Paradossi

Il filosofo vive di problemi come l'uomo di cibi. Un problema insolubile è un cibo indigesto. Quello che nei cibi è il condimento piccante, nei problemi è il paradosso. [NOVALIS]

1. Paradosso di Russell

Quando si tenta di introdurre (in modo, per così dire, rudimentale) la teoria ingenua degli insiemi, di solito, dopo aver dichiarato di dare per "intuitivo" (ed intuito) il concetto di insieme, si passa a descrivere le possibili modalità per definire uno specifico insieme. Che sono quella di elencare direttamente i suoi elementi, come

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

oppure di esplicitare una qualche proprietà (un predicato unario) che descriva (cioè tale che sia soddisfatta da) tutti e soli gli elementi dell'insieme che vogliamo definire. Per esempio lo stesso insieme di sopra si può definire come

$$A = \{x \mid (x \in \mathbb{Z}) \wedge (x^2 \leq 4)\}.$$

Dove il predicato è $P(x): x$ *è un numero intero il cui quadrato non supera* 4, scritto in modo formale come $(x \in \mathbb{Z}) \wedge (x^2 \leq 4)$. Nella teoria ingenua degli insiemi si dice, in questo caso, che l'insieme A è ottenuto per *comprensione* del predicato $P(x)$.

Alla fine del diciannovesimo secolo, nel suo tentativo di fondare logicamente la matematica, il logico tedesco Gottlob Frege adottò, seguendo Georg Cantor, una visione della teoria degli insiemi (che poi sarà appunto detta *ingenua*) basata su due principi costitutivi, il principio di *estensione*, che dice che ogni insieme è individuato dai suoi elementi e che insiemi con gli stessi elementi sono lo stesso insieme, ed il principio di *comprensione*, che stabilisce che ogni predicato unario definisce per comprensione un insieme. Ciò appariva assai naturale e aderente a quell'idea intuitiva di "collezione" che il concetto di insieme avrebbe dovuto precisare e formalizzare nel modo meno restrittivo possibile. Ma non è così facile; ed il tentativo di Frege, già affidato ad un ponderoso tomo (*Grundgesetze der Arithmetik*, 1893), con un secondo in fase di rifinitura, affondò quasi subito per l'osservazione di Bertrand Russell (1902) che il principio di comprensione assunto in tanta generalità porta necessariamente a una contraddizione.
Vediamo di cosa si tratta: diciamo che un insieme è *normale* se non contiene se stesso come elemento (si può pensare ad esempio all'insieme di tutti i concetti astratti, che, direi, è un concetto astratto, e quindi contiene se stesso come elemento, oppure all'insieme di tutto ciò che non è un triangolo, insieme che, non essendo un triangolo, è elemento di se stesso). L'essere normale ci appare senz'altro come un predicato del tutto ben definito; ma cosa succede se si prova ad utilizzarlo per definire un insieme?

Paradosso di Russell: si considera l'insieme $\mathcal{N}$ i cui elementi sono tutti e soli gli insiemi che non contengono se stessi come elementi. Quindi

$$\mathcal{N} = \{X \mid X \text{ insieme e } X \notin X\}.$$

A questo punto, se $\mathcal{N}$ è un insieme, esso contiene se stesso come elemento oppure no; ed entrambi i casi portano a contraddire la sua stessa definizione.

In altri termini: non sempre la comprensione $\{x \mid P(x)\}$ di un predicato $P(x)$ è un insieme. Detto in modo ancora diverso, esistono proprietà ben definite (cioè espresse non ambiguamente da un predicato unario) tali che non esiste (non si può ammettere nella teoria) l'nsieme degli oggetti che le verificano. ll concetto di insieme va dunque specificato in modo molto più accurato.

Il paradosso di Russell mostra che "qualche cosa non si può fare", ed ebbe conseguenze importantissime per l'evoluzione della teoria degli insiemi in senso assiomatico. Ma prima di tornare su questo punto fondamentale (è il caso di dirlo), diciamo qualcosa riguardo alla "natura" del paradosso. Mostrando, in primo luogo, come esso non sia l'effetto perverso di un'incauta manipolazione dell'infinito. Infatti, il punto non è che il fantomatico insieme di tutti gli insiemi sarebbe "un infinito che contiene tutto", né l'immaginarsi come possa avvenire che un insieme contenga se stesso (generando un processo telescopico che si prolunga indefinitamente), bensì il fatto che una certa relazione tra enti (in questo caso quella di appartenenza) venga usata in modo "autoreferenziale". Questo si può osservare considerando diversi altri cosiddetti "paradossi logici", che condividono con quello di Russell la ragione scatenante pur non facendo alcun riferimento all'infinito. Vediamo un esempio che cerca di aggiornare il noto paradosso del bibliotecario.

Paradosso dei link. Le pagine Internet accessibili in rete contengono diverse connessioni (links) ad altre pagine. Vi sono normalmente pagine che, per motivi pratici, contengono un link a se stesse (tipicamente le cosiddette "home page"), mentre altre (forse la maggioranza) non contengono un link a se stesse. Il numero totale di pagine (diciamo nel mondo, ma possiamo limitarci ad ambiti più ristretti, ad esempio alle pagine ospitate dai server del mio dipartimento) è comunque finito. Supponiamo che io (il Grande Fratello) chieda al mio responsabile informatico di allestire una pagina Internet che contenga un link a tutte e sole le pagine che non hanno link a se stesse ... Si può fare?

Russell stesso, seppur con molta cautela (come vedremo), chiama in causa il paradosso del barbiere:

Paradosso dei barbiere. Il barbiere rade tutti gli uomini del villaggio che non radono se stessi. Chi rade il barbiere?

Qui, l'inghippo è che, essendo abituati alla sua figura reale, siamo condizionati a pensare al barbiere come *esistente*, e quindi in preda a seri problemi di identità. Tuttavia, la prima frase del paradosso (che andrebbe enunciata più precisamente come "*il barbiere* *è un uomo abitante del villaggio che rade tutti gli uomini del villaggio che non radono se stessi*[1]) è, di fatto, una *definizione* di barbiere, e come tale è inconsistente (o, meglio, vuota): non può cioè essere soddisfatta da alcun abitante uomo del villaggio. In questo non vi è nulla di drammatico. Formalizzando la cosa, e senza temere di incorrere in alcuna antinomia, si può osservare che se R è una qualsiasi relazione definita su un insieme V, allora la proposizione

$$\exists x \, \forall a : (\neg(aRa) \rightarrow xRa) \tag{1}$$

è *falsa*; ovvero non esiste alcun elemento x dell'insieme che la soddisfa.

