**Intermedia II - Algebra Lineare e geometria analitica**

(Prof.ssa D. Bubboloni)
18 Dicembre 2017.

Avete due ore e mezza di tempo. Potete scegliere 6 esercizi fra i 7 proposti per avere punteggio pieno.

**1.** Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f([x,y,z]^T) = \begin{pmatrix} 2x & -y & \\ -x & +y & +2z \\ & y & +4z \end{pmatrix}$$

provare che è lineare. Trovarne nucleo e immagine. Dire se $f$ è biunivoca. Trovarne gli autovalori.

**2.** Discutere il seguente sistema sfruttando il teorema di Rouche-Capelli e la teoria del determinante (suggerimento: si parta da considerazioni sulla matrice incompleta)

$$\begin{cases} x + ay - z & = & 3 \\ x - y + 2az & = & a+4 \\ 2y + 7z & = & 4 \end{cases}$$

**3.** Sia $a \in \mathbb{R}$. Data la funzione $f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$f_a([x,y]^T) = \begin{pmatrix} ax^2 - ax + 3x^2 & -y \\ -x & +y \end{pmatrix}$$

provare che, in generale, non è lineare. Provare che esiste un unico $a$, per cui $f_a$ sia lineare. Per tale $a$ dire se $f_a$ ammette una base di autovettori.

**4.** Scrivere la forma quadratica $Q_A$ su $\mathbb{R}^3$ associata al polinomio omogeneo

$$p(x,y,z) = 2x^2 + 4xy + 6yz - 8xz + 2y^2 + z^2$$

e stabilire se è definita positiva/negativa o indefinita. In base a quanto ottenuto si puo' concludere che $p(x,y,z) > 0$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}$?

**5.** Provare che la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

ammette 0 come autovalore di molteplicitá 2. Trovare i restanti autovalori. Dire se esiste una matrice invertibile e ortogonale $C$ tale che $C^{-1}MC$ sia diagonale (non è richiesto di esplicitare $C$!). Esibire due autovettori di $M$ fra loro ortogonali e di norma 1.

**6.** Si consideri l' applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dopo aver mostrato che $|\mathrm{sp}(A)| = 2$, trovare i due autospazi. Dire se $\mathbb{R}^4$ ammette una base di autovettori di $L_A$ e in caso affermativo esibirla.

**7.** Provare, sfruttando il teorema di Binet, che non esistono due matrici $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ tali che $AB = Diag(3, 4, -2)$ e che $BA = Diag(-4, -3, 2)$.

Possono esistere invece due matrici $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ tali che $AB = Diag(3, 1, 2)$ e che $BA = Diag(-1, -1, 6)$? (Suggerimento: si usi la funzione traccia).