L'antinomia di Bertrand Russell

Nell'ambito della teoria intuitiva di [Cantor](http://it.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor), gli [insiemi](http://it.wikipedia.org/wiki/Insieme) possono essere definiti in modo completamente libero, cioè si possono creare insiemi con caratteristiche arbitrarie: data una proprietà, essa identifica sempre un insieme, l'insieme di tutti gli oggetti che godono di quella proprietà[[5]](http://it.wikipedia.org/wiki/Paradosso_di_Russell#cite_note-5). Russell immaginò di creare una suddivisione degli insiemi in due categorie:

* Gli insiemi che tra i loro elementi hanno loro stessi, cioè gli insiemi che appartengono a sé stessi; si cita spesso come esempio "l'insieme di tutti i concetti astratti", che appartiene a sé stesso perché, a sua volta, è un concetto astratto.

 \in x 

* Gli insiemi che tra i loro elementi non hanno loro stessi, cioè gli insiemi che non appartengono a sé stessi; ad esempio, come notò Russell stesso, "l'insieme di tutte le tazze da tè" non è una tazza da tè[[2]](http://it.wikipedia.org/wiki/Paradosso_di_Russell#cite_note-odifreddi_205-2).

 \not \in x 

Se definiamo *R* come l'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a sé stessi, abbiamo:

 R = \{ x \mid x \not \in x \}

Il problema posto da Russell a questo punto fu se *R* appartiene o meno a sé stesso. Ma supponendo ad esempio che R vi appartenga, si avrebbe che:

* R appartiene a sé stesso;
* Quindi R soddisfa la definizione;
* Quindi R è uno degli "insiemi che non appartengono a sé stessi";
* Quindi R non appartiene a sé stesso, il che contraddice il primo enunciato.

Partendo invece dall'affermazione contraria, cioè supponendo che R *non* appartenga a sé stesso, si avrebbe che:

* R non appartiene a sé stesso;
* Quindi R non soddisfa la definizione;
* Quindi R soddisfa il suo contrario;
* Quindi R non è uno degli "insiemi che non appartengono a sé stessi";
* Quindi R è un insieme che appartiene a sé stesso, il che contraddice il primo enunciato.

In termini logici:

 \in R \iff R \not \in R

In sintesi, il paradosso di Russell si può enunciare così: *l'insieme di tutti gli insiemi che non appartengono a sé stessi appartiene a sé stesso se e solo se non appartiene a sé stesso*. Formalmente,

text{se } R = \{ x \mid x \not \in x \} \text{, allora } R \in R \iff R \not \in R