Questo fatto, che si applica al paradosso del barbiere (con V l'insieme degli uomini del villaggio e xRa che significa "x rade a") ma anche al paradosso dei link ed alle altre versioni terra-terra del paradosso, sembra finire col togliere parecchio pathos anche al paradosso di Russell. Ma allora, perché questo fu una tale mazzata per il povero Frege? E perché si temette, per via di esso, per la stessa sopravvivenza della Teoria di Cantor? Perché fra il paradosso del barbiere e quello di Russell c'è un'affinità di forma, ma una sostanziale diversità epistemologica. Come scrisse lo stesso Russell,

> La contraddizione [il paradosso di Russell] è estremamente interessante. Se ne può modificare la forma; ma non tutte le variazioni sono valide. Una volta mi fu suggerita una forma che a mio parere non è valida, ed è la questione se il barbiere rada se stesso oppure no. Si può definire il barbiere come "colui che rade tutti quelli, e solo quelli, che non si radono da soli". Il problema è: il barbiere rade se stesso? In questa forma la contraddizione non è difficile da risolvere. Ma nella nostra forma precedente [il paradosso di Russell] è chiaro che la si può aggirare solo osservando che l'intera questione, se una classe possa essere membro di se stessa, è priva di senso, cioè che nessuna classe è o non è membro di se stessa, e anzi non è nemmeno corretto dire ciò, poiché la forma delle parole non è che un rumore senza significato[2]

Nel caso del barbiere, o in quello dei links, la relazione che interviene come nella (1) è definita *su un insieme ben fondato e definito per altre vie* (quello degli uomini del villaggio o quelle delle pagine web) mentre nel paradosso di Russell, semplificando molto, essa fa parte della definizione stessa di insieme, cioè degli oggetti sui quali si applica. Sarebbe come se il paradosso del barbiere implicasse non solo la conseguenza, non particolarmente grave, dell'inesistenza del barbiere come definito, ma assieme la dissoluzione immediata di tutte le barbe o addirittura, dio non voglia (o magari sì), dell'identità maschile...

In questo modo la corazzata di Frege, silurata dal Paradosso, affondò mentre era ancora in bacino di carenaggio; anzi, s'inabissò istantaneamente quando Russell disse "Ma non può stare a galla!", un po' come i personaggi dei cartoni animati precipitano solo quando si accorgono di stare nel vuoto.

---

[1] Più o meno scherzosamente, si potrebbe osservare che, oltre a queste appena enunciate, tra le condizioni implicite nel paradosso del barbiere, vi è quella che ogni uomo del villaggio deve tenere la barba rasata; dopo aver constato che questo porta al paradosso del barbiere, si potrà allora dedurre che in ogni villaggio vale almeno una delle seguenti condizioni:

- non c'è alcun barbiere uomo;
- c'è un uomo con la barba lunga.

[2] Bertrand Russell, *The Philosophy of Logical Atomism.*

Non tutti i matematici lo considerarono un disastro: alcuni, tra i quali scienziati di primissimo livello come Poincarè, salutarono il paradosso di Russell come la sveglia che avrebbe riscosso la matematica dal sogno malato del logicismo. La storia avrebbe presto dato loro torto; per la maggior parte dei matematici la salvaguardia della teoria di Cantor, evitando i paradossi della teoria ingenua degli insiemi, era questione di fondamentale importanza[3]; celeberrima l'affermazione di un altro grande matematico, David Hilbert: "Nessuno riuscirà a cacciarci dal Paradiso che Cantor ha creato per noi.".

Per superare le antinomie, Russell e Whitehead[4] proposero la *teoria dei tipi*, la cui idea di fondo è che ogni insieme (e in generale ogni termine del linguaggio) debba rigidamente appartenere ad un certo livello gerarchico, detto tipo (per cui, ad esempio, nessun insieme può essere un elemento di se stesso). La teoria dei tipi, come proposta da Russell e Whitehead nei tre volumi dei *Principia matematica*, pubblicati tra il 1910 e il 1913, era estremamente laboriosa ed apparve subito alla maggior parte dei matematici interessati come complicata (forse anche artificiosa) e di difficile uso. Essa, per così dire, conduceva al paradiso, ma solo attraverso un lunghissimo purgatorio; fu così, e in partenza, superata in termini di gradimento dalla teoria assiomatica, che in quegli stessi anni stava prendendo forma[5].
Sono stati proposti (e, in certi contesti sono effettivamente utilizzati) diversi sistemi di assiomi per la teoria degli insiemi; quello che si può ritenere di riferimento, e il più comunemente accettato, in particolare nella matematica "tradizionale", è il sistema ZF di Zermelo–Fraenkel[6], proposto da Zermelo nel 1908, integrato e riaggiustato da Fraenkel un decina d'anni più tardi.

Tornando ai paradossi simil–Russell, quello che mi sembra più affine all'originale insiemistico è il paradosso di Grelling-Nelson, nel quale l'autoreferenzialità occorre (così si dice) a livello semantico.

> **Paradosso di Grellig-Nelson** (1908). Un aggettivo si dice *autologico* se si applica a se stesso (ad esempio, gli aggettivi "polisillabico" e "sdrucciolo" sono autologici, "monosillabico" no); un aggettivo è *eterologico* se non è autologico, ovvero se non si applica a se stesso. Se ogni aggettivo è autologico oppure eterologico, a quale di questi due tipi appartiene l'aggettivo "eterologico"?

Anche in questo caso, si gira attorno ad una relazione, quella che intercorre tra aggettivi e parole, per cui un aggetivo (come ad esempio "monosillabico") *si applica* ad una parola (una relazione che accettiamo come definita in modo non ambiguo), e all'autoreferenzialità (e.g. l'aggettivo "monosillabico" non si applica a se stesso - come parola). Ma in questo caso non è possibile cavarsela semplicemente, invocando una legge generale di non-definibilità, come la (1), perché sembra proprio che l'aggettivo "eterologico" *possa*

[3]Di lì a pochi anni, i risulatti di Gödel avrebbero di fatto dimostrato l'mpossbilità di una fondazione logica della matematica. Ciò riduce ma non estingue la necessità di un sistema che dia una base ragionevolmente (anche se non deducibilmente) "sicura" alla Teoria degli Insiemi.

[4]Alfred North Whitehead (186 1947).

[5]Negli ultimi decenni, le Teorie dei tipi (opportune riformulazioni dell'originale) hanno cominciato a prendersi qualche rivincita, dimostrandosi i più adatte di quello assiomatiche ad essere "comprese" dai computer.

[6]Ernst Zermelo (1871–1953), Abraham Fraenkel (1891–1965)

essere definito, per la nostra stessa prerogativa di intervento nella lingua corrente, per cui è sempre possibile assegnare una (nuova) parola ad una nuova idea[7].
Ci troviamo di fronte, diciamo così, per la *teoria degli aggettivi*, ad una situazione veramente simile a quella prodotta dal paradosso di Russell per la teoria ingenua degli insiemi: la sola via d'uscita è quella di riconoscere che l'idea "ingenua" di aggettivo, per cui ogni ad ogni proprietà (delle parole) può essere assegnato un aggettivo–parola non è rigorosamente fondata, e che dunque, da un punto di vista strettamente logico, è necessario limitare in qualche maniera la definizione di aggettivo: come per gli insiemi, non tutto ciò che ci sembra un aggettivo è un aggettivo (o meglio, può essere associato ad una parola–aggettivo).

