Esame di Algebra Lineare e Geometria Analitica

(Dott.ssa D. Bubboloni) 13 Gennaio 2016

Avete due ore e mezzo a disposizione. Potete scegliere 5 esercizi fra i 6 proposti. Giustificate con cura le vostre risposte.

1. Discutere al variare di $a \in \mathbb{R}$ il seguente sistema.

$$\begin{cases} x + ay - z - t = 0 \\ 2x - y + at = 3 \\ 3x - z = 3 \end{cases}$$

Successivamente, dire se esistono valori di a per cui l'insieme ha ∞^2 soluzioni e, in tal caso esplicitarle.

2. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(X) = AX$ per ogni $X \in \mathbb{R}^3$, dove X è un vettore colonna. Dire perché f è lineare, usando solo la definizione di linearità, e trovarne poi nucleo e immagine. Dire se f è iniettiva e/o suriettiva.

3. Scrivere, in forma matriciale, la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$ associata al polinomio $p(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 6yz + 4xy$ e stabilire se risulta denita/semidefinita positiva/negativa o indefinita. In base a quanto ottenuto si puo' concludere che risulta $p(x, y, z) > 0$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$?

4. Data la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ a & 17/7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

con $a \in \mathbb{R}$, determinare i valori di a per i quali 6 risulti autovalore per A di molteplicitá algebrica 2. Scelto l'unico valore di a positivo fra quelli ottenuti, si determini una base ortonormale di autovettori di M.

5. Dire se la seguente lista ordinata

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

è una base di $\mathbb{R}^4$ e, in caso affermativo trovare le coordinate del vettore $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto ad essa.

6. Siano U e W sottospazi di uno spazio vettoriale V. Dire se sono necessariamente sottospazi i seguenti sootoinsiemi di V:

$$U \cap W, \qquad U \cup W, \qquad U + W$$

dove $U + W$ é definito da $U + W = \{v \in V \mid \exists u \in U, w \in W \text{ tali che } v = u + w\}$.

1. $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & a & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[EG]{\substack{-2\\-3}}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1-2a & 2 & a+2 & 3 \\ 0 & -3a & 2 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1-2a & a+2 & 3 \\ 0 & 2 & -3a & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-1}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & z & y & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1-2a & a+2 & 3 \\ 0 & 0 & -a+1 & 1-a & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$-3a + 1 + 2a = -a + 1$

$3 - a - 2 = 1 - a$

- 2 pivot certi
- $-a+1$ è pivot per $a \neq 1$

$\boxed{\text{per } a \neq 1 \text{ si hanno } \infty^1 \text{ sol}}$

- $\boxed{\text{Se } a = 1}$ l'ultima eq è una identità e si elimina. Le soluzioni, in tal caso, $\boxed{\text{sono } \infty^2}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

y, t libere

$2z = 3y - 3t + 3$

$$\boxed{z = \frac{3}{2}(y - t + 1)}$$

$$x - \frac{3}{2}(y - t + 1) + y - t = 0$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}t + \frac{3}{2}}$$

$$\boxed{S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}t + \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}t + \frac{3}{2} \\ y \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; y, t \in \mathbb{R} \right\}}$$

2. $f(X) = AX$ e quindi $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^3$ si ha $f(\lambda X_1 + \mu X_2) = A(\lambda X_1 + \mu X_2) =$

$= \lambda A X_1 + \mu A X_2$ a causa delle proprietà del PRC

Quindi $f(\lambda X_1 + \mu X_2) = \lambda f(X_1) + \mu f(X_2)$ che dice f lineare.

Im A

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & -2 & x' \\ -1 & 3 & 7 & y' \\ 1 & 5 & 9 & z' \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 7 & y' \\ 1 & 5 & 9 & z' \\ 4 & 1 & -2 & x' \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 7 & y' \\ 0 & 8 & 16 & z'+y' \\ 0 & 13 & 26 & x'+4y' \end{array}\right) \xrightarrow{-13/8} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 7 & y' \\ 0 & 8 & 16 & z'+y' \\ 0 & 0 & 0 & x'+4y' \end{array}\right)$$

L'eq per Im A è $x' + 4y' - \frac{13}{8}z' - \frac{13}{8}y' = 0$

$8x' + 32y' - 13z' - 13y' = 0$

$\boxed{8x' + 19y' - 13z' = 0}$ Im A

Ker A poniamo $x' = y' = z' = 0$

$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$ z^* libera $z^* = 1$

$y^* = -2$, $-x^* - 6 + 7 = 0$, $x = 1$

$$\boxed{\operatorname{Ker} A = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

f non è né iniettiva, né suriettiva.

