

## I intermedia di Algebra Lineare

(Dott.ssa D. Bubboloni)

11 Novembre 2016

Avete due ore di tempo. Potete scegliere 6 esercizi su 7 per avere punteggio pieno.

1. Scrivere come un opportuno *Span* l'insieme  $S$  delle soluzioni del seguente sistema nelle variabili reali  $x, y, z, t, u$ , dopo averlo portato in forma normale.

$$\begin{cases} x + 3y = z - 2t + u \\ u - 3t = 4y - t + x \end{cases}$$

Notare che  $S$  è uno spazio vettoriale, calcolarne la dimensione ed esibirne una base.

2. Discutere al variare di  $a \in \mathbb{R}$  il seguente sistema nelle variabili reali  $x, y, z$ .

$$\begin{cases} ax + y - z = a \\ x + y - z = 0 \\ 3x + ay - 2z = 2 \end{cases}$$

Successivamente rispondere alle seguenti domande:

- esistono valori di  $a$  per cui il sistema è omogeneo?
  - esistono valori di  $a$  per cui il sistema ha infinite soluzioni? In tal caso descrivere l'insieme  $S$  delle soluzioni e dire se è un sottospazio di  $\mathbb{R}^3$ .
3. Dire se sono linearmente dipendenti i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

e in caso affermativo esprimerne uno come combinazione lineare dei restanti. Dire se è possibile esprimere  $v_2$  come combinazione lineare dei restanti.

4. Dati i vettori di  $\mathbb{Q}^3$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

provare che non costituiscono una base per  $\mathbb{Q}^3$  ma sono però un insieme di generatori per  $\mathbb{Q}^3$ . Da tale sistema si estraiga una base per  $\mathbb{Q}^3$ .

5. Risolvere il sistema a coefficienti nel campo  $F_2 = \{0, 1\}$  e nelle variabili  $x, y, z, t, u \in F_2$  :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 + u \\ z - y + u = 1 + t \\ t = z + x + u \end{cases}$$

Si ricordi che in tale campo  $1 + 1 = 0$  e dunque  $-1 = 1$ . Rappresentare, se possibile, l'insieme  $S$  delle soluzioni per elencazione.

6. Determinare le coordinate del vettore

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{R}^3$  seguente

$$\mathcal{B} = \left( v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

7. Discutere al variare di  $b \in \mathbb{R}$  il seguente sistema nelle variabili reali  $x, y, z$

$$\begin{cases} x + 3y + z = b \\ x - y = 0 \\ bx + 3y + z = 1 \\ y + z = b \end{cases}$$

## SOLUZIONI

1.

Il sistema in forma normale è

$$\begin{cases} x + 3y - z - 2t + u = 0 \\ -x - 4y - 2t + u = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema omogeneo con matrice completa:

$$B = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Utilizziamo il passo base dell'algoritmo di Gauss (EG) su  $B$  con moltiplicatore 1 ottenendo

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$B$  è a scala e quindi possiamo procedere alla descrizione delle sue soluzioni. Ci sono tre variabili libere:  $z$ ,  $t$  e  $u$ . Quindi il sistema ha  $\infty^3$  soluzioni. Dall'ultima equazione si ricava  $y = -z$  che sostituita nella prima fornisce

$$x - 3z - z + 2t - u = 0$$

e quindi

$$x = 4z - 2t + u.$$

Le soluzioni sono quindi date da

$$x = 4z - 2t + u$$

$$y = -z$$

$$z, t, u \in \mathbb{R}$$

L'insieme delle soluzioni è

$$S = \{[4z - 2t + u, -z, z, t, u]^T \in \mathbb{R}^5 : z, t, u \in \mathbb{R}\}.$$