[Come definire il termine *aggettivo*? Certo, un aggettivo indica il soddisfacimento di una qualche proprietà; ma, allora, cos'è una proprietà? Beh, una proprietà individua un certo sottoinsieme dell'insieme delle cose a cui è possibile riferire la proprietà; per esempio, l'aggettivo *corto* potrebbe significare, quando riferito alle parole, non più lungo di cinque lettere, e il sottoinsieme (dell'insieme delle parole) determinato dall'aggettivo corto è formato da tutte le parole non più lunghe di cinque lettere, tra le quali vi è la stessa parola "corto". Ora, quello di sottoinsieme è un concetto molto più chiaro, e facile ad essere trattato formalmente di quello di "proprietà", ed un matematico lo prenderebbe senz'altro come definizione: una *proprietà* (riferita alle parole) *è un sottoinsieme dell'insieme delle parole*. Ma gli aggettivi sono parole, ed allora torna conveniente rovesciare il rapporto che sembra naturale; riconoscendo che ogni aggettivo determina una proprietà, ma che, nell'altro verso, il paradosso di Grelling–Nelson mostra come non tutte le proprietà (delle parole) determinino un aggettivo. Possiamo anche continuare a dire, sensatamente, che esistono aggettivi che si applicano a se stessi, ma non possiamo intendere questa proprietà come una aggettivo.[8]]

2. Paradosso del mentitore

Nella sua forma essenziale, il paradosso del mentitore si realizza in una sola battuta:

Questa affermazione è falsa

che, chiaramente, pena la contraddizione, non può essere vera, e non può essere falsa (anche qui, l'autoreferenza accoppiata alla negazione crea il cortocircuito logico).
Secondo la tradizione, il primo a tirarlo fuori, in una forma incompleta, fu il semileggendario poeta-mago *Epimenide di Cnosso*[9]. (VI secolo a.c.), il quale, cretese, una volta

[7] Non voglio toccare qui la questione che prima o poi le parole finiranno etc.etc. Non è qusto il punto.

[8] Questa discussione è solo un'illustrazione di un metodo, e non vuole assolutamente tratteggiare una teoria formale degli aggettivi. Se lo fosse, si potrebbe commentare che, per come sono state definite e per il Teorema di Cantor, il numero di proprietà dell'insieme delle parole è molto più grande del numero delle parole; dunque non ci sarebbe da meravigliarsi che ci sia qualche proprietà che non è (indicabile con) una parola.

[9] Questo Epimenide doveva essere un tipo ben strano; secondo Diogene Laerzio non fu mai visto mangiare e in gioventù dormì per 57 anni di seguito. Ma, soprattutto, *non andava dal barbiere*: sempre secondo Diogene, infatti,"era di origine cretese, di Cnosso, anche se non ne aveva l'aspetto, a causa della lunghezza dei capelli". È evocato anche da San Paolo nell'epistola a Tito: "Uno di loro, proprio un loro profeta, disse che i Cretesi sono sempre mentitori, cattive bestie, ventri pigri. Questa testimonian-

ebbe a sostenere che "Tutti i cretesi mentono sempre". Affermazione che, in sè, non porta a contraddizioni; certo non può essere vera, ma potrebbe essere falsa[10].
Sin dall'antichità (Diogene Laerzio, Cicerone, etc.), la formulazione precisa del paradosso, "Io sto mentendo" (che forse è anche più convincente di quella cha abbiamo posto all'inizio), è attribuita al filosofo megarico *Eubulide di Mileto* (IV secolo a.c.), al quale si attribuisce la paternità (ma forse sarebbe più corretto dire "la meternità") di altri paradossi, come quello del sorite[11], divenuti poi famosi. La breve parentesi storica finisce ricordando come questo paradosso abbia per secoli, da Aristotele a Tarski, dato da pensare a filosofi e logici[12].

La frase "questa affermazione è falsa" è direttamente autoreferenziale; ma esistono versioni del paradosso, dette circolari, in cui nessuna frase (o parlante) afferma la propria falsità, e l'autoreferenzialità è intesa rispetto a tutta la collezione di frasi. La versione circolare più semplice è quella ideata dal matematico P. Jourdain[13] nel 1913 ed è costituita da due frasi:

La frase di sotto è falsa.
La frase di sopra è vera.

Può essere interessante notare che la reciproca negazione

La frase di sotto è falsa.
La frase di sopra è falsa.

za vera..."(*Tito*,1;12-13). Per contro, Bartolomé de Las Casa, nella *Historia de las Indias*, racconta come presso i messicani la parola cristiano fosse diventata sinonimo di mentitore, "*Quando gli spagnoli chiedevano agli indiani se erano cristiani, quelli rispondevano – Sí, signore, sono già un po' cristiano perché so già mentire un poco, un giorno saprò mentire molto, e allora sarò molto cristiano*" (citato da T. Todorov in *La conquista dell'America*, Einaudi 1992).

[10]E la cosa finisce lì, come si trova scritto in qualche testo divulgativo. A me qualche perplessità resta. Se manteniamo come punto di partenza che ogni affermazione o è vera oppure no, la frase di Epimenide, che non può essere vera, non è, appunto, vera; ma ciò significa che, da qualche parte e almeno una volta, un qualche cretese ha detto la verità (e certo non Epimenide con la sua battuta). Questo mi pare veramente insano: il fatto che Epimenide dica che tutti i cretesi mentono ed hanno sempre mentito, produrrebbe di per sé, e magari con un'azione retroattiva - da congegno o macchina del tempo - che un qualche cretese sia stato una volta veritiero! Che la conclusione sia probabile non nego; ma se invece di tutti i cretesi ci fossimo io - che sono C - ed i miei due fratelli A e B, e che, in tutta la nostra esistenza, avessimo pronunciato ciascuno una sola frase (siamo laconici di famiglia), nell'ordine che segue:

A: La congettura di Riemann è vera.
B: La vita comincia a quarant'anni.
C. Noi fratelli mentiamo sempre.

si avrebbe una dimostrazione della congettura di Riemann?

[11]Paradosso la cui sua formulazione classica è: 'Un granello di sabbia che cade non fa rumore, quindi nemmeno due, e nemmeno tre, e cos via. Quindi nemmeno un mucchio (sorite) di sabbia che cade fa rumore". Oggi è più comunemente enunciato nella forma "Togliendo un granello di sabbia da un mucchio rimane ancora un mucchio, quindi togliendone un altro si avrà ancora un mucchio, e così via fino all'ultimo granello. Quindi un solo granello è un mucchio? Oppure, a quale granello un mucchio non è più un mucchio?". Spesso viene definito un "paradosso dell'induzione", come se l'induzione fosse un processo di modificazione progressiva.

[12]Pare che Bertrand Russell abbia affermato di ritenere che il filosofo George Edward Moore avesse mentito una volta sola in vita sua; nell'occasione in cui, avendogli chiesto qualcuno se diceva sempre la verità, dopo un momento di riflessione, egli rispose "No".

[13]Nella sostanza c'era già arrivato il logico medievale Buridano (∼1300–1360), mettendo insieme le frasi "Platone dice che Socrate dice il vero" e "Socrate dice che Platone dice il falso".

non costituisce un reato perseguibile: si possono assegnare valori di verità (una delle due frasi è vera e l'altra falsa) in modo non contraddittorio[14]. Tuttavia, anche questa volta, a me qualche perplessità rimane: mettiamo di scrivere su entrambe le facce di un cartoncino a due facce la frase "la frase scritta dall'altra parte è falsa"; come nell'esempio "in linea" una delle due frasi è vera e l'altra falsa. Ma sono la stessa frase...

Altre versioni con più frasi hanno un'apparenza più elaborata, e magari anche più divertente, finendo, forse, per contribuire ad alimentare l'idea che elucubrazioni come queste (che pure hanno impegnato filosofi sin dai tempi della Grecia classica) non siano che una raccolta di giochini senza importanza, buoni per un dopo cena tra amici, ma sostanzialmente frivoli[15]. Per esempio:

1. La congettura di Riemann è stata provata da C. Casolo.
2. Al più una delle affermazioni incluse in questa cornice è vera.
3. Questa cornice contiene tre affermazioni.