3. $\varphi(x,y,z) = (x\ y\ z) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left[(1-\lambda)(3-\lambda) - 9\right]$

$-2 \cdot 2(3-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3 - 9) - 4(3-\lambda) =$

$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 6) - 4(3-\lambda)$

$= 2\lambda^2 - 8\lambda - 12 - \lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda - 12 + 4\lambda =$

$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 2\lambda - 24$

Variazioni di segno 2. Quindi 2 autovalori positivi e uno negativo

$\frac{13}{8}(z' + y')$

p è indefinita

Pertanto è falso che $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ risulti $p(x,y,z) > 0$

4. $\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & a & 0 \\ a & 17/7 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} =$

$$= (6-\lambda)\left[(-1-\lambda)\left(\frac{17}{7} - \lambda\right) - a^2\right]$$

volendo 6 doppio occorre che

$(-1-6)\left(\frac{17}{7} - 6\right) - a^2 = 0$ ossia

$a^2 = -\cancel{7}\left(\frac{17-42}{\cancel{7}}\right)$, $a^2 = 25$, $a = \pm 5$.

$a = 5$ sostituito in M dà

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 5 & 17/7 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

6 è autovalore doppio. L'altro autovalore è ottenuto risolvendo

$$(+1+\lambda)\left(\frac{17}{7} - \lambda\right) + 25 = 0$$

$$(1+\lambda)(17 - 7\lambda) + 175 = 0$$

$$17 - 7\lambda + 17\lambda - 7\lambda^2 + 175 = 0$$

$$7\lambda^2 - 10\lambda - 192 = 0$$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 1344}}{7} = \frac{5 \pm \sqrt{1369}}{7} = \frac{5 \pm 37}{7}$$

$$= \begin{cases} -32/7 \\ 6 \end{cases}$$

quindi l'altro autovalore è $-32/7$ con molteplicità 1.

$$V_6 : \begin{pmatrix} -1-6 & 5 & 0 \\ 5 & 17/7-6 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 5 & 0 \\ 5 & -25/7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{5/7} \begin{pmatrix} -7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 v.l.: y e z. $-7x + 5y = 0$ dà $x = \frac{5}{7}y$

$$V_6 = \left\{ \begin{pmatrix} 5/7\, y \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Trovo base ortonormale

$y = 0 \quad z = 1$ dà $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$y = 1 \quad z = 0$ dà $\begin{pmatrix} 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Fortunatamente sono ortogonali. Quindi basta normalizzarli

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{49}+1}} = \frac{7}{\sqrt{74}} \begin{pmatrix} 5/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{-32/7} \quad \begin{pmatrix} -1+32/7 & 5 & 0 \\ 5 & \frac{17}{7}+\frac{32}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 6+32/7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 18/7 & 5 & 0 \\ 5 & +49/7 & 0 \\ 0 & 0 & 74/7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 35 & 0 \\ 35 & +49 & 0 \\ 0 & 0 & +4 \end{pmatrix} \longrightarrow \quad -35/25 = -7/5$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 35 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad y \text{ libera}$$

$$z = 0$$

$$49 - \frac{7}{\cancel{5}} \cdot \overset{7}{\cancel{35}} = 0 \qquad y = 1$$

$$18x + 35 = 0$$

$$x = -35/18$$

$$V_{-32/7} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -35/18 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} -35/18 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{35}{18}\right)^2 + 1}}$$

la base ortonormale di autovettori è $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$.

5. Risolviamo subito il sistema

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

se vediamo che è impossibile avremo subito che la B non è base ...

6. $U \cap W = \{ v \in V \text{ t.c. } v \in U \text{ e } v \in W \}$

è ssp.

Infatti $U \cap W \supseteq \{0\}$ perché sia U che W lo contengono.

Inoltre se $v_1, v_2 \in U \cap W$ allora sono sia in U che in W e poiché U, W sono ssp, si ha che $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in U$ come

pure " $\in W$

per cui " $\in U \cap W$.

$U \cup W$ non è ssp: si pensi a $x=0$ e $y=0$: ciascuno è ssp di $\mathbb{R}^2$ ma l'unione non è chiusa per somma: infatti $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \{x=0\} \cup \{y=0\}$.

$U+W$ è ssp. Infatti contiene 0 perché

$$\underset{\in U}{0} = 0 + \underset{\in W}{0}$$

; prendi $v_2, v_1 \in U+W$ allora esistono u_i, w_i t.c. $u_i \in U, w_i \in W$ e $v_1 = u_1 + w_1$, $v_2 = u_2 + w_2$. Allora

$$v_2 + v_1 = u_2 + w_2 + u_1 + w_1 = \underset{\in U}{(u_2+u_1)} + \underset{\in W}{(w_1+w_2)}$$

$\in U+W$. Idem per la moltiplicazione per uno scalare.