Mettendo in evidenza i parametri  $z, t$  e  $u$  nella scrittura sopra possiamo evidenziare la natura di  $Span$  per  $S$ . Infatti

$$S = \{z[4, -1, 1, 0, 0]^T + t[-2, 0, 0, 1, 0]^T + u[1, 0, 0, 0, 1]^T \in \mathbb{R}^5 : z, t, u \in \mathbb{R}\} =$$

$$Span\{[4, -1, 1, 0, 0]^T, [-2, 0, 0, 1, 0]^T, [1, 0, 0, 0, 1]^T\}.$$

Abbiamo visto a lezione che che uno  $Span$  è sempre un sottospazio, ossia uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni dello spazio vettoriale ambiente che qui è  $\mathbb{R}^5$ .  $S$  è sicuramente generato da i tre vettori

$$[4, -1, 1, 0, 0]^T, [-2, 0, 0, 1, 0]^T, [1, 0, 0, 0, 1]^T.$$

Proviamo che tali vettori sono anche indipendenti. Supponi che

$$a[4, -1, 1, 0, 0]^T + b[-2, 0, 0, 1, 0]^T + c[1, 0, 0, 0, 1]^T = [0, 0, 0, 0, 0]^T.$$

Allora guardando le sole ultime tre componenti si deve avere

$$a[1, 0, 0]^T + b[0, 1, 0]^T + c[0, 0, 1]^T = [0, 0, 0]^T$$

e quindi  $a = b = c = 0$

Pertanto  $\dim S = 3$ .

2. Cominciamo scrivendo il sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ ax + y - z = a \\ 3x + ay - 2z = 2 \end{cases}$$

La matrice completa del sistema è allora

$$B = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & -1 & a \\ 3 & a & -2 & 2 \end{array} \right)$$

e usiamo EG con moltiplicatori:  $-a$  e  $-3$  ottenendo

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-a & -1+a & a \\ 0 & a-3 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Se  $a = 1$  la seconda riga esprime una equazione impossibile e quindi il sistema è impossibile. Assumiamo  $a \neq 1$  e proseguiamo con EG con moltiplicatore  $\frac{a-3}{a-1}$  ottenendo

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-a & -1+a & a \\ 0 & 0 & a-2 & \frac{a^2-a-2}{a-1} \end{array} \right)$$

Dato che siamo sotto l'ipotesi  $a \neq 1$  i pivot sono sicuramente almeno 1 e  $a-1$ . Ad essi si aggiunge  $a-2$  nel caso in cui  $a \neq 2$ . Pertanto se  $a \neq 2$  i pivot sono 3 e si ha soluzione unica. Se  $a = 2$  l'ultima equazione è una identità perchè  $2^2 - 2 - 2 = 0$ . Cancellandola dal sistema ci riduciamo al sistema di matrice

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

che ammette  $\infty^1$  soluzioni. Calcoliamole:  $z$  è libera,  $y = z - 2$ ,  $x = 2$ . Quindi

$$S = \{[2, z - 2, z] : z \in \mathbb{R}\}.$$

Tale insieme non è un sottospazio perchè non contiene il vettore nullo 0.

Non esistono valori di  $a$  per cui il sistema sia omogeneo perchè la terza equazione ha termine noto 2.

3. Vediamo chi sono le soluzioni in  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  della equazione vettoriale

$$a \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Consideriamo, in altre parole il sistema omogeneo di matrice incompleta

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -9 & 3 \\ -1 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

Facciamo uno scambio riga per poter iniziare EG ottenendo

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

Partiamo con moltiplicatori 0, 2, 1 ottenendo

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

proseguiamo con moltiplicatori  $-\frac{3}{2}, 0$  ottenendo

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{21}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Moltiplichiamo la terza riga per  $\frac{2}{7}$  e la quarta per  $\frac{1}{2}$  ottenendo la forma più semplice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Un'ultima applicazione di EG conduce a

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché i pivot sono 3 abbiamo che i vettori sono **dipendenti**. Sicuramente  $v_4$  è esprimibile come combinazione lineare dei restanti perché la variabile ad esso associata è libera. Ma è possibile che anche altri vettori siano ricavabili come combinazione lineare dei restanti. Per capire quali dobbiamo trovare gli  $a, b, c, d$  che consentono di scrivere esplicitamente la combinazione lineare non banale che produce 0. Essendo  $d$  libera la fisso come voglio (ma escludendo la scelta  $d = 0$  che mi porta alla soluzione banale che non mi interessa). Prendo  $d = 3$  e risalgo dall'ultima equazione alle precedenti. Ho  $c = 1$  e poi  $2b - 9 + 9 = 0$ , ossia  $b = 0$ . Infine  $-a + 0 - 4 = 0$  fornisce  $a = -4$ . Pertanto abbiamo che  $-4v_1 + 0v_2 + v_3 + 3v_4 = 0$ . Quindi **possiamo ricavare uno qualsiasi dei  $v_i$  tranne  $v_2$** . Ad esempio  $v_3 = 4v_1 - 3v_4$ .

