Esame di Algebra Lineare e Geometria Analitica

(Dott.ssa D. Bubboloni)   13 Gennaio 2016

Avete due ore e mezzo a disposizione. Potete scegliere 5 esercizi fra i 6 proposti. Giustificate con cura le vostre risposte.

1. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ il seguente sistema.

$$\begin{cases} x + ay - z - t = 0 \\ 2x - y + at = 3 \\ 3x - z = 3 \end{cases}$$

Successivamente, dire se esistono valori di a per cui l'insieme ha ∞^2 soluzioni e, in tal caso esplicitarle.

2. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(X) = AX$ per ogni $X \in \mathbb{R}^3$, dove X è un vettore colonna. Dire perché f è lineare, usando solo la definizione di linearità, e trovarne poi nucleo e immagine. Dire se f è iniettiva e/o suriettiva.

3. Scrivere, in forma matriciale, la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$ associata al polinomio $p(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 6yz + 4xy$ e stabilire se risulta denita/semidefinita positiva/negativa o indefinita. In base a quanto ottenuto si puo' concludere che risulta $p(x, y, z) > 0$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$?

4. Data la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ a & 17/7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

con $a \in \mathbb{R}$, determinare i valori di a per i quali 6 risulti autovalore per A di molteplicitá algebrica 2. Scelto l'unico valore di a positivo fra quelli ottenuti, si determini una base ortonormale di autovettori di M.

5. Dire se la seguente lista ordinata

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

è una base di $\mathbb{R}^4$ e, in caso affermativo trovare le coordinate del vettore $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto ad essa.

6. Siano U e W sottospazi di uno spazio vettoriale V. Dire se sono necessariamente sottospazi i seguenti sootoinsiemi di V:

$$U \cap W, \qquad U \cup W, \qquad U + W$$

dove $U + W$ é definito da $U + W = \{v \in V \ |\exists u \in U, w \in W \text{ tali che } v = u + w\}$.