Si osservi che qui l'autoreferenza negativa è evitata solo in apparenza; infatti la seconda frase equivale a "almeno due delle affermazioni nella cornice sono false". Ora, poiché la terza frase è palesemente vera, la seconda non può essere vera, dunque è falsa; ma allora, poiché vi è nella cornice almeno una frase vera (la terza), ne consegue che ce ne devono essere almeno due; e poiché la seconda, come detto, è falsa, deve essere vera la prima. Che però è del tutto falsa (cosa che non si fatica a credere). Naturalmente, in questo modo possiamo provare qualsiasi affermazione ci piaccia collocare come prima frase.

Il paradosso del mentitore non è, anche a lume di naso, molto lontano da quello del barbiere. Un ponte tra i due mi sembra, ad esempio, la non infrequente dichiarazione:

"Andiamo sempre in vacanza dove non ci sono turisti."[16]

Paradossi della decisione. Il paradosso del mentitore, così come altri paradossi logico-linguistici, ha sempre esercitato un certo fascino, oltre che sui filosofi, anche su diversi letterati, i quali, normalmente restii a lasciar entrare qualcosa di logico, per non dire di matematico, nelle loro opere, ne apprezzano la propensione ad assumere forme ed apparenze diverse, alimentando una serie di storielle più o meno interessanti. Queste versioni assumono in genere l'aspetto di quelli che, in qualche testo divulgativo, sono chiamati *paradossi della decisione*. Si tratta, di fatto, di una forma mascherata del paradosso del mentitore.
Lo schema è questo: un qualche personaggio X si trova di fronte ad un'autorità, o una legge, o potere, che stabilisce che se costui X mentirà (o non indovinerà una certa cosa)

[14]Il male ritorna con tre negazioni concatenate [*1: La seconda frase di questa lista è falsa. – 2: La terza frase di questa lista è falsa. – 3. La prima frase di questa lista è falsa.*]

[15]Che è, credo, l'atteggiamento più frequente da parte dei matematici (fatto salvo, è chiaro, per il paradosso di Russell).

[16]Naturalmente, questa frase non è un contraddittoria, è semplicemente falsa; ma il fatto che capiti di udirla come se potesse essere vera è un esempio di come il paradosso non sia qualcosa che può capitare soltanto in esempi studiati apposta, quando il linguaggio è tirato ad un limite dal quale rimane sempre molto lontano nella prassi, ma invece è un'evenienza sempre in agguato.

allora accadrà un certo evento A (in genere non favorevole ad X), mentre se dirà il vero (o indovinerà) accadrà non-A. Si parte quindi da una normativa che dice

$$M \leftrightarrow A \tag{2}$$

dove M significa "X mente (o non indovina)". La scappatoia per X è allora quella di dichiarare "avverrà A"; per quanto osservato con (2), ciò equivale al fatto che X dichiari "io sto mentendo" (o mentirò, o non indovinerò), rientrando così pari pari nella casistica del mentitore.

Questo è il caso, ad esempio, della storiella del logico il quale, dopo aver inserito la mano nella Bocca della verità in Santa Maria in Cosmedin, dice "questa mano mi sarà morsa".
Un altro esempio è la classica storia del coccodrillo, nata in ambiente stoico e raccontata da Diogene Laerzio. Un coccodrillo ghermisce un bambino che sta giocando sulle rive del Nilo. La madre accorre e prega il coccodrillo di lasciare andare il piccolo e quello, astuto, le risponde: "Lo lascerò andare se tu indovinerai cosa sto per fare". La madre gli disse: "Tu stai per mangiare mio figlio". A questa risposta il coccodrillo le dice: "Mi dispiace ma non posso ridarti tuo figlio: infatti se lo lascio andare tu non hai indovinato ciò che io avrei fatto". Al che la madre, sorridendo, gli rispose: "Ma non puoi neanche mangiarlo, perché così facendo io avrei indovinato cosa avresti fatto e tu avresti dovuto ridarmi mio figlio".

Intermezzo: il paradosso del mentitore nella letteratura

Miguel de Cervantes. Nel secondo libro del Don Chisciotte, si racconta di una burla ai danni di Sancho Panza, al quale viene fatto credere d'esser stato nominato governatore dell'isola di Barataria (nella realtà un piccolo villaggio aragonese); gli vengono così sottoposte alcune bizzarre questioni giuridiche.

> Il primo ch'ebbe a lui ricorso fu un forestiere che, presenti il maggiordomo e tutti gli altri ministri, gli disse:
>
> – Signore, un rapido fiume divideva due confini di un dominio medesimo [. . .] e sopra questo fiume eravi un ponte, e al capo del ponte un paio di forche, ed una tal casa di audienza o di giustizia in cui stavano di ordinario quattro giudici, che giudicavano sul fondamento della legge imposta dal padrone del fiume, del ponte e del dominio: e la legge era questa: "Se alcuno vuole passare per questo ponte dall'una all'altra parte, deve prima dire e giurare dove e per quale oggetto egli passa; giurando il vero, sia lasciato passare, mentendo, sia impiccato sulle forche che stanno alzate, e ciò senza alcuna remissione". Resa pubblica questa legge e la rigorosa condizione, molti passavano, e dal tenore del loro giuramento conoscevasi la verità, ed i giudici li lasciavano liberamente andare. Accadde una volta che ricevendo il giuramento dato da un uomo, egli giurò che passava e andava a morire su quelle forche ch'erano ivi alzate, e nulla più aggiunse. Ponderarono i giudici questa cosa e dissero: se noi lasciamo passare liberamente questo uomo, egli avrà mentito nel suo giuramento, e noi conformemente alla legge dovremmo farlo impiccare: ma se noi lo impicchiamo, egli ha giurato che andava a morire su quelle forche, ed avendo giurato il vero, a senso della medesima legge dee restarsene libero. Ora io domando alla signoria vostra, signor governatore, che debbano fare i giudici di questo uomo, standosene eglino tuttavia dubbiosi e sospesi?
>
> Tosto rispose Sancio:
>
> – Davvero che questi signori giudici vi mandano da me, potevano fare di manco di questa imbasciata, perché io sono uomo che ha più del bestiale che dell'acuto:

