\ 0 & b & 3 \end{pmatrix}.$$

Dedurre per quale valore di b i vettori colonna della matrice sono linearmente indipendenti.

3. Si considerino in \mathbb{R}^3 i sottoinsiemi

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid xy = z^2 \right\}, \quad T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid y = x^2, z = 0 \right\}$$

e

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \right\}.$$

Si provi che, rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare definite in \mathbb{R}^3 , gli insiemi W, T non sono spazi vettoriali, mentre U lo è.

4. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ il seguente sistema

$$\begin{cases} x + ay - z = 0 \\ 2x - y - az = a - 2 \\ x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

Successivamente dire se:

- esistono valori di a per cui il sistema è omogeneo e in tal caso esplicitarne le soluzioni;
- è vera la proposizione: $\exists a \in \mathbb{R}$ t.c. le soluzioni sono ∞^2 .

5. Dire se sono linearmente dipendenti i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e in caso affermativo esprimerne uno come combinazione lineare dei restanti.

6. Dati i vettori di \mathbb{Q}^4

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dire se costituiscono:

- a) una base
- b) un sistema di generatori

per \mathbb{Q}^4 .

7. Risolvere il sistema a coefficienti nel campo $F_2 = \{0, 1\}$

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y - z = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

Si ricordi che in tale campo $1 + 1 = 0$ e dunque $-1 = 1$.

8. Risolvere il sistema a coefficienti nel campo $\mathbb{C} = \{a + ib : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{cases} ix + y - iz = 1 \\ x - (i + 1)y - z = 0 \\ -ix - y + z = i - 2 \end{cases}$$

Si ricordi che in \mathbb{C} si ha $i^2 = -1$ e che $(a + ib)^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$

9. Provare che i vettori seguenti costituiscono un sistema di generatori di \mathbb{R}^3 ed estrarne una base.

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

10. Determinare le coordinate del vettore

$$v = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base \mathcal{B} di \mathbb{R}^3 seguente

$$\mathcal{B} = \left(v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right)$$

11. Provare che il seguente sistema a coefficienti reali nelle variabili reali x, y, z risulta impossibile:

$$\begin{cases} x + y - z = 5 \\ x + 3y - z = 0 \\ 7x - y + z = 1 \\ 6x - y + 4z = -1 \end{cases}$$

12. Provare che il seguente sistema a coefficienti reali nelle variabili reali x, y, z ammette infinite soluzioni. Trovare tali soluzioni chiarendo chi sia l'insieme S delle soluzioni.

$$\begin{cases} x - y - z + t = 5 \\ 2x + 3y - z - t = 1 \end{cases}$$

13. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ il seguente sistema dopo averlo portato in forma normale.

$$\begin{cases} x + ay - z = -y \\ 2x - y - az = z + a - 1 \\ x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

Successivamente, dire se esistono valori di a per cui l'insieme delle soluzioni é infinito e determinarle.

14. Discutere al variare di $b \in \mathbb{R}$ il seguente sistema nelle variabili reali x, y, z, t dopo averlo portato in forma normale.

$$\begin{cases} (b-1)x + y - z + t = -y + b \\ 2x - y - bz = z - 1 - t \\ 3y + z = 2 \end{cases}$$