Esercitazione II intermedia

(Dott.ssa D. Bubboloni) 9 dicembre 2016

Gli esercizi $7, 8, 10$ potranno essere affrontati alla luce degli argomenti conclusivi del corso.

1. Trovare al variare di $a \in \mathbb{R}$ le dimensioni del nucleo e dell'immagine della applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

dire se L è o no biunivoca per $a = 4$.

2. Determinare la matrice di rappresentazione della derivazione rispetto alla base $\mathcal{B} = (x, 1, x^2, x^3)$ in $\mathbb{R}^{(3)}[x]$.
Dire chi sono nucleo e immagine esibendone una base. Come cambia la matrice se si riordina la base passando a $\mathcal{B}' = (x^2, x, x^3, 1)$?

3. Dire se la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ di legge $f(x, y) = (xy - 1, x^2 - y^2)$ è lineare.

4. Costruire una applicazione lineare $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la cui immagine sia generata dai seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tale L è unica?

5. Dire se esiste una applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$L\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e in caso affermativo determinarla esibendone la matrice rispetto alla base canonica nel dominio e nel codominio.

6. Dire perché gli insiemi

$$r = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x - y + z = 1, x + y - z = 2\}$$

e

$$s = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ : \ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

rappresentano due rette e decidere se risultano parallele od ortogonali. Trovare il loro eventuale punto di intersezione.

7. Determinare nucleo e immagine dell'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$L(x, y, z)^T = (x - y + z, -x + 2y - z, -x + 4y - z)^T.$$

Dire se L è diagonalizzabile.

8. Determinare il segno della forma quadratica su $\mathbb{R}^3$ definita da $Q(X) = X^T AX$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Scrivere esplicitamente il polinomio omogeneo $Q(X)$, se $X = (x_1, x_2, x_3)^T$.

9. Trovare autovalori ed autovettori per l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ x + y - z \\ 3x - 3y + 3z \end{pmatrix}$$

Alla luce di quanto ottenuto, si pu dire che L ammette una base di autovettori? Per la stessa L trovare nucleo e immagine.

10. In $\mathbb{R}^4$, scrivere l'equazione parametrica e cartesiana della retta r passante per il punto $P = (1, 2, 1, 0)$ e ortogonale all' iperpiano

$$3x - 2y + 5z - 4t = 8.$$

Trovare poi la retta s per $Q = (-1, 0, 2, 1)$ di direzione $v = (1, 1, 0, 1)^T$. Dire se r e s sono parallele, ortogonali o sghembe. Trovare l'angolo fra le due rette r e s.

11. Sfruttando il teorema di Binet, dire quali valori pu assumere in determinante di una matrice ortogonale $A \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $A^4 = I$ e fornire esempi per ciascuno dei valori possibili. Si ricordi che A^4 indica il prodotto righe per colonne di A per se stessa 4 volte.

12. Siano $A, B, C \in M_3(\mathbb{R})$ ed esista un vettore $X \in \mathbb{R}^3$ che risulti un autovettore per A relativo all'autovalore 5, un autovettore per B relativo all'autovalore 2 e un autovettore per C relativo all'autovalore -3. Provare che X un autovettore anche per le matrici

$$AB, \quad ABC, \quad AC + BA$$

e dire quali sono i corrispondenti autovalori.

13. Siano $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Provare che se $AB = BA$ allora $(AB)^2 = A^2B^2$. Provare che ció falso in assenza dell'ipotesi $AB = BA$.

15. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ il seguente sistema, affidandosi al determinante della matrice completa e al teorema di Rouché-Capelli:

$$\begin{cases} x + ay = 1 - a \\ -x + y = 4 \\ 3x - ay = 2 \end{cases}$$

14. Discutere al variare di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema, affidandosi al determinante della matrice incompleta (per identificare i valori critici) e al teorema di Rouch-Capelli:

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ x + 10z = -3y \\ 6y + k^2z = 0 \end{cases}$$