> contuttociò ripetetemi un'altra volta il caso in modo che io possa intenderlo bene, e forse chi sa che io non dia nel segno.
>
> Tornò il messaggiere a ripetere quello che prima aveva detto, e Sancio soggiunse:
>
> – A giudizio mio questo negozio è deciso in due parole, e dico così: il tal uomo giura che va a morire sulle forche, e se muore su quelle giura il vero, e in tal caso merita, in forza della legge, di andare libero e di passare il ponte; e se non lo impiccano ha giurato il falso, ed in vigore della stessa legge merita di essere impiccato?
>
> – Così e per lo appunto come l'ha intesa il signor governatore, – disse il messaggiere – né quanto alla chiara e pienissima intelligenza del caso alcun dubbio si può avere, né altro rimane a desiderarsi.
>
> – Dico dunque adesso, – replicò Sancio, – che quella parte di tal uomo che ha giurato la verità la lascino passare, e l'altra che ha mentito la faccino tosto impiccare, e in questo modo sarà letteralmente adempita la condizione del passaggio.
>
> – Oh questa è nuova, signor governatore degnissimo! – replicò l'interrogante; – a questo modo si dovrebbe dividere l'uomo in due parti, in bugiarda ed in vera; ma quando si dividesse egli dovrebbe per forza morire e allora niente conseguirebbe di quello che la legge dimanda e ch'è di necessità che si adempia.
>
> – Sentite qua, signor buon uomo mio, – rispose Sancio; – questo passeggiere di cui parlate, o io sono un animale o egli tiene la stessa ragione per morire come per vivere e per passare il ponte: ora se la verità lo salva la bugia lo condanna egualmente; ed essendo così la cosa, siccome é infatti, io sono di opinione che andiate a dire ai signori dai quali siete mandato, che trovandosi in eguale bilancia e le ragioni di condannarlo a quelle di assolverlo, lo lascino passare liberamente: perché sempre meglio fare del bene che del male, e questa decisione ve la darei anche corroborata colla mia firma, se sapessi scrivere.[17]

Lewis Carroll e il coccodrillo. Mentre è chiaro che il dilemma che si trova ad affrontare Sancho Panza è analogo a quello del coccodrillo nella stroriella che abbiamo già raccontato, è interessante notare che lo scioglimento che egli né dà non è dissimile da quello che, secondo Lewis Carroll, sarà la decisone del coccodrillo (anche se con esiti opposti per la vita di qualcuno); scrive Carroll, che dà l'impressione di poter immedesimarsi piuttosto facilmente nel predatore,

> Qualunque cosa faccia, il coccodrillo non mantiene la parola data. Se divora il bambino, fa sì che la madre dica la verità, e quindi non mantiene la parola; se lo restituisce, fa sì che la madre dica il falso, e anche in questo caso non mantiene la promessa. Non avendo speranza di salvare il suo onore, non si può dubitare che si comporterà seguendo la sua seconda passione predominante: l'amore per i bambini![18]

Se voi foste il giudice. Così come una proposizione è vera o falsa, una causa (un procedimento giudiziario) si vince o si perde; dunque, intentar causa contro se stessi è una specie di paradosso simile a quello perpetrato quando si afferma "Io sto mentendo", ed è quello che combina un personaggio minore nel romanzo *Jacques il fatalista* di Denis Diderot:

[17] M. de Cervantes, *Don Chisciotte della Mancia*, Libro II, cap. LI - trad. italiana di B. Gamba (1818)

[18] L. Carroll, *Symbolic Logic, Part II.* Con tipico senso dello humor, Carroll propone quindi ai lettori di analizzare il problema nel caso che la prima frase della madre fosse stata: "Tu mi ridarai il bambino". In questo caso, se il coccodrillo lo restituisce, allora mantiene la sua parola; se lo divora, allora la madre ha detto il falso e, di nuovo, il coccodrillo rispetta l'accordo. Conclude Carroll: "In qualunque modo si comporti, il coccodrillo mantiene la parola. Il suo senso dell'onore è dunque pienamente soddisfatto qualunque cosa faccia, così che, di nuovo, sua sola guida rimane la sua seconda passione dominante, il risultato per il bambino sarebbe, temo, esattamente identico a prima".

– Ma chi vi ci ha fatto mettere? [in carcere]
– Io stesso.
– Come, voi?
– Sì, io, signore.
– E come avete fatto?
– Come avrei fatto per un altro. Ho intentato un processo a me stesso; l'ho vinto, e in seguito alla sentenza che ho ottenuto contro me stesso, e al decreto che ne è seguito, sono stato arrestato e portato qui.
– Siete pazzo?
– No, signore, vi dico come stanno le cose.
– Non potreste farvi un altro processo, vincerlo e, in seguito a un'altra sentenza e a un altro decreto, farvi liberare?

Qui la situazione è volutamente assurda. Mentre è proposto come un aneddoto autentico il racconto che Aulo Gellio, nelle *Noctes Atticae* fa a proposito del filosofo sofista Protagora e di un suo allievo[19]. Il giovane Euatlo vuol diventare oratore forense e prende lezioni da Protagora, corrisponedendogli metà dell'onorario pattuito prima di iniziare le lezioni, con l'accordo di saldare il resto non appena vinta la prima causa. Ma, terminato il corso, per molto tempo Euatlo non perorò alcuna causa, tanto da far sospettare in Protagora l'intenzione di non voler pagare il resto del compenso (che doveva essere piuttosto salato). Il filosofo citò allora Euatlo in tribunale, affinché il giudice costringesse quest'ultimo al pagamento. Di fronte alla corte, così disse

> Sappi, giovane stolto, che mi dovrai pagare, in qualsiasi modo il tribunale si pronunci, sia contro di te che a tuo favore. Infatti, se il giudice ti darà torto, e quindi io vincerò la causa, mi dovrai la somma in base alla sentenza; e se ti verrà data ragione, mi dovrai pagare in base ai patti, perché avrai vinto una causa.

Ribattè Euatlo,

> Potrei facilmente eludere la tua trappola non pronunciando parola e facendomi patrocinare da un altro avvocato. Ma maggior piacere ricaverò dal vincerti non soltanto giuridicamente, ma sul tuo stesso argomento. Apprendi dunque anche tu, dottissimo maestro, che non otterrai da me ciò che chiedi, in qualsiasi modo si pronunci la cote, sia contro di me che a mio favore. Infatti, se i giudici si pronunceranno in mio favore, nulla ti sarà dovuto per loro sentenza; se contro di me, nulla ti dovrò per il patto che si fece, giacché non avrò ancora vinto una causa.

Riferisce Gellio che i giudici, non riuscendo a togliersi dai dubbi, rinviarono la causa a data lontanissima[20].

Georges Perec. Al paradosso di Grellig-Nelson (a proposito delle parole eterologhe) fa riferimento lo scrittore francese Georges Perec ne *La vita istruzioni per l'uso*, proponendo la seguente interessante variante nel capitolo 85:

> Qual è l'intruso nel seguente elenco: italiano, corto, polisillabico, scritto, visibile, parola, stampato, maschile, singolare, americano, intruso ?

[19] Lo stesso episodio è solo accennato in Diogene Laerzio

[20] Sul sito Base 5(appunti di matematica ricreativa) ho trovato un commento (di un esperto, a giudicare dalla terminologia) che spiega come una corte italiana (in base all'articolo 1355 del codice civile) avrebbe sanzionato la nullità del contratto tra Protagora e Euatlo e imposto a quest'ultimo, pur perdendo la causa, il pagamento della prestazione; http://utenti.quipo.it/base5/logica/protagora.htm

David F. Wallace[21]. Nel racconto *Caro vecchio neon*, il paradosso del mentitore diventa, nelle parole del narratore-protagonista, il Paradosso dell'Impostore[22].

> ...non potevo essere un impostore assoluto se avevo appena dichiarato [all'analista] la mia impostura riconoscendola davanti a lui un istante prima.

Anche se poi il narratore elabora a lungo l'idea, e il paradosso da logico - o linguistico - diventa esistenziale:

> Era che più tempo e più impegno mettevi nel cercare di far colpo sugli altri o di affascinarli, meno sorprendente e affascinante ti sentivi dentro: eri un impostore. E più ti sentivi un impostore, più ti sforzavi di offrire un'immagine sorprendente e piacevole di te stesso per evitare che gli altri capissero che eri un impostore [e così via].