4. I vettori dati sicuramente non sono una base perché sono  $4 > 3 = \dim \mathbb{Q}^3$ . Vediamo se generano  $\mathbb{Q}^3$  e in concomitanza estraiamo una base. Consideriamo la matrice

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & x \\ 0 & 1 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & z \end{array} \right)$$

al variare di  $x, y, z \in \mathbb{R}$  e cerchiamo di capire se il sistema che ha tale matrice completa ha sempre soluzione. Si noti che si è messo per primo il vettore con prima componente diversa da 0. La matrice è a scala quindi non serve fare nulla perché siamo subito in grado di identificare i pivot che sono sulla prima colonna, la seconda e la quarta. Inoltre la terza variabile è libera. Qualunque siano  $x, y, z \in \mathbb{R}$  le soluzioni ci sono sempre. Questo dice che **i vettori dati sono un sistema di generatori**. Per estrarre una base si prendono i vettori dove sono caduti i pivot e quindi  $v_2, v_1, v_4$  in un loro qualsiasi ordine. Ad esempio  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_4)$  è una base.

5. Per risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 + u \\ z - y + u = 1 + t \\ t = z + x + u \end{cases}$$

usiamo EG come sempre dopo averlo portato in forma normale.  
La matrice completa del sistema è

$$B = \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

e usiamo EG con moltiplicatori 0 e 1 ottenendo

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

e di nuovo EG con moltiplicatori 1 ottenendo

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

La matrice è a scala.  $t$  e  $u$  sono libere ma possono assumere solo i due valori 0 e 1. Pertanto le soluzioni sono 4 e possono sicuramente essere elencate. Si ha  $z = t + u$  dalla terza equazione,  $y = 1$  dalla seconda e  $x = 0$  dalla terza. Quindi

$$S = \{[0, 1, 0, 0, 0]^T, [0, 1, 1, 1, 0]^T, [0, 1, 1, 0, 1]^T, [0, 1, 0, 1, 1]^T\}.$$

6. Si devono esplicitare le soluzioni del sistema di completa

$$B = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Usiamo EG con moltiplicatore  $-1$ , 0 trovando

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

e poi con moltiplicatore  $-1$  ottenendo

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

Facciamo EG a ritroso con moltiplicatori  $1/2$  e  $-1/2$  ottenendo

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

Dividendo per 2 l'ultima riga vediamo la soluzioni apparire sulla colonna a sinistra

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Quindi le coordinate richieste sono  $[-1, 2, 0]^T$ .

7. Affidiamoci alla matrice completa

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & b \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ b & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right)$$

Usiamo EG con moltiplicatori  $-1, -b, 0$  ottenendo

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & b \\ 0 & -4 & -1 & -b \\ 0 & 3-3b & 1-b & 1-b^2 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array} \right)$$

Scambio alcune righe e moltiplico la seconda per  $-1$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 4 & 1 & b \\ 0 & 3-3b & 1-b & 1-b^2 \end{array} \right)$$

Usiamo EG con moltiplicatori  $-4, -3+3b$  ottenendo

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & -3 & -3b \\ 0 & 0 & 2b-2 & 2b^2-3b+1 \end{array} \right)$$

Dividiamo per  $-3$  la terza riga

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2b-2 & 2b^2-3b+1 \end{array} \right)$$

Facciamo ancora EG con moltiplicatore  $2-2b$  ottenendo

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & -b+1 \end{array} \right)$$

Se  $b \neq 1$  il sistema è impossibile a causa dell'ultima equazione. Se  $b = 1$  la quarta equazione si elimina e il sistema ha soluzione unica il cui calcolo non è richiesto.