Di fatto, l'intero racconto è alimentato da numerosi riferimenti alla logica ed ai paradossi (a partire dall'impianto narrativo: un suicida parla in prima persona degli ultimi mesi della propria vita): oltre a quello del mentitore, Wallace – o il narratore – cita il paradosso di Russell e descrive compiutamente quello di Berry, che vedremo tra qualche pagina.

Star Trek. Questo forse non è grande letteratura, ma è divertente. Si tratta dell'episodio intitolato *I, Mudd* (tradotto in italiano, *Io, Mudd*) del 1967, nel quale il paradosso del mentitore, nella sua forma base ("sto mentendo. Sono un bugiardo o no?") è utilizzato dal capitano Kirk per mandare fuori di testa, spingendolo all'autodistruzione, un androide che stava riuscendo ad imprigionare l'equipaggio dell'enterprise.

http://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=EWEqsP8-Chc#!

John Cage. L'opera più citata (non saprei dire se la più "ascoltata") di John Cage è probabilmente *4'33"*, che viene eseguita dal pianista rimanendo per 4 minuti e 33 secondi davanti alla tastiera di un pianoforte senza mai toccare i tasti (la composizione è "in tre movimenti"). Non so se questo abbia a che fare col mentitore, ma un poco paradossale lo è; d'altra parte lo stesso Cage affermò qualcosa come "Non ho niente da dire, e lo sto dicendo"[23].

3. Il paradosso di Curry

Prima di enunciare il paradosso di Curry[24], giova ricordare come funziona la dipendenza del valore di verità di una implicazione logica

$$A \to B$$

[21] David Foster Wallace (1962–2008), uno dei più notevoli narratori americani contemporanei, applicò spesso, e con varie intenzioni, termini e concetti matematici nelle sue storie. Il suo interesse non superficiale per la matematica è ampiamente testimoniato; scrisse anche un libro dal titolo *Everything and More, a Compact History of* ∞, che si propone di raccontare la Teoria di Cantor (c'è una traduzione italiana edita da Codice, ma, francamente, il libro è un po' un disastro, sicuramente il meno raccomandabile di Wallace). Il racconto *Caro vecchio neon* si trova nella raccolta *Oblio* (molto meglio); traduzione di G. Granato (Einaudi, Stile Libero, 2004).

[22] Il protagonista è un pubblicitario; uno di quelli che si autodefiniscono "creativi", il che è già una bella impostura e - diciamolo pure - un paradosso

[23] Non sono sicuro Cage sii riferisse proprio al brano suddetto. Comunque, la citazione intera è "La materia della musica è suono e silenzio. L'integrazione di essi è composizione: non ho niente da dire, eppure lo sto dicendo".

[24] Proposto dal logico e matematico Haskell B. Curry nel 1942.

dai valori di verità della premessa A e della conseguente B. Se A è vera, allora l'implicazione $A \to B$ è vera se e soltanto se anche B è vera, e fin qui non c'è nulla di strano; ma se A è falsa, allora l'implicazione $A \to B$ è vera *qualsiasi sia il valore di verità di B*. Di coseguenza

$$A \to B \text{ è } \textit{falsa} \text{ se e soltanto se } A \textit{ è vera e } B \textit{ è falsa.}$$

È probabile che questo fatto, che è forse la regola "meno ovvia"' e meno naturale della logica classica, susciti perplessità e richieda un'opera di persuasione. Ma non è questo l'argomento di questa nota e dunque andiamo avanti:

Paradosso di Curry.

Se questa frase è vera allora le cicogne portano i bambini. Dunque, le cicogne portano i bambini.

Consideriamo la prima frase ("se questa frase è vera allora le cicogne portano i bambini") che afferma una implicazione; se è vera, è vera la sua premessa ("questa frase è vera") e dunque (essendo vera l'implicazione) è vera la conseguente; se invece è falsa allora, per quanto ricordato sopra a proposito della verità della implicazioni, la conseguente è comunque vera. Pertanto, le cicogne portano i bambini. [Naturalmente, al posto di "le cicogne portano i bambini" ci si può mettere qualsiasi altra affermazione B: se B è vera allora l'implicazione è vera, mentre l'effetto paradosso si ha quando B è falsa].

In diversi articoli e testi divulgativi si trova scritto che il paradosso di Curry è altra cosa, e più sottile, rispetto a quello del mentitore, perché non fa uso della negazione. In realtà, nella logica classica, il paradosso di Curry è una delle incarnazioni del mentitore (dove, per così dire, il peso di condurre ad un'assurdo è per metà scaricato su una seconda affermazione indiscutibilmente falsa). Immaginiamo, infatti, che se ne ritorni su Empedocle, questa volta affermando "Se io dico il vero allora le cicogne portano i bambini"; beh, non sembra che in questo modo stia proprio proclamando di dire il falso? Prendedola in maniera più formale, nella logica classica l'implicazione $A \to B$ è equivalente (cioè assume gli stessi valori di verità rispetto a quelli di A e di B) della disgiunzione logica (non A) o B, cioè

$$(A \to B) \;\leftrightarrow\; \neg A \vee B.$$

[difatti, come per $A \to B$, $\neg A \vee B$ è falsa se e solo se A è vera e B è falsa]. Quindi, dal punto di vista semantico, un'affermazione come "Se questa frase è vera allora la vita comincia a quarant'anni" è equivalente a

"Questa frase è falsa oppure la vita comincia a quarant'anni".

e poiché è falso che la vita cominci a quarant'anni[25], quast'ultima frase è vera se e soltanto se la sua premessa è vera, cioè se e soltanto se la frase stessa è falsa, e siamo al caso del mentitore.

Possiamo continuare un po' in questo verso: poiché la disgiunzione $\neg A \vee B$ è a sua volta equivalente a $\neg(A \wedge \neg B)$, un'altra forma alla quale, nella logica classica, si può condurre paradosso di Curry è illustrata dalla seguente cornice, che credo suggerisca in maniera abbastanza immediata la parentela col paradosso del mentitore

[25] Se non vi fidate dei numeri, credete a me.

1. Almeno una frase in questa cornice è falsa.
2. La vita non comincia a quarant'anni.

La 1. non può essere falsa, quindi è vera, ma allora 2. è falsa e dunque la vita comincia a quarant'anni (assurdo).

Comunque sia, anche per i non specialisti il paradosso di Curry esercita un fascino più sottile di quello del mentitore; sembra "una cosa più seria"[26]. È tuttavia in approcci non classici che i due sono significativamente diversi. Ma questa è una zona in cui non ho la pretesa di avventurarmi[27] e neppure l'equipaggiamento adatto a farlo. Nella prossima sezione illustreremo invece un paio di paradossi che, agli occhi di un profano (quale sono e fui), sembrano di natura di diversa.

4. l paradossi di Berry e di Richards

ll paradosso di Berry deve il suo nome a G. G. Berry, bibliotecario della Bodleian Library di Oxford, che lo propose in una lettera a B. Russell nel 1904. Ecco come lo descrive Russell stesso:

The least integer not nameable in fewer than nineteen syllables is itself a name consisting of eighteen syllables; hence the least integer not nameable in fewer than nineteen syllables can be named in eighteen syllables, which is a contradiction

Tradotto e adattato all'italiano:

> **Paradosso di Berry.** Poichè il numero di frasi italiane che si possono comporre con al più ventinove sillabe è finito, è finito l'insieme dei numeri naturali che possono essere definiti in italiano con ventinove sillabe o meno. Quindi, per il principio del senso comune (o per quello del Buon Ordine) esiste
> *il minimo numero naturale che non si può definire con meno di trentatre sillabe.* Ma ecco che quella in corsivo è proprio una definizione di tale numero fatta con ventinove sillabe, e questa è una contraddizione.

[26] Ad esempio, con intenti che voglio credere parodistici, scrive P. Odifreddi (ne *Il Vangelo secondo la Scienza*) che il paradosso di Curry rappresenta "una vera e propria dimostrazione della non esistenza di Dio", in quanto esso prova che "l'assunzione di un essere necessario, o di una causa prima, è incompatibile con la logica".

[27] Senza entrare troppo nel formalismo rigoroso, il paradosso di Curry affligge ogni sistema logico in cui l'implicazione $\to$ soddisfa alla proprietà di asserzione ($A \to A$ è valida per ogni A), di contrazione (cioè da $A \to (A \to B)$ segue $A \to B$), in cui vale il "modus ponens", e nel quale per una proposizione Y (la vita comincia a quarant'anni) esiste una proposizione X tale che $X = X \to Y$ (se questa proposizione è vera allora la vita comincia a quarant'anni). Ne segue infatti che Y è vera:

1. $X \to X$ (asserzione)
2. $X \to (X \to Y)$ (sostituendo X con $X \to Y$)
3. $X \to Y$ (contrazione da 2.)
4. X (sostituzione)
5. Y (modus ponens da 3. e 4.)

Un altra maniera di dirlo: *il massimo numero naturale che si può definire con meno di trentatre sillabe più uno*, è una definizione fatta con trentuno sillabe; oppure, scimmiottando al dimostrazione di Euclide dell'infinità dei numeri primi, la definizione "*la somma di tutti i numeri naturali che si possono definire con meno di trentatre sillabe*" richiede, appunto, trentatre sillabe.
Visto così, fa venire in mente le storie a proposito di gare a nominare il numero più grande; in cui succede che uno vince poiché prende alla sprovvista l'altro dicendo "il numero che tu hai detto più uno" (che, per inciso, è una frase di dodici sillabe); a meno che l'altro, riprendendosi entro il tempo consentito, non ribatta dicendo la stessa cosa, e forzi così la parità concordata.

Il paradosso di Richard. Proposto dal matematico francese J. A. Richard nel 1905, è molto affine a quello di Berry, ma non introduce limitazioni alla lunghezza delle "definizioni", ed è piuttosto interessante perché per giungere alla conclusione paradossale ricorre allo stesso procedimento, il celebre *argomento diagonale*, utilizzato da Cantor per dimostrare (legittimamente) l'esistenza di insiemi infiniti (come quello dei numeri reali) non numerabili. La versione originale, che potete facilmente trovare in rete, ha per ingredienti i numeri reali definibili con una frase italiana di lunghezza finita. Qui ne descriverò una variante (del tutto equivalente ma più vicina alla prima dimostrazione di Cantor di cui s'è detto[28]).
Una successione (naturale) $\mathbf{a}$ è una sequenza di numeri naturali, detti termini,

$$\mathbf{a} = (a_1,\ a_1,\ a_2, \ldots)$$

(in sostanza, una successione è una funzione $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$). Diverse successioni possono essere definite con una frase in lingua italiana (non poniamo alcun limite alla lunghezza della frase, purché sia finita); ad esempio la successione $1, 2, 4, 8, 16\ldots$ può essere definita nel modo seguente: *la successione il cui primo termine è 1, ed ogni termine a partire dal secondo è il doppio del precedente*; oppure la celebre serie di Fibonacci $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$, che è definita come: *la successione i cui primi due termini sono uguali ad* 1 *ed ogni termine a partire dal terzo è la somma dei due termini precedenti.*

Prendiamo dunque in considerazione tutte quelle frasi, formate da elementi del nostro vocabolario, che definiscono in maniera univoca una successione di numeri naturali. Chiaramente, per ogni numero naturale n, l'insieme delle successioni definite in questo modo con n segni è finito. Possiamo dunque ordinare le successioni definite in italiano, disponendole in ordine di lunghezza (dalle definizioni più brevi a crescere) ed ordinando in ordine alfabetico le definizioni della stessa lunghezza, ed ordinando per ordine alfabetico definizioni della stessa lunghezza. Otteniamo così una lista (*enumerazione*) $\mathcal{L}$ di tutte delle successioni definite in lingua italiana:

$$\mathcal{L}\ :\quad \begin{array}{l} \mathbf{a^1} = (a^1_1, a^1_2, a^1_3, \ldots), \\ \mathbf{a^2} = (a^2_1, a^2_2, a^2_3, \ldots) \\ \ldots \\ \ldots \end{array}$$

Fatto questo, consideriamo la seguente frase in lingua italiana:

[28]vedi: http://en.wikipedia.org/wiki/Cantor's_diagonal_argument

$(*)$ *la successione in cui ogni termine è uguale al termine di posto corrispondente aumentato di* 1*, della successione che occupa lo stesso posto nella lista* $\mathcal{L}$*.*

In sostanza (e si capirà meglio) si tratta della successione $\ell = (\ell_1, \ell_2, \ldots)$, dove, per ogni $n \geq 1$,

$$\ell_n = a_n^n + 1.$$

La frase $(*)$ è una definizione della successione ℓ, successione che dunque dovrebbe comparire nella lista $\mathcal{L}$; cosa che è tuttavia resa assurda dalla sua stessa definizione.

Anche in questo caso, il paradosso nasce dalla ambiguità della nozione "*tutte le frasi, formate da elementi del nostro vocabolario, che definiscono in maniera univoca una successione di numeri naturali*". Nel linguaggio corrente si possono formulare definizioni fattuali, ma anche definizioni referenziali. Se, nel mio diario, scrivo "la temperatura massima di oggi è stata di 27 gradi", intendo una cosa ben precisa, descrivendo un fatto (la temperatura) in sé: se il giorno successivo scrivessi la stessa frase, questa avrebbe ancora lo stesso significato, indicando la stessa temperatura di 27 gradi. Se scrivo "la temperatura massima di oggi è stata di un grado superiore a quella massima di ieri" intendo ancora qualcosa di univocamente definito; per oggi, perché se domani scrivessi la stessa frase, ecco che questa avrebbe un significato diverso. Il significato della mia frase, pur non essendo ambiguo in nessuno dei due casi, dipende, per così dire, dalle circostanze.

È un po' quello che succede nel paradosso di Richard. Ad esempio, nell'ordinare le successioni come in $\mathcal{L}$, assumiamo - cosa certo possibile - che per ogni successione definibile si scelga la sua definizione "più breve" (nel senso dell'ordine per le frasi che abbiamo stabilito); considerate quindi la frase italiana

$(**)$ *la successione in cui ogni termine è la somma dei termini nella stessa posizione di tutte la successioni elencate fino a questo punto.*

Una frase di 105 lettere (non contiamo gli spazi bianchi) che finisce per cadere in una certa posizione nella lista delle frasi (diciamo, la 1003); infatti, collocata in quel punto, definisce in modo non ambiguo una successione (e lo fa nella maniera più breve perchè la successione che definisce è diversa da tutte le precedenti nella lista[29]); ed ora come portate avanti la vostra lista? ripetete oppure no la stessa frase $(**)$ una seconda volta? Se non lo fate perdete una successione, dato che, se anche comparisse più avanti lo farebbe con una definizione di lunghezza maggiore (dunque non ammessa) di quella che le garantirebbe, collocata a questo punto, la $(**)$; e se ripete la $(**)$ nell'elenco, con la motivazione piuttosto legittima che, ripetuta, definisce una diversa e nuova successione, è evidente che non ne verrete mai più fuori, che verrete ingoiati nel tunnel dell'iterazione e con voi sparirebbe la vostra opinione di poter enumerare le successioni *definite in lingua italiana.*

La tecnica del paradosso di Richard dimostra, in effetti e correttamente, che non è possibile *in alcun modo* enumerare (listare) tutte le successioni di numeri naturali, e di fatto è la stessa usata da Cantor. La malizia nel paradosso di Richard sta nel farci credere che le successioni che è possibile definire con una frase di lunghezza finita in lingua corrente, costituiscano un sottoinsieme dell'insieme di tutte le successioni (se tale fosse, sarebbe certamente numerabile).

[29] A meno che le liste prcedenti non siano solo due di cui una composta da tutti zeri.

Qualche esercizio

Esercizio. Dire se la seguente famiglia di affermazioni dà luogo ad un paradosso, oppure no (in tal caso, una sola delle affermazione è vera; qual è?):

Una ed una sola fra queste affermazioni vera.
Esattamente due tra queste affermazioni sono vere.
Esattamente tre tra queste affermazioni sono vere.
Esattamente quattro tra queste affermazioni sono vere.
Esattamente cinque tra queste affermazioni sono vere.

Problema/discussione. Vogliamo un po' parlare anche dell'affermazione

Questa frase è vera

così perduta nella contemplazione narcisistica della propria asserita verità ? Parrebbe che di essa non ci sia nulla da lamentarsi, almeno, non ci dà dei grattacapi immediati. Ma è ragionevole sostenere che abbia un senso, cioè che sia vera o falsa? Da essa non mi pare si possa dedurre sia una palese contraddizione, a meno di combinarla con qualche autoreferenza negativa. Si potrebbe pensare quindi nche, se ha un senso, allora è vera. Ma se è vera allora la sua negazione, "questa frase è falsa", è falsa, il che abbiamo visto non essere una conclusione gradevole . . . Ma sarà corretto dire che la negazione di "questa frase è vera" è proprio "questa frase è falsa"; (o, anche, che la negazione di "questa frase consta di sette parole" è "questa frase non consta di sette parole" (esempio dovuto a G. Lolli)).

Esercizio. Assumendo che qualsiasi affermazione sia dotata di senso (cioè le si possa assegnare un valore di verità), dire quali fra le seguenti affermazioni sono autocontraddittorie e quali no, e in questo caso dire se sono vere, false, o altro [NB: la frase "le cicogne portano i bambini" va tenuta solo per falsa].

1. Se questa frase è falsa alllora le cicogne portano i bambini.
2. Se le cicogne non portano i bambini allora questa frase è vera.
3. Se le cicogne portano i bambini allora questa frase è falsa.
4. Se le cicogne non portano i bambini allora questa frase è falsa.

Qualche riferimento bibliografico.

• **Versioni divulgative**: ce ne sono molte, anche di autori italiani. In genere parte di trattazioni più ampie, che trattano anche di altri paradossi che, per diversi motivi e più o meno legittimi, sono considerati "matematici" (da quello di Achille e della Tartaruga, a quello di Banach–Tarski). Ne cito tre, senza fare classifiche, i cui autori sono, o sono stati, tutti docenti di logica matematica:

1. S. Leonesi e C. Toffalori, *Matematica, miracoli e paradossi.* Bruno Mondadori, 2007. Una versione molto abbreviata si trova in rete come
http://matematica.unibocconi.it/articoli/matematica-miracoli-e-paradossi
2. G. Lolli, *Il riso di Talete.* Bollati-Boringhieri, 1998.
3. P. Odifreddi, *C'era una volta un paradosso.* Einaudi, 2001.

• **Più approfondito** dal punto di vista della logica:
Andrea Cantini, Paradoxes and Contemporary Logic, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2012 Edition), Edward N. Zalta (ed.)
http://plato.stanford.edu/archives/win2012/entries/paradoxes-contemporary-logic/

• **Sul paradosso di Russell**
- La lettera di Russell a Frege, e la mesta ma composta risposta di quest'ultimo, assieme a diversi contributi sulla questione dei fondamenti, da Frege e Peano fino a quelli, decisivi, di Gödel (tutto nella traduzione inglese), si possono trovare raccolti nel volume:
From Frege to Gödel. A source book in Mathematical Logic 1879–1931. A cura di J. van Heijenoort. Harvard University Press (si trova presso la biblioteca di Matematica).

- A. Fraenkel, *Set Theory and Logic* (si trova presso la biblioteca di Matematica)

• **Sul paradosso del mentitore.**
- La voce di wikipedia (inglese) può fornire le prime indicazioni
http://en.wikipedia.org/wiki/Liar_paradox
http://en.wikipedia.org/wiki/Epimenides_paradox

- Un saggio più esteso, scritto da logici, che cerca di non essere troppo tecnico (e non so se ci riesca), contiene ampia bibliografia e riferimenti: Beall, Jc and Glanzberg, Michael, *Liar Paradox.* http://plato.stanford.edu/archives/spr2013/entries/liar-paradox/

- Sulla figura di Epimenide si può consultare H. Diels, W. Kranz, *I Presocratici: testimonianze e frammenti*, I,3 (edizione italiana Leterza, 1979). [una parte piuttosto ampia è trascritta in http://giovanimarmotte.no-ip.org/filosofia/PRESOCRATICI/Pres/Epimenide/Packet1.htm

- Sul paradosso del sorite: http://plato.stanford.edu/entries/sorites-paradox/

• **Sul paradosso di Curry.**
- approfondito, ma non accessibilissimo: http://plato.stanford.edu/entries/curry-paradox/
- livello di intrattenimento: http://xeny.net/PenguinsRuleTheUniverse

• **Sui paradossi di Berry di Richard.**
- http://en.wikipedia.org/wiki/Berry_paradox
- Interessante di G.J.Chaitin: http://www.cs.auckland.ac.nz/CDMTCS/chaitin/unm2.html

• **Letteratura.**
- Miguel de Cervantes, *Don Chisciotte della Mancia* (ci sono tante edizioni italiane)
- Denis Diderot, *Jacques il fatalista e il suo padrone.*
- Aulo Gellio, *Noctes Atticae*, V,X : De argumentis, quae Graece antistrephonta appellantur, a nobis "reciproca" dici possunt.
- Georges Perec, *La Vita istruzioni per l'uso.* Rizzoli 1984.
- David Foster Wallace, *Oblio* (racconto: *Caro vecchio neon*). Trad. di G. Granato (Einaudi 2004).
- Star Trek. *I, Mudd.* http://it.memory-alpha.org/wiki/Io,_Mudd_